Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 1

Abgabe: Mittwoch, 29. Oktober

Das Kriterium für Diagonalisierbarkeit aus Folgerung 19.30, das direkt aus unseren bisherigen Ergebnissen folgt und gleich am Anfang der Vorlesung vom 24. Oktober behandelt wird, kann auf diesem Blatt schon verwendet werden.

(1) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche dieser Matrizen ist / sind diagonalisierbar? Im Fall der Diagonalisierbarkeit bestimme man jeweils eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ bzw. $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sind A und B ähnlich zueinander?

(d) Wie kann man mit Hilfe von (a) und (b) auf einfache Art eine allgemeine Formel für die Potenzen A^n mit $n \in \mathbb{N}$ bestimmen? (Ihr braucht die Rechnung nicht explizit durchzuführen.)

(2) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ A \mapsto A^{\mathsf{T}}.$$

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung f. Ist f diagonalisierbar? Falls ja, bestimme man eine Basis B von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix A_f^B von f eine Diagonalmatrix ist, und gebe diese Abbildungsmatrix an.

(3) Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in K^{n\times n}$. Man zeige:

(a) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A^{T} diagonalisierbar ist.

(b) Ist $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ invertierbar, und ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$, und $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A^{-1} mit $\mu_{\mathrm{g}}(A^{-1},\frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda)$ und $\mu_{\mathrm{a}}(A^{-1},\frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$.

(4) (a) Es seien $V = C^0(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

(b) Es seien V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ wieder die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

Die Abgabe der Lösungen kann allein oder in Zweiergruppen erfolgen. Um den Arbeitsaufwand dabei sowohl für euch als auch für die Übungsleiter beim Korrigieren in Grenzen zu halten, solltet ihr möglichst zu zweit abgeben. Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eures Übungsgruppenleiters neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.