7. Reihen

Wir wollen uns nun mit einem speziellen Typ von Folgen beschäftigen, der in der Praxis sehr häufig vorkommt: nämlich Folgen, die in der Form

$$(a_0,\ a_0+a_1,\ a_0+a_1+a_2,\ \dots)$$

gegeben sind, deren Grenzwert wir also anschaulich als die „unendliche Summe“ $a_0+a_1+a_2+\cdots$ auffassen können. Derartige Folgen bezeichnet man als Reihen. Wir werden solche Reihen im reellen und komplexen Fall gleichzeitig betrachten und arbeiten daher im Folgenden in der Regel über dem Körper $\mathbb{K}$ wie in Bemerkung 6.19.

7.A Grenzwerte von Reihen

Da Reihen letztlich nichts anderes als spezielle Folgen sind, können wir die Definition und die ersten Eigenschaften von Folgen und Grenzwerten natürlich unmittelbar auf unsere neue Situation übertragen. Dies wollen wir nun im ersten Abschnitt dieses Kapitels tun.

Definition 7.1 (Reihen)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt die Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0+a_1+\cdots+a_N$$

die Folge der **Partialsummen** von $(a_n)_n$ bzw. die zu $(a_n)_n$ gehörige **Reihe**. Wir bezeichnen sowohl diese Reihe als auch ihren Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ (sofern er existiert) mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad a_0+a_1+a_2+\cdots.$$

Genau wie bei Folgen kann auch eine Reihe bei einem anderen Startindex $n_0\in\mathbb{Z}$ als bei 0 anfangen; in diesem Fall schreiben wir sie natürlich als

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n_0}+a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\cdots.$$

Bemerkung 7.2.

(a) Da jede Reihe nach Definition eine Folge ist, übertragen sich die Begriffe Konvergenz und Divergenz, Beschränktheit usw. aus Kapitel 5 direkt auf Reihen.

(b) Die Doppelbelegung des Symbols $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sowohl für die Reihe (also die Folge ihrer Partialsummen) als auch für ihren Grenzwert ist zwar mathematisch unschön, aber in der Literatur so fest verankert, dass wir hier nicht davon abweichen wollen. Es sollte dadurch keine Verwirrung entstehen: Wenn wir von Eigenschaften einer Folge reden, also z. B. sagen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert oder divergiert, so meinen wir natürlich die Partialsummenfolge – während z. B. in Gleichungen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ der Grenzwert der Reihe gemeint ist. Wenn Verwechslungen zu befürchten sind, können wir natürlich auch immer die eindeutige Schreibweise $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ für die Reihe und $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n$ für ihren Grenzwert benutzen.

Beispiel 7.3.

(a) (**Unendliche geometrische Reihe**) Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für ein $q\in\mathbb{K}$. Für $q=1$ ist diese Reihe $1+1+1+\dots$ natürlich unbeschränkt und damit divergent. Ansonsten haben wir in Satz 4.1 gesehen, dass

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Der Grenzwert für $N \to \infty$ ergibt sich nun sofort aus Beispiel 6.26: Da $\lim\limits_{N\to\infty} q^{N+1}$ nur für $|q| < 1$ existiert und dann gleich 0 ist, erhalten wir also

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1, \tag{$*$}$$

während die Reihe in allen anderen Fällen divergiert.

Ein interessanter konkreter Fall dieser Reihe ist die Frage, ob die Dezimalzahl $0,9999\ldots$ gleich 1 oder „etwas kleiner" als 1 ist. Dies können wir nun beantworten, denn die einzig mögliche mathematisch korrekte Definition dieser Zahl ist natürlich die geometrische Reihe

$$0,9999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9}{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n \overset{(*)}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

Die Zahl $0,9999\ldots$ ist daher wirklich *gleich* 1 – in diesem Fall ist die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl also nicht eindeutig.

(b) (Teleskopreihen) Wir wollen den Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ bestimmen. Normalerweise lassen sich derartige Reihen nicht ohne weiteres berechnen, aber in diesem ganz speziellen Fall können wir einen Trick anwenden: Wegen $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ können wir die Partialsummen der Reihe schreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

Derartige Reihen, bei denen sich in den Partialsummen durch geeignete Differenzen alle Terme bis auf einen Start- und Endterm wegheben, bezeichnet man als **Teleskopreihen** (weil die Summe sozusagen wie ein Teleskop „zusammengeschoben" werden kann). Der Grenzwert der Reihe lässt sich dann natürlich einfach berechnen; in diesem Fall ist er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

(c) (**Harmonische Reihe**) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert: Für die Partialsummen mit Index $N = 2^k$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{2^k} + \cdots + \tfrac{1}{2^k}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \\ &= 1 + \tfrac{k}{2}.\end{aligned}$$

Da $1 + \frac{k}{2}$ mit k unbeschränkt wächst, ist die gegebene Reihe also unbeschränkt und damit nach Lemma 5.8 divergent.

Die folgenden einfachen Rechenregeln für Reihen – die Verträglichkeit mit Summen, Differenzen, Multiplikation mit Konstanten sowie im Fall des Körpers $\mathbb{R}$ mit Ungleichungen – ergeben sich sofort aus denen für Folgen in Kapitel 5.

Lemma 7.4 (Rechenregeln für Reihen). *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Dann gilt:*

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *und* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$

(b) *Für $c \in \mathbb{K}$ ist* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a_n \le b_n$ für alle n, so ist* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Beweis. Alle behaupteten Aussagen gelten trivialerweise für die Partialsummen der Reihen (also wenn die Summen bis zu einem festen $N \in \mathbb{N}$ laufen). Übergang zum Grenzwert liefert dann mit den Sätzen 5.13 und 5.24 die Behauptungen. □

Eine analoge direkte Verträglichkeit mit der Multiplikation ist natürlich nicht zu erwarten, weil ja schon für die Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)$ nicht dasselbe ist wie $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$. Wir werden aber später in Satz 7.35 noch eine Formel für das Produkt von Reihen finden.

Bevor wir nun mit der Herleitung allgemeiner Konvergenzkriterien für Reihen beginnen, wollen wir noch zwei sehr einfache Hilfsaussagen festhalten, die aber dennoch oft nützlich sind. Die erste von ihnen ist so einfach, dass sie üblicherweise als *Trivialkriterium* bezeichnet wird: Eine Reihe kann höchstens dann konvergieren, wenn die aufsummierten Zahlen zumindest gegen 0 konvergieren.

Lemma 7.5 (Trivialkriterium). *Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.*

Beweis. Existiert der Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so folgt aus den Grenzwertsätzen

$$a_N = \sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \quad \text{für } N \to \infty. \qquad \square$$

Beispiel 7.6.

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2+1}$ ist divergent, denn nach Beispiel 5.14 ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2 \neq 0$.

(b) Das Trivialkriterium ist nicht umkehrbar: So ist z. B. zwar $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ eine Nullfolge, aber die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach Beispiel 7.3 (c) trotzdem divergent. Man kann mit diesem Kriterium also immer nur die Divergenz einer Reihe nachweisen, aber nie die Konvergenz.

Dieses Beispiel zeigt auch noch etwas anderes: Bezeichnen wir mit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ die Partialsummen der harmonischen Reihe, so ist die Folge $(a_n)_n$ zwar divergent, aber die Folge $(a_{n+1} - a_n)_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)_n$ konvergiert trotzdem gegen 0, d. h. es gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \ge n_0 \colon |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

Um die Äquivalenz zwischen konvergenten Folgen und Cauchyfolgen zu erhalten, genügt es in der Definition 6.22 einer Cauchyfolge also nicht, zwei *benachbarte* Folgenglieder a_n und a_{n+1} miteinander zu vergleichen, sondern wir müssen zwei *beliebige* Folgenglieder a_m und a_n (mit $m, n \ge n_0$) nehmen!

Lemma 7.7. *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis. Da alle aufsummierten Zahlen reell und nicht-negativ sind, ist die Folge ihrer Partialsummen monoton wachsend. Für eine reelle, monoton wachsende Folge ist die Konvergenz nach Lemma 5.8 und dem Monotoniekriterium aus Satz 5.28 aber äquivalent zur Beschränktheit. □

7.B Konvergenzkriterien für Reihen

Wie im Fall von Folgen im letzten Kapitel wollen wir nun einige Kriterien herleiten, mit denen man die Konvergenz einer Reihe beweisen kann, ohne ihren Grenzwert zu kennen. Dabei bleiben natürlich alle Ergebnisse aus Abschnitt 5.B unverändert anwendbar, da Reihen ja letztlich auch nur Folgen sind. Es gibt aber einige zusätzliche Kriterien, die speziell auf den Fall von Reihen zugeschnitten und meistens einfacher zu überprüfen sind. Wir beginnen dabei mit einem Kriterium für reelle Reihen, in denen abwechselnd positive und negative Glieder aufsummiert werden.

Satz 7.8 (Leibniz-Kriterium). *Ist $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

*konvergent, und ihre Partialsummen sind abwechselnd obere und untere Schranken für ihren Grenzwert. (Derartige reelle Reihen, bei denen sich das Vorzeichen in der Summe immer abwechselt, nennt man **alternierend**.)* 14

Beweis. Es sei $s_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$, also $(s_N)_N$ die Folge der Partialsummen der betrachteten Reihe. Da $(a_n)_n$ monoton fallend und die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder von $(a_n)_n$ damit nicht negativ ist, ist die Folge $(s_{2N})_N$ der *geraden* Partialsummen monoton fallend: Es gilt

$$s_{2N+2} = s_{2N} \underbrace{- a_{2N+1} + a_{2N+2}}_{\leq 0} \leq s_{2N}.$$

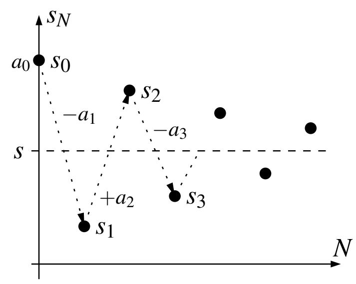
Analog ist die Folge $(s_{2N+1})_N$ der ungeraden Partialsummen monoton wachsend, wie auch das Bild unten rechts zeigt. Damit haben wir ineinander liegende Intervalle

$$[s_1, s_2] \supset [s_3, s_4] \supset [s_5, s_6] \supset \cdots,$$

die eine Intervallschachtelung definieren, da die Länge

$$s_{2N} - s_{2N-1} = a_{2N}$$

dieser Intervalle mit $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Nach Satz 5.39 konvergieren also die geraden und ungeraden Partialsummen monoton fallend bzw. wachsend gegen den gleichen Grenzwert s. Insbesondere sind die geraden und ungeraden Partialsummen also obere bzw. untere Schranken für s.



Außerdem liegen damit in jeder ε-Umgebung von s fast alle geraden und fast alle ungeraden Partialsummen, und somit konvergiert auch die gesamte Folge der Partialsummen gegen s. □

Beispiel 7.9 (Alternierende harmonische Reihe). Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp \cdots$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent, denn $\frac{1}{n}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Ihren Grenzwert können wir momentan noch nicht berechnen (in der Tat ist er gleich $-\log 2$, wie wir in Beispiel 11.15 (a) sehen werden), aber nach Satz 7.8 liegt er sicher zwischen den ersten beiden Partialsummen $-\frac{1}{1} = -1$ und $-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Übrigens ist diese Reihe (ganz im Gegensatz z. B. zur Folge aus Beispiel 5.37) eine, die „extrem langsam" konvergiert: Um hier den Grenzwert auf k Nachkommastellen genau zu berechnen, müssen wir natürlich mindestens die ersten 10^k Summanden mitnehmen, denn der 10^k-te Summand ist ja 10^{-k} und ändert somit in jedem Fall noch die k-te Nachkommastelle.

Wir können an dieser alternierenden harmonischen Reihe aber noch eine weitere überraschende Eigenschaft sehen. Dazu sortieren wir die aufzusummierenden Zahlen mal etwas um und schreiben unsere Reihe als

$$\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{12} + \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right) + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Das Prinzip hierbei ist, dass die Terme $(-1)^n \frac{1}{n} \ldots$

- für ungerade n der Reihe nach als erste Summanden in den Klammern stehen,
- für gerade, aber nicht durch 4 teilbare n der Reihe nach als zweite Summanden in den Klammern stehen,
- für durch 4 teilbare n der Reihe nach außerhalb der Klammern stehen.

Es ist klar, dass wir hier wirklich nur die Summanden umsortiert, also keinen vergessen oder doppelt hingeschrieben haben. Rechnen wir jetzt aber mal die Klammern aus, so erhalten wir

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}\mp\cdots$$

und damit genau die Hälfte der ursprünglichen Reihe! Da die Reihe nicht den Wert 0 hat (wie wir oben schon gesehen haben, liegt ihr Wert ja zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$), haben wir ihren Wert durch das Umsortieren also tatsächlich geändert und müssen damit wohl oder übel feststellen:

Das Umordnen der Summanden in einer konvergenten Reihe kann ihren Grenzwert ändern.

Das ist natürlich extrem lästig, weil uns das sozusagen die Kommutativität der Addition im Fall von unendlichen Summen kaputt macht – was völlig der Intuition widerspricht und natürlich auch beim Rechnen mit solchen Reihen große Probleme bereitet. Glücklicherweise gibt es einen relativ eleganten Ausweg aus dieser Situation: Es gibt eine Eigenschaft von Reihen, die etwas stärker als die normale Konvergenz ist, in vielen Fällen aber dennoch erfüllt ist und die Umsortierbarkeit ohne Änderung des Grenzwerts garantiert. Diese wollen wir jetzt einführen.

Definition 7.10 (Absolute Konvergenz)**.** Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ihrer Beträge konvergiert, also nach Lemma 7.7 wenn diese Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ beschränkt ist.

(Der Name kommt einfach daher, dass man den Betrag einer Zahl oft auch als *Absolutbetrag* bezeichnet.)

Für Reihen, in denen nur nicht-negative reelle Zahlen aufsummiert werden, stimmen die Begriffe „konvergent“ und „absolut konvergent“ offensichtlich überein. Wir wollen nun sehen, dass der Begriff der absoluten Konvergenz für allgemeine Reihen wirklich „stärker“ als die gewöhnliche Konvergenz ist, also dass aus der absoluten Konvergenz einer Reihe auch die Konvergenz folgt. Dazu müssen wir zunächst das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.25 auf Reihen übertragen. Auch hier ist dieses Kriterium wieder besonders deswegen wichtig, weil es zum einen zur Konvergenz *äquivalent* ist (man mit ihm also Konvergenz genauso wie Divergenz nachweisen kann) und es außerdem in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichermaßen funktioniert.

Folgerung 7.11 (**Cauchy-Kriterium** für Reihen)**.** *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn*

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m\geq n\geq n_0\colon \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|<\varepsilon.$$

Beweis. Nach Definition ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die Folge $(s_N)_N$ der Partialsummen mit $s_N=\sum_{n=0}^{N} a_n$ konvergiert. Wenden wir das Cauchy-Kriterium für Folgen aus Satz 6.25 auf $(s_N)_N$ an, sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq n_0\colon |s_n-s_m|<\varepsilon.$$

Natürlich können wir hier aus Symmetriegründen $m\geq n$ annehmen, und aus $s_m-s_n=\sum_{k=n+1}^{m} a_k$ folgt dann sofort die Behauptung. □

Lemma 7.12. *Jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ ist konvergent.*

Beweis. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, d. h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sei konvergent. Nach dem Cauchy-Kriterium aus Folgerung 7.11 gibt es also zu jedem $\varepsilon>0$ ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right|=\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|<\varepsilon$$

für alle $m\geq n\geq n_0$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung aber erst recht

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|<\varepsilon,$$

und damit ist wiederum nach dem Cauchy-Kriterium auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. $\square$

Beispiel 7.13. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ ist nach Beispiel 7.9 konvergent. Sie ist aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nach Beispiel 7.3 (c) divergiert. Die Umkehrung von Lemma 7.12 gilt also nicht.

Als Nächstes hatten wir behauptet, dass die absolute Konvergenz einer Reihe sicher stellt, dass man die Summanden ohne Änderung des Grenzwerts umordnen kann. Dies wollen wir jetzt zeigen.

Definition 7.14 (Umordnungen einer Reihe)**.** Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (die offensichtlich aus den gleichen Summanden besteht, nur evtl. in anderer Reihenfolge) eine **Umordnung** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 7.15 (**Umordnungssatz**)**.** *Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist ebenfalls absolut konvergent und konvergiert gegen denselben Grenzwert.*

Beweis. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Ferner sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ nach Voraussetzung konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium aus Folgerung 7.11 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq n \geq n_0$. Insbesondere haben wir für $n = n_0$ und $m \to \infty$ also

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1}$$

Da σ surjektiv ist, können wir ein $n_0' \geq n_0$ wählen, so dass alle Summanden $a_0, \dots, a_{n_0}$ bis zum n_0'-ten Term der Umordnung aufgetreten sind, also so dass

$$\{0, 1, \dots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n_0')\} \tag{2}$$

gilt. Wir betrachten nun für beliebiges $n \geq n_0'$ die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) = (a_{\sigma(0)} - a_0) + (a_{\sigma(1)} - a_1) + \cdots + (a_{\sigma(n)} - a_n).$$

Wegen (2) und $n \geq n_0' \geq n_0$ treten in dieser Summe alle Glieder $a_0, \dots, a_{n_0}$ sowohl einmal mit positivem als auch einmal mit negativem Vorzeichen auf, heben sich also heraus. Die übrigen a_n mit $n > n_0$ können sich ebenfalls herausheben, oder mit einem positiven oder negativen Vorzeichen auftreten. Wir können dies symbolisch schreiben als

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) = \sum_{k} \pm a_k,$$

wobei die Summe hier über gewisse (endlich viele) $k > n_0$ läuft und für jedes solche k das Vorzeichen von a_k positiv oder negativ sein kann. Damit können wir diesen Ausdruck mit der Dreiecksungleichung betragsmäßig abschätzen durch

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (a_{\sigma(k)} - a_k) \right| = \left| \sum_{k} \pm a_k \right| \leq \sum_{k} |a_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| \overset{(1)}{<} \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich $\sum_{n=0}^{\infty}(a_{\sigma(n)} - a_n) = 0$, und damit nach den üblichen Rechenregeln aus Lemma 7.4

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\sigma(n)} - a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Die Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert also gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe. Wenden wir dieses Ergebnis nun auch noch auf die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ an, so erhalten wir genauso $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, woraus die absolute Konvergenz der Umordnung folgt. $\square$

Bemerkung 7.16 (Summen mit abzählbar unendlicher Indexmenge)**.** Da es bei „unendlichen Summen“ im Fall der absoluten Konvergenz also nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, können wir damit auch derartige Summen definieren, bei denen die Summanden zunächst einmal überhaupt keine vorgegebene Reihenfolge haben, sondern durch eine beliebige abzählbar unendliche Menge I indiziert werden: Ist $a_i \in \mathbb{K}$ für alle $i \in I$, so wählen wir eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to I$. Ist dann die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ absolut konvergent, so schreiben wir den Wert dieser Reihe als

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \quad \in \mathbb{K}.$$

Dies hängt dann nach dem Umordnungssatz 7.15 nicht von der Wahl von σ ab, da sich die durch eine andere Bijektion entstehende Reihe nur durch eine Umordnung unterscheidet und somit nichts an der absoluten Konvergenz bzw. dem Grenzwert der Reihe ändert.

Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ dagegen nicht absolut konvergent, so können wir $\sum_{i\in I} a_i$ nicht sinnvoll definieren. Auch für eine überabzählbare Indexmenge I ist eine solche Summenbildung nicht möglich, wie die folgende Aufgabe zeigt – es käme in nicht-trivialen Fällen nämlich immer ∞ dabei heraus.

Aufgabe 7.17. Es seien $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle i in einer überabzählbaren Indexmenge I. Zeige, dass die Summe aller dieser a_i dann unbeschränkt ist, also dass es zu jedem $s \in \mathbb{R}_{>0}$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ gibt mit $\sum_{i\in J} a_i > s$.

Aufgabe 7.18. Zeige die folgende Verallgemeinerung des Leibniz-Kriteriums ins Komplexe: Ist $(a_n)_n$ eine reelle, monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| = 1$ und $x \neq 1$.

(Hinweis: Untersuche die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1) x^n$.)

Aufgrund der schönen Eigenschaften absolut konvergenter Reihen werden wir uns im Folgenden oftmals eher für die absolute als für die „gewöhnliche“ Konvergenz von Reihen interessieren. Wir wollen nun ein paar Kriterien zusammentragen, mit denen man die absolute Konvergenz von Reihen in vielen Fällen einfach nachprüfen kann. Das erste von ihnen ist eigentlich sehr offensichtlich:

Satz 7.19 (**Majoranten-/Minorantenkriterium**). *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei Reihen in $\mathbb{K}$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle n.*

(a) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

*(Man nennt $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in diesem Fall eine konvergente **Majorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.)*

(b) *Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.*

*(Man nennt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in diesem Fall eine divergente **Minorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$.)*

Beweis.

(a) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, also $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ beschränkt, so ist wegen $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle n auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ beschränkt, und damit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach Lemma 7.7 absolut konvergent.

(b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht konvergent, so ist sie nach Lemma 7.12 insbesondere auch nicht absolut konvergent, und daher kann nach (a) auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nicht absolut konvergent sein, d. h. die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ divergiert. $\square$

Beispiel 7.20.

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent: Wegen $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ für $n \geq 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ nach Beispiel 7.3 (b) eine (absolut) konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Damit konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Beachte, dass man auf diese Art mit Hilfe des Majorantenkriteriums zwar die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ beweisen, aber nicht ihren Grenzwert bestimmen kann (in der Tat kann man zeigen, dass der Wert dieser Reihe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist).

(b) Für $k \geq 2$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent, denn wegen $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$ für alle n ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach (a) eine konvergente Majorante.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dagegen ist divergent, denn wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ aus Beispiel 7.3 (c) eine divergente Minorante.

Aufgabe 7.21. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ ist absolut konvergent.}$$

Wenn man mit dem Majorantenkriterium die (absolute) Konvergenz einer Reihe nachweisen möchte, stellt sich natürlich die Frage, wo man eine konvergente Majorante herbekommt. Sehr oft kann man hierfür einfach eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für ein $q \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $q < 1$ wie in Beispiel 7.3 (a) verwenden. Aus diesem Ansatz ergeben sich in der Tat die folgenden beiden allgemeinen Kriterien, die sehr oft anwendbar sind:

Satz 7.22 (**Quotientenkriterium**). *Es sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe in* $\mathbb{K}$ *mit* $a_n \neq 0$ *für fast alle* n*. Dann gilt:*

(a) *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$*, so ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Der Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ *ist dabei in (b) zugelassen. Ist die Folge* $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ *jedoch unbestimmt divergent oder konvergiert sie gegen* 1*, so macht das Quotientenkriterium keine Aussage.*

Beweis. Es sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

(a) Ist $a < 1$, so können wir ein $\varepsilon > 0$ wählen, so dass auch noch $q := a + \varepsilon < 1$ gilt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$ gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < a + \varepsilon = q \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

und damit $|a_{n+1}| < q\,|a_n|$. Daraus ergibt sich für alle $n \geq n_0$

$$|a_n| < q\,|a_{n-1}| < q^2\,|a_{n-2}| < \cdots < q^{n-n_0}\,|a_{n_0}|.$$

Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0}\,|a_{n_0}|$ eine Majorante der gegebenen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wegen $q < 1$ konvergiert sie nach Beispiel 7.3 (a) absolut, denn es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0}\,|a_{n_0}| = q^{-n_0}\,|a_{n_0}| \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^{-n_0}\,|a_{n_0}| \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Die zu beweisende Aussage folgt damit aus dem Majorantenkriterium von Satz 7.19. 15

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$, so können wir ein $\varepsilon > 0$ finden mit $a - \varepsilon > 1$. In diesem Fall gibt es nach der Grenzwertbedingung ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > a - \varepsilon > 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Beachte, dass dies auch im Fall $a = \infty$ gilt, denn auch dann sind ja insbesondere fast alle $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ größer als 1.

Also gilt $|a_{n+1}| > |a_n|$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist $(|a_n|)_n$ ab n_0 aber eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen, und kann somit keine Nullfolge sein. Die gegebene Reihe divergiert also nach dem Trivialkriterium aus Lemma 7.5. □

Das zweite, recht ähnliche Kriterium, das auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe beruht, benutzt die höheren Wurzeln aus Aufgabe 5.37.

Satz 7.23 (**Wurzelkriterium**)**.** *Für jede Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *in* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(a) *Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(b) *Ist* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *so ist die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Der Fall $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ *ist dabei in (b) wieder zugelassen. Ist jedoch* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *so macht das Wurzelkriterium keine Aussage.*

Beweis. Es sei $a := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

(a) Für $a < 1$ sei wieder $\varepsilon > 0$ mit $q := a + \varepsilon < 1$. Nach Lemma 5.47 (a) gilt dann

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon = q, \qquad \text{also} \quad |a_n| < q^n$$

für fast alle n. Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine Majorante der gegebenen Reihe. Da diese wegen $q < 1$ nach Beispiel 7.3 (a) (absolut) konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Majorantenkriterium aus Satz 7.19 absolut.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$, so wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon > 1$. Diesmal folgt dann aus Lemma 5.47 (b), dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} > a - \varepsilon > 1$$

für unendlich viele n. Beachte, dass dies auch im Fall $a = \infty$ gilt, weil die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ dann eine Teilfolge mit uneigentlichem Grenzwert ∞ hat.

Damit ist aber auch $|a_n| > 1$ für unendlich viele n. Also ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge, und die gegebene Reihe divergiert nach dem Trivialkriterium aus Lemma 7.5. □

Bemerkung 7.24 (Vergleich von Quotienten- und Wurzelkriterium)**.** Das Quotientenkriterium hat gegenüber dem Wurzelkriterium den Vorteil, dass sich der Quotient $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oft einfacher berechnen lässt als die Wurzel $\sqrt[n]{|a_n|}$. Allerdings benötigen wir im Quotientenkriterium einen Grenzwert der Quotientenfolge, während im Wurzelkriterium der Limes superior der Wurzelfolge genügt, der ja nach Bemerkung 5.52 zumindest im uneigentlichen Sinne stets existiert.

Dies liegt daran, dass wir für die Induktion im Beweis von Satz 7.22 brauchten, dass fast alle Quotienten in (a) kleiner als $a+\varepsilon$ und in (b) größer als $a-\varepsilon$ sind, so dass a dort der Grenzwert der Quotientenfolge sein musste. Im Beweis von Satz 7.23 brauchten wir dagegen in (a) zwar auch, dass fast alle Wurzeln kleiner als $a+\varepsilon$ sind, aber in (b) reichten unendlich viele Wurzeln größer als $a-\varepsilon$.

Mit dieser Beobachtung sieht man allerdings mit Hilfe von Lemma 5.47 auch, dass wir den Grenzwert im Quotientenkriterium von Satz 7.22 in (a) durch den Limes superior und in (b) durch den Limes inferior ersetzen könnten, um so noch allgemeinere Aussagen zu erhalten. Hat die Quotientenfolge jedoch mehrere Häufungspunkte, von denen einer größer als 1 und einer kleiner als 1 ist, so lässt sich aus der Idee des Quotientenkriteriums aber endgültig keine Aussage über die Konvergenz der Reihe mehr herleiten.

Beispiel 7.25.

(a) Betrachten wir für ein $q \in \mathbb{K}$ mit $q \neq 0$ die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ selbst, ist also $a_n = q^n$ in der Notation von Satz 7.22 und 7.23, so ist offensichtlich $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sqrt[n]{|a_n|} = |q|$ unabhängig von n, und sowohl Quotienten- als auch Wurzelkriterium reproduzieren einfach das Ergebnis aus Beispiel 7.3 (a) in den Fällen mit $|q| \neq 1$.

(b) Für die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ aus Beispiel 7.9 macht das Quotientenkriterium keine Aussage, denn dort gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}/(n+1)}{(-1)^n/n}\right| = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$$

für $n \to \infty$. Dies war natürlich zu erwarten, da diese Reihe ja auch weder absolut konvergent noch divergent ist.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ ist nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent, denn es ist

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{K}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent, denn es gilt

$$\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

für $n \to \infty$. Auf diese Art haben wir also letztlich eine Funktion von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ definiert, die jedem x den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ zuordnet.

Es handelt sich bei diesem letzten Beispiel genau um die Exponentialfunktion, die ihr zumindest im reellen Fall bereits aus der Schule kennt. Sie ist aber letztlich nur ein spezielles Beispiel für eine sehr große Klasse von Funktionen, die sich in der Form $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für gewisse $a_n \in \mathbb{K}$ schreiben lassen. Wir wollen derartige Funktionen, die in dieser Vorlesung immer wieder vorkommen werden, daher jetzt einführen und etwas genauer untersuchen.

7.C Potenzreihen

Potenzreihen kann man sich in gewissem Sinne als Verallgemeinerung der Polynome aus Abschnitt 3.C vorstellen: statt endlicher Summen $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ in einer Variablen x betrachten wir nun unendliche Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Wir beginnen mit der formalen Definition solcher Reihen, zusammen mit dem wohl wichtigsten Beispiel: der Exponentialfunktion.

Definition 7.26 (Potenzreihen und die Exponentialfunktion)**.**

(a) Ist $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{K}$, so heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die **Potenzreihe** in x mit Koeffizienten $(a_n)_n$. Ist $D \subset \mathbb{K}$ die Menge aller x, für die diese Reihe konvergiert, so können wir die Potenzreihe offensichtlich als Funktion von D nach $\mathbb{K}$ auffassen.

Der Startindex einer Potenzreihe darf auch größer als 0 sein (dann kann man die ersten Koeffizienten ja gleich 0 setzen), aber nie kleiner als 0 – eine Potenzreihe in x enthält nach Definition keine negativen Potenzen von x.

(b) Die **Exponentialfunktion** ist die Potenzreihenfunktion

$$\exp\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad \text{mit} \qquad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(die nach Beispiel 7.25 (d) für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert).

Aus dem Wurzelkriterium können wir sofort eine allgemeine Aussage ableiten, auf welchen Gebieten derartige Potenzreihen konvergieren: nämlich auf um 0 zentrierten Intervallen (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. auf Kreisen um 0 (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Satz und Definition 7.27 (Konvergenzgebiete von Potenzreihen, Formel von **Cauchy-Hadamard**). *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ und*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

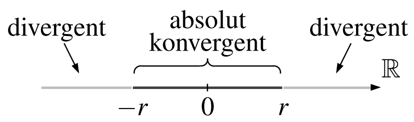
(beachte, dass dieser Wert nach Bemerkung 5.52 in jedem Fall existiert). Dann gilt:

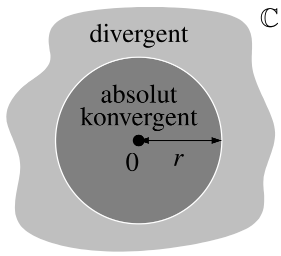
(a) *für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$ ist die Potenzreihe absolut konvergent;*

(b) *für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| > r$ ist die Potenzreihe divergent.*

Im Fall $|x| = r$ kann keine allgemeine Aussage über die Konvergenz der Reihe getroffen werden.

Die geometrische Deutung dieser Konvergenzaussagen im reellen bzw. komplexen Fall zeigt das folgende Bild. Man nennt r den ***Konvergenzradius*** *und $\{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ das* ***Konvergenzgebiet*** *der Potenzreihe.*





Beweis. Wir wenden das Wurzelkriterium aus Satz 7.23 auf die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an: Nach Aufgabe 5.51 (b) ist für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(|x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}\right) = |x| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r},$$

also konvergiert die Reihe absolut für $\frac{|x|}{r} < 1$ (d. h. $|x| < r$) und divergiert für $\frac{|x|}{r} > 1$ (d. h. $|x| > r$). □

Bemerkung 7.28. Beachte, dass die Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 7.27 den Konvergenzradius eindeutig charakterisieren als

$$r = \sup \left\{ |x| : x \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergent} \right\}. \qquad (*)$$

So ist z. B. auch ohne Berechnung des Ausdrucks für r in Satz 7.27 klar, dass die Exponentialreihe aus Definition 7.26 (b) den Konvergenzradius ∞ hat, da sie ja auf ganz $\mathbb{K}$ konvergiert. In der Tat wird die Gleichung $(*)$ in der Literatur auch oft als Definition des Konvergenzradius einer Potenzreihe benutzt.

Es sollte nicht überraschen, dass man nicht nur mit dem Wurzelkriterium, sondern auch mit dem Quotientenkriterium eine Aussage über den Konvergenzradius einer Potenzreihe treffen kann. Allerdings ist diese nicht ganz so universell, da sie wie in Satz 7.22 die Existenz des Grenzwerts der Quotientenfolge der Koeffizienten voraussetzt.

Satz 7.29 (Alternative Formel für den Konvergenzradius einer Potenzreihe). *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für fast alle n. Existiert dann der Grenzwert*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

so ist dies der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beweis. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{a_n\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(|x|\cdot\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{r}$$

konvergiert die Potenzreihe nach Satz 7.22 absolut für $|x| < r$ und divergiert für $|x| > r$. Nach Bemerkung 7.28 ist r damit der Konvergenzradius der Reihe. □

Beispiel 7.30.

(a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ hat nach Satz 7.29 den Konvergenzradius

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

konvergiert also für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut und divergiert für alle x mit $|x| > 1$. Für $|x| = 1$ treten in der Tat verschiedene Fälle auf: Im Fall $x = 1$ erhalten wir die harmonische Reihe, die nach Beispiel 7.3 (c) divergiert, während wir für $x = -1$ die alternierende harmonische Reihe haben, die nach Beispiel 7.9 konvergiert. Dies zeigt noch einmal, dass unsere obigen nur von $|x|$ abhängigen Kriterien auf dem Rand des Konvergenzgebiets wirklich keine allgemeine Aussage machen können.

(b) Für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n$ gilt nach Satz 7.27 und 7.29

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} \qquad \text{sowie} \qquad r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Vergleich dieser beiden Ergebnisse liefert also $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt damit nach Lemma 5.47 (a), dass $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$ für fast alle n. Natürlich ist aber auch $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle n, und damit ergibt sich zusammen

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

(was gar nicht so offensichtlich ist, da der Ausdruck $\sqrt[n]{n}$ für wachsendes n ja durch das n unter der Wurzel größer, durch das Ziehen der n-ten Wurzel aber kleiner wird).

Aufgabe 7.31. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz (im Fall (c) in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$):

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(3+(-1)^n)^n}, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, \qquad \text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\,x^n.$$

Eine Berechnung des Grenzwerts im Fall der Konvergenz ist nicht erforderlich.

Aufgabe 7.32. Zeige, dass jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$ in $\mathbb{K}$ denselben Konvergenzradius wie ihre „formale Ableitung“ $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$ hat, aber nicht notwendig für die gleichen x konvergiert.

(Wir werden in Folgerung 10.27 sehen, dass dies dann auch genau die „gewöhnliche“ Ableitung der ursprünglichen Reihe ist.)

Aufgabe 7.33. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Man zeige:

(a) Ist a_n der Quotient von zwei Polynomen in n, so machen weder das Quotienten- noch das Wurzelkriterium eine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(b) Macht das Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so macht auch das Quotientenkriterium keine Aussage darüber.

Aufgabe 7.34 (Alternative Darstellung der Exponentialfunktion)**.** Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

gilt. (Hinweis: Eine Möglichkeit besteht darin, durch eine geeignete Abschätzung zu zeigen, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.)

Der Ausdruck $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ in dieser Darstellung der Exponentialfunktion hat übrigens eine sehr anschauliche Interpretation: Wenn ihr 1 Euro zu einem Zinssatz x ein Jahr lang anlegt und sich die Bank bereit erklärt, nicht einmal am Ende des Jahres den Betrag x an Zinsen auszuzahlen, sondern stattdessen n-mal einen Zinssatz von $\frac{x}{n}$ bezahlt, so habt ihr dadurch am Ende des Jahres aufgrund des Zinseszinses natürlich mehr Geld als bei einer einmaligen Zinszahlung, nämlich genau $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Die gerade gezeigte Formel besagt, dass ihr selbst für $n \to \infty$, also wenn ihr die Bank zu einer unendlichen Aufteilung der Zinsen auf diese Art überreden könntet, dadurch kein unendliches Vermögen aufbauen könntet, sondern am Ende des Jahres lediglich den Betrag von $\exp(x)$ hättet.

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir nun noch Produkte von Reihen untersuchen. Haben wir z. B. zwei Potenzreihen $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ und $\sum_{l=0}^\infty b_l x^l$, so würden wir erwarten, dass wir ihr Produkt für alle x im Durchschnitt der Konvergenzgebiete der beiden Reihen wie folgt durch „unendliches Ausmultiplizieren" berechnen und wieder zu einer neuen Potenzreihe zusammenfassen können:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^\infty a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^\infty b_l x^l\right) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots)\\ &\overset{?}{=} a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^\infty c_n x^n\end{aligned}$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Wir wollen nun zeigen, dass dies in der Tat erlaubt ist – und zwar auch für allgemeine Reihen, nicht nur für Potenzreihen (also wenn wir uns das x in der obigen Rechnung wegdenken). Da die einzelnen ausmultiplizierten Summanden in der entstehenden Reihe dabei aber irgendwie sortiert werden müssen, sollte es in Anbetracht des Umordnungssatzes 7.15 nicht überraschen, dass wir für die Gültigkeit dieser Rechnung die *absolute* Konvergenz der Reihen benötigen.

Satz 7.35 (**Cauchy-Produkt** von Reihen). *Es seien $\sum_{k=0}^\infty a_k$ und $\sum_{l=0}^\infty b_l$ zwei absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$. Setzen wir dann*

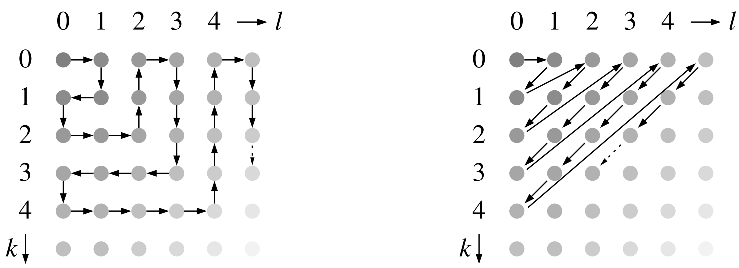
$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^\infty b_l\right) = \sum_{n=0}^\infty c_n. \qquad (*)$$

16

Beweis. Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte $A := \sum_{k=0}^\infty |a_k|$ und $B := \sum_{l=0}^\infty |b_l|$ in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass die Summe $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k b_l$ über die nach Beispiel 5.59 (a) abzählbare Indexmenge $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ im Sinne von Bemerkung 7.16 existiert und mit dem Wert beider Seiten der Gleichung $(*)$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir die beiden im folgenden Bild dargestellten Aufzählungen von $\mathbb{N}^2$: eine „quadratische", und eine „schräge" wie im Cantorschen Diagonalverfahren im Beweis von Satz 5.58.



(a) (b)

(a) Summieren wir zunächst die Beträge $|a_k\, b_l|$ in der Reihenfolge dieser „quadratischen" Aufzählung, so erhalten wir nach der Summation von höchstens n^2 Termen, also denen im Quadrat links oben mit n Zeilen und Spalten, maximal den Wert

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} |a_k\, b_l| = \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-1} |b_l|\right) \le A \cdot B.$$

Die Reihe über alle $|a_k\, b_l|$ ist (in dieser Aufzählungsreihenfolge) also beschränkt. Damit ist die Reihe über $a_k\, b_l$ nach Definition 7.10 absolut konvergent, und nach Bemerkung 7.16 existiert somit die Reihe $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k\, b_l$.

Um den Wert dieser Reihe zu bestimmen, können wir nach Lemma 5.19 auch nur eine Teilfolge der Partialsummenfolge betrachten. Nehmen wir hierzu die Partialsummen, bei denen wir die ersten n^2 Terme aufaddieren, und lassen dort n gegen ∞ gehen, so erhalten wir

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k\, b_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_k\, b_l = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{n-1} b_l\right) \overset{5.13}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right),$$

also die linke Seite von $(*)$.

(b) In dieser „schrägen" Aufzählungsreihenfolge können wir den Wert von $\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k\, b_l$ analog als Grenzwert für $N \to \infty$ der Partialsummen bestimmen, bei denen wir die ersten N Diagonalen aufsummieren. Da die Summe der $a_k\, b_l$ entlang der Diagonale mit $k+l=n$ gerade c_n ist, erhalten wir so

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} a_k\, b_l = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

und damit durch Vergleich mit (a) die behauptete Gleichheit $(*)$. Weil die ersten N Diagonalen außerdem im Quadrat links oben mit N Zeilen und Spalten enthalten sind, haben wir weiterhin mit der Dreiecksungleichung

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n| = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k} \right| \le \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot |b_{n-k}| \le \left(\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{N-1} |b_l|\right) \le A \cdot B$$

und damit auch die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gezeigt. □

Die wohl wichtigste Anwendung des Cauchy-Produkts erhalten wir im Fall der Exponentialfunktion.

Folgerung 7.36 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y).$$

Beweis. Nach Beispiel 7.25 (d) und Definition 7.26 (b) konvergiert die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{K}$ absolut. Also gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) && \text{(nach dem Cauchy-Produkt aus Satz 7.35)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} && \text{(nach der binomischen Formel aus Satz 4.7)} \\
&= \exp(x+y),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 7.37 (Produkte von Potenzreihen)**.** Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l$ zwei Potenzreihen in x mit Konvergenzradien r_1 bzw. r_2, so gilt nach Satz 7.35 für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < \min(r_1, r_2)$ (wo also nach Satz 7.27 beide Potenzreihen absolut konvergieren)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n,$$

d. h. das Produkt zweier Potenzreihen mit Konvergenzradien r_1 und r_2 ist wieder eine Potenzreihe, deren Konvergenzradius mindestens $\min(r_1, r_2)$ beträgt und die wie erwartet durch „unendliches Ausmultiplizieren" berechnet werden kann.

Dies ist ein erstes Beispiel für ein generelles Prinzip, das wir in den folgenden Kapiteln immer wieder sehen werden (siehe z. B. Bemerkung 12.38): Potenzreihen haben sehr viele schöne Eigenschaften – obwohl sie als „unendliche Summe von Potenzfunktionen" definiert sind, kann man mit ihnen nahezu immer wie mit Polynomen rechnen, also als ob sie eine „*endliche* Summe von Potenzfunktionen" wären.

Aufgabe 7.38. Es sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$ und damit den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n\, q^n$.

Aufgabe 7.39. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Zeige in diesem Fall, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ zwar konvergiert, aber dass ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst wie in Satz 7.35

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

divergiert.