

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 10

Abgabe: Mittwoch, 14. Januar

- (1) (a) Bestimme alle lokalen Minima und Maxima der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2$.
Gib zusätzlich für jedes solche Extremum das zweite Taylor-Polynom mit diesem Entwicklungspunkt an.
- (b) Zeige, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2)$ keine lokalen Extrema hat, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Ursprung aber ein lokales Minimum in 0 besitzt.

- (2) Für gegebene Punkte $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Summe der Abstandsquadrate

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^k \|x - a_i\|_2^2.$$

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema von f .

- (3) Es sei $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:
- (a) Hängt f nur von $\|x\|_2$ ab, ist also $f(x) = g(\|x\|_2)$ für eine differenzierbare Funktion $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ (man sagt auch: f ist *kugelsymmetrisch*), so ist
- $$\operatorname{grad} f(x) = \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2} \cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$
- (b) Gibt es umgekehrt eine Funktion $h: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) = h(x) \cdot x$ für alle x , so ist f kugelsymmetrisch.
(Hinweis: Zeige, dass f entlang eines beliebigen Weges auf einer Kugeloberfläche konstant ist.)

- (4) Man zeige:

- (a) Sind $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, so gibt es genau dann eine stetig differenzierbare Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = (f_1 | f_2)$, wenn $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$.
- (b) Im Fall der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hingegen ist diese Aussage falsch: Die Funktionen

$$f_1: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad f_2: D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

erfüllen zwar $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$, aber es gibt keine stetig differenzierbare Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = (f_1 | f_2)$.

(Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, die Formel $F(x) - F(a) = \int_0^1 F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$ für einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ von a nach x zu zeigen und zu benutzen.)