Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 12

Abgabe: Mittwoch, 28. Januar

(1) (a) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{1}{x+y}\, d(x,y)$.

(b) Es sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $Q = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]$. Zeige mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium: Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{Q}$, so ist f integrierbar mit $\displaystyle\int_Q f(x)\,dx = 0$.

(2) (a) Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \|x\|_2 = r_n\}$$

eine Nullmenge ist.

(b) Es seien $A \subset B \subset C$ beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.
Man zeige: Sind A und C messbar mit $\operatorname{vol} A = \operatorname{vol} C$, so ist auch B messbar mit $\operatorname{vol} B = \operatorname{vol} A$.

(3) Es seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zwei integrierbare Funktionen auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Zu einer Zerlegung Z von $[a,b]$ definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{US}(f,g,Z) &:= \sum_{Q\in \operatorname{TQ}(Z)} \operatorname{vol} Q \cdot \inf f(Q) \cdot \inf g(Q) \\ \text{und} \quad \operatorname{OS}(f,g,Z) &:= \sum_{Q\in \operatorname{TQ}(Z)} \operatorname{vol} Q \cdot \sup f(Q) \cdot \sup g(Q). \end{aligned}$$

Man zeige:

(a) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine Zerlegung Z von $[a,b]$ mit $\operatorname{OS}(f,g,Z) - \operatorname{US}(f,g,Z) < \varepsilon$.

(b) Die Funktion $f \cdot g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls integrierbar, und es gilt

$$\sup\{\operatorname{US}(f,g,Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\} = \int_{[a,b]} f(x)\,g(x)\,dx.$$

(4) (a) Wir wissen bereits, dass die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar ist. Es sei nun also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Abzählung. Zeige, dass die Menge

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - \frac{1}{2^{n+3}}, q_n + \frac{1}{2^{n+3}} \right) \quad \subset \mathbb{R}$$

dann offen und nicht messbar ist.

(b) Finde eine kompakte (und damit auch abgeschlossene) Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht messbar ist.

(Hinweis: Da die obigen Intervalle nur eine Gesamtlänge von $\frac{1}{2}$ haben, kann M ja wohl nicht das ganze Einheitsintervall $[0,1]$ überdecken. Andererseits enthält M aber um jede rationale Zahl in $[0,1]$ noch ein offenes Intervall und muss damit doch eigentlich auch alle irrationalen Zahlen in $[0,1]$ enthalten, also doch das ganze Intervall $[0,1]$ überdecken? Wo ist der Denkfehler?)