

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 11

Abgabe: Mittwoch, 21. Januar

- (1) (a) Bestimme mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren die globalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5x_1 + x_2 - 3x_3$$

auf dem Schnitt der Ebene $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ mit der Kugeloberfläche $\|x\|_2 = 1$.

- (b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $M_a := \{(x \cos y, 1 - e^{ay+x^2}) : x, y \in \mathbb{R}\}$ eine Umgebung des Nullpunkts in \mathbb{R}^2 ?

- (2) In dieser Aufgabe bezeichnen wir die Koordinaten von \mathbb{R}^3 mit x, y, z .

- (a) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$e^{xz} - x^2 + y^2 = xy^3 + x^2z + yz^2 = 1$$

in einer Umgebung von $x_0 = 1, y_0 = 1$ und $z_0 = 0$ nach den Variablen y und z aufgelöst, also als $(y, z)^T = \varphi(x)$ für eine stetig differenzierbare Funktion φ geschrieben werden kann. Berechne auch die Ableitung $\varphi'(1)$ an diesem Punkt.

- (b) Es seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit $f(a) = 0$, an dem alle drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ ungleich 0 sind.

Nach dem Satz über implizite Funktionen bestimmt die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ dann in einer Umgebung von a jede der drei Variablen aus den beiden anderen. Wir können diese Gleichung dort also z. B. als $x = \varphi(y, z)$ für eine stetig differenzierbare Funktion φ schreiben. Gemäß der bekannten Differentialschreibweise bezeichnen wir die partielle Ableitung dieser Auflösungs-funktion φ nach y mit $\frac{\partial x}{\partial y}$, analog für die anderen Variablenkombinationen.

Zeige, dass dann die (etwas merkwürdig erscheinende) Gleichung $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ gilt.

- (3) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^3 = x_2^2\}$.

- (a) Zeige, dass $M \setminus \{0\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^2 ist, M jedoch nicht.

- (b) Berechne alle lokalen Extrema der Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1 + x_2$.

Skizziere auch die Menge M . Könnt ihr die Ergebnisse der beiden Aufgabenteile auch in dieser Skizze erkennen?

- (4) Berechne alle isolierten Punkte der Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_1^3 + x_2^2 + x_2^3 = 0\}$.