Grundlagen der Mathematik 1: Analysis

4. Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Wir haben uns nun das elementare Handwerkszeug für diese Vorlesung erarbeitet und beginnen jetzt mit dem Studium der eindimensionalen Analysis. Wer sich auch (bzw. zurzeit nur) für die lineare Algebra interessiert, kann ab diesem Zeitpunkt auch zusätzlich (bzw. ausschließlich) den Teil „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra" in den Kapiteln 13 bis 18 durcharbeiten.

Hier in diesem Kapitel wollen wir zunächst nach den gerade behandelten elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen noch ein paar weitere untersuchen, die vor allem in der Analysis nützlich sind. Unter anderem wird sich daraus am Ende dieses Kapitels auch eine vollständige Charakterisierung der reellen Zahlen ergeben.

4.A Potenzen in Körpern

Wir beginnen mit zwei weiteren oft vorkommenden Formeln zu Potenzen, die sich allein aus den Eigenschaften aus Abschnitt 3.A herleiten lassen und somit nicht nur in den reellen Zahlen, sondern sogar in beliebigen Körpern gelten. Mit der ersten – der sogenannten (endlichen) geometrischen Reihe – können wir den Wert einer Summe fortlaufender Potenzen eines Körperelements explizit berechnen.

Satz 4.1 (Endliche geometrische Reihe). *Es seien K ein Körper, $q \in K \backslash \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Beweis. Die Aussage ließe sich leicht mit Induktion über n zeigen. Der folgende sehr einfache alternative Beweis hilft jedoch auch dabei, sich die Formel zu merken: Multiplizieren wir die gesuchte Summe $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n$ mit $1-q$, so heben sich fast alle Terme weg und wir erhalten sofort das gewünschte Ergebnis: Es ist

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\cdots+q^n)\cdot(1-q) &= 1+q+q^2+\cdots+q^n \\ &\qquad\; -q-q^2-\cdots-q^n-q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1},\end{aligned}$$

und damit für $q \neq 1$ wie behauptet

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad \square$$

Beispiel 4.2. In $\mathbb{R}$ ist z. B.

$$1+2+4+8+16 = \sum_{k=0}^{4} 2^k \overset{4.1}{=} \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{-31}{-1} = 31.$$

Die zweite Formel, die wir hier behandeln wollen, ist die sogenannte binomische Formel, die eine Verallgemeinerung der aus der Schule bekannten Formel $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ auf höhere Exponenten darstellt. Dazu benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 4.3 (Fakultät und Binomialkoeffizienten)**.**

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n \quad \in \mathbb{N} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{-\textbf{Fakultät}“)},$$

wobei $0!$ gemäß Notation 3.9 (c) als 1 zu verstehen ist.

(b) Für $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ definiert man ferner die **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \text{(gesprochen „}n\text{ über }k\text{“)},$$

die so genannt werden, weil sie in der binomischen Formel in Satz 4.7 auftreten. Sie sind aufgrund der Definition zunächst positive rationale Zahlen; wir werden aber in Bemerkung 4.6 sehen, dass sie sogar natürliche Zahlen sind.

Bemerkung 4.4.

(a) Offensichtlich ist $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

(b) Man kann im definierenden Ausdruck für $\binom{n}{k}$ die Faktoren von 1 bis $n-k$ kürzen und erhält damit die alternative Darstellung der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{1 \cdot \dots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{(1 \cdot \dots \cdot k) \cdot (1 \cdot \dots \cdot (n-k))} = \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot k},$$

d. h. $\binom{n}{k}$ ist ein Bruch mit k Zahlen im Zähler und k Zahlen im Nenner, wobei man „im Zähler von n nach unten und im Nenner von 1 nach oben zählt“. So ist z. B. $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$ und $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Die wichtigste Identität zwischen den Binomialkoeffizienten ist die folgende:

Lemma 4.5. *Für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*

Beweis. Dies ergibt sich durch einfaches Nachrechnen mit der Darstellung aus Bemerkung 4.4 (b):

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot k} + \frac{(n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot (k-1)} \\
&= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdot \dots \cdot n + k \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot k} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n-k+2) \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot k} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.6 (Pascalsches Dreieck)**.** Man kann die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ wie folgt in einem dreieckigen Schema, dem sogenannten **Pascalschen Dreieck**, anordnen.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 \iddots & & & & & & \ddots \\
 & & \binom{n}{k-1} & + & \binom{n}{k} & & \\
 & & & \binom{n+1}{k} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & + & 3 & & 3 & & 1 & \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 \iddots & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Nach Bemerkung 4.4 (a) stehen auf den Schenkeln dieses Dreiecks nur Einsen, und nach Lemma 4.5 ergibt sich jede andere Zahl in diesem Diagramm als die Summe der beiden darüber stehenden. Insbesondere folgt daraus, dass alle Binomialkoeffizienten *natürliche* Zahlen sind – was aus der Definition aufgrund des Bruches ja nicht offensichtlich ist. Wir können sie damit für jeden Körper K gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente von K auffassen (was wir gleich in Satz 4.7 auch tun werden).

Mit dieser Vorarbeit können wir nun die sehr wichtige binomische Formel beweisen. Ihr Name kommt übrigens von der lateinischen Vorsilbe „bi“ für „zwei“: Ein Binom ist eine Summe, die aus zwei Termen besteht, und die binomische Formel berechnet die Potenzen eines solchen Binoms. Beachte, dass die Binomialkoeffizienten in dieser Formel gemäß Notation 3.9 (d) als Elemente des Körpers K aufgefasst werden.

Satz 4.7 (Binomische Formel). *Es seien K ein Körper, $x,y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beispiel 4.8. Für $n = 2$ ergibt Satz 4.7 wie erwartet die bekannte Formel

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^0 y^2 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^2 y^0 = y^2 + 2xy + x^2.$$

Beweis von Satz 4.7. Wir beweisen die Formel mit Induktion über n. Für $n = 0$ sind beide Seiten der Gleichung 1; die Aussage ist in diesem Fall also richtig. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Gleichung für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und folgern daraus zunächst

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&= (x+y)\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(durch Ausmultiplizieren)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} && \text{(Indexverschiebung } k \mapsto k-1 \text{ in der} \\
& && \text{ersten Summe, siehe Notation 3.9 (c)).}
\end{aligned}$$

Lösen wir hier nun aus der ersten Summe den Term für $k = n+1$ und aus der zweiten den für $k = 0$ heraus, so können wir diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] \cdot x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} + y^{n+1} && \text{(nach Lemma 4.5).}
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Summanden x^{n+1} und y^{n+1} sind hier aber genau diejenigen, die sich in der vorderen Summe ergeben, wenn man $k = n+1$ bzw. $k = 0$ setzt. Also können wir die Summe über k gleich über alle Werte von 0 bis $n+1$ laufen lassen und erhalten

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k},$$

also genau die zu zeigende Gleichung für die Potenz $n+1$. Die binomische Formel ist damit durch Induktion bewiesen. □

Bemerkung 4.9 (Kombinatorische Deutung der Binomialkoeffizienten)**.** Man kann sich die binomische Formel natürlich auch so entstanden denken, dass man den Ausdruck

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot \cdots \cdot (x+y)}_{n\text{-mal}}$$

nach dem Distributivgesetz ausmultipliziert. Im Fall $n = 3$ erhalten wir z. B. zunächst ohne Verwendung der Kommutativität der Multiplikation

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y) \\
&= (x+y)\cdot(xx+xy+yx+yy) \\
&= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy. && (*)
\end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir also eine Summe aus Produkten mit jeweils n Faktoren x oder y. Jede Möglichkeit, alle diese Faktoren separat als x oder y zu wählen, kommt dabei genau einmal vor. Fassen wir nun mit der Kommutativität der Multiplikation gleiche Terme zusammen, so erhalten wir den Term $x^k y^{n-k}$ also genau so oft, wie wir Möglichkeiten haben, aus den n Faktoren die k auszuwählen, die gleich x sein sollen. In $(*)$ oben bekommen wir z. B. den Term xy^2 dreimal, nämlich aus xyy, yxy und yyx. Nach der binomischen Formel ist der Vorfaktor von $x^k y^{n-k}$ in $(x+y)^n$ aber gerade $\binom{n}{k}$. Daher ist dieser Binomialkoeffizient genau die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Objekten (hier: Faktoren) k auszuwählen (hier: diejenigen, bei denen wir x gewählt haben). Man kann sich die binomische Formel also als algebraische Formulierung dieser kombinatorischen Aussage vorstellen.

Aufgabe 4.10.

(a) Beweise für alle $k,n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$ die Gleichung

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(b) Zeige mit Induktion über n, dass die Gleichung

$$x_1 + \cdots + x_n = d$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $d \in \mathbb{N}$ genau $\binom{n+d-1}{n-1}$ Lösungen $(x_1,\dots,x_n)$ in *natürlichen* Zahlen $x_1,\dots,x_n$ besitzt.

Aufgabe 4.11. Für alle $n,p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $s_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p$ die Summe der p-ten Potenzen aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.

(a) Beweise für alle $n,p \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\binom{p+1}{0} s_0(n) + \binom{p+1}{1} s_1(n) + \cdots + \binom{p+1}{p} s_p(n) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Zeige mit Hilfe von (a), dass s_2 ein Polynom in n ist, und berechne dieses Polynom explizit. Ist s_p für alle $p \in \mathbb{N}$ ein Polynom in n?

Aufgabe 4.12. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir das Polynom

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1.$$

Man zeige:

(a) Ist n ungerade, so hat f genau eine Nullstelle. Was ist ihre Vielfachheit?

(b) Ist n gerade, so hat f keine Nullstelle.

4.B Geordnete Körper

Wir haben bisher von den reellen Zahlen nur die Körpereigenschaften, also die Eigenschaften der vier Grundrechenarten ausgenutzt – und dabei z. B. in Beispiel 3.6 (b) gesehen, dass es außer den reellen Zahlen auch noch ganz andere (und in der Tat sogar sehr viele) Körper gibt. Wir müssen also noch weitere Eigenschaften auflisten, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Dies wollen wir im Rest dieses Kapitels tun.

Eine Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir bisher völlig vernachlässigt haben, ist, dass man sie *ordnen* kann, also dass man zwei Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Die Eigenschaften dieser Ordnungsrelation werden im Begriff des sogenannten *geordneten Körpers* formalisiert.

Definition 4.13 (Geordnete Körper)**.** Ein Körper K heißt **geordneter** oder **angeordneter Körper**, wenn in ihm eine Menge $P \subset K$ (die „Menge der positiven Zahlen") gegeben ist, so dass die folgenden drei Eigenschaften gelten:

(a) Für alle $x \in K$ gilt *genau* eine der drei Eigenschaften $x = 0$, $x \in P$ oder $-x \in P$. (Im zweiten Fall nennt man x eine **positive** Zahl, im dritten eine **negative** Zahl.)

(b) Für alle $x, y \in P$ ist $x + y \in P$ („die Summe zweier positiver Zahlen ist positiv").

(c) Für alle $x, y \in P$ ist $xy \in P$ („das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv").

In diesem Fall schreibt man $x < y$ oder $y > x$ falls $y - x \in P$, und $x \leq y$ oder $y \geq x$ falls $y - x \in P$ oder $y = x$. (Insbesondere ist also $x > 0$ genau dann, wenn $x \in P$, und $x < 0$ genau dann, wenn $-x \in P$; außerdem gilt nach (a) für $x, y \in K$ stets genau eine der Aussagen $x = y$, $x < y$ oder $y < x$.)

Beispiel 4.14.

(a) $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper (was wir hier wiederum axiomatisch voraussetzen wollen). Nennt man in der Teilmenge $\mathbb{Q}$ von $\mathbb{R}$ genau die Zahlen positiv, die es auch in $\mathbb{R}$ sind, so ist damit auch $\mathbb{Q}$ ein geordneter Körper.

(b) Der Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden: Das Element $1 = u$ ist nicht gleich 0, also müsste nach Definition 4.13 (a) genau eine der beiden Eigenschaften $1 \in P$ und $-1 \in P$ gelten. Dies ist aber unmöglich, da wegen $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $-1 = 1$ gilt.

Bemerkung 4.15 (Partielle und totale Ordnungen)**.** Ist K ein geordneter Körper, so ist $\leq$ wie in Definition 4.13 natürlich eine Relation auf K im Sinne von Definition 2.1. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in K$:

(a) **Reflexivität**: Es gilt $x \leq x$.

(b) **Antisymmetrie**: Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so folgt $x = y$.

(c) **Transitivität**: Gilt $x \leq y$ und $y \leq z$, so folgt auch $x \leq z$.

(d) **Totalität**: Es gilt (mindestens) eine der Aussagen $x \leq y$ und $y \leq x$. (Mit anderen Worten: „Zwei beliebige Elemente von K sind stets miteinander vergleichbar.")

In der Tat folgt (a) unmittelbar aus Definition 4.13. Da $x \leq y$ nach Definition äquivalent zu $y - x \in P$ oder $y - x = 0$ ist, und $y \leq x$ zu $-(y - x) \in P$ oder $y - x = 0$, ergeben sich (b) und (d) außerdem aus Definition 4.13 (a). Die Aussage (c) schließlich ist trivial falls $x = y$ oder $y = z$; andernfalls gilt $y - x \in P$ oder $z - y \in P$, und damit $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, also $x < z$, nach Definition 4.13 (b).

Auf einer beliebigen Menge K (die also nicht notwendig ein Körper ist) nennt man eine Relation $\leq$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) eine **partielle Ordnung**. Gilt zusätzlich noch (d), so heißt $\leq$ eine **(totale) Ordnung** auf K. Jeder geordnete Körper K liefert also eine totale Ordnung auf K.

Das Standardbeispiel für eine partielle Ordnung auf einer Menge ist die Teilmengenrelation auf der Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ einer beliebigen Menge M: Sind $A, B, C \in \mathscr{P}(M)$ Teilmengen von M, so gilt natürlich $A \subset A$; aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt $A = B$; und aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt $A \subset C$. Diese partielle Ordnung ist aber in der Regel nicht total: Für $M = \mathbb{N}$ sind die Teilmengen $A = \{0\}$ und $B = \{1\}$ nicht vergleichbar, denn es gilt weder $A \subset B$ noch $B \subset A$.

Wie schon bei den Körpern wollen wir nun auch hier für einen geordneten Körper kurz die wichtigsten Eigenschaften ableiten, die aus der Definition folgen (und die euch für die reellen Zahlen sicher bekannt sind). Wir werden sie im Folgenden verwenden, ohne jedes Mal darauf hinzuweisen.

Lemma 4.16 (Eigenschaften geordneter Körper)**.** *Für alle x, y, z in einem geordneten Körper K gilt:*

(a) *Ist $x < y$, so folgt $x + z < y + z$.*

(b) *Ist $x < y$ und $z > 0$, so gilt auch $xz < yz$. Ist dagegen $x < y$ und $z < 0$, so folgt $xz > yz$.*

(Ungleichungen drehen sich also bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl um.)

(c) *Gilt $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$. Insbesondere ist also $1 > 0$.*

(d) *Wenn $0 < x < y$, dann folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$.*

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für die nicht-strikten Ungleichungen $\leq$ bzw. $\geq$.

Beweis.

(a) Ist $x < y$, also $y - x \in P$, so ist auch $(y+z) - (x+z) = y - x \in P$, also $x + z < y + z$.

(b) Gilt wieder $y - x \in P$ und $z \in P$, so folgt aus Definition 4.13 (c) auch $(y-x)z = yz - xz \in P$, also $xz < yz$. Ist hingegen $z < 0$, also $-z \in P$, so gilt diesmal $(y-x)(-z) = xz - yz \in P$, also $yz < xz$.

(c) Ist $x \in P$, so ist natürlich auch $x^2 \in P$ nach Definition 4.13 (c). Ist $-x \in P$, so folgt genauso $x^2 = (-x)^2 \in P$. Also ist für $x \neq 0$ in jedem Fall $x^2 > 0$. Insbesondere ist damit $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

(d) Wegen $x > 0$ folgt aus (c) und Definition 4.13 (c) zunächst $x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 \in P$, also $x^{-1} > 0$. Genauso ergibt sich $y^{-1} > 0$. Ist nun $x < y$, so folgt aus (b) durch Multiplikation mit der positiven Zahl $x^{-1}y^{-1}$ die Ungleichung $xx^{-1}y^{-1} < yx^{-1}y^{-1}$, also $y^{-1} < x^{-1}$, was zu zeigen war. □ 06

Notation 4.17 (Intervalle und Betrag)**.** Die folgenden Notationen verwendet man häufig in einem geordneten Körper K.

(a) Sind $a, b \in K$ mit $a \leq b$, so definiert man die folgenden Teilmengen von K:

- $[a,b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ (**abgeschlossene** bzw. **kompakte Intervalle**);
- $(a,b) := \{x \in K : a < x < b\}$ (**offene Intervalle**);
- $[a,b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$ (**halboffene Intervalle**);
- $[a,\infty) := K_{\geq a} = \{x \in K : x \geq a\}$ (**uneigentliche Intervalle**);

und analog natürlich $(a,b]$, (a,∞), $(-\infty,b]$ und $(-\infty,b)$. Wenn wir derartige Intervalle im Fall $K = \mathbb{R}$ graphisch darstellen, deuten wir wie im Bild unten meistens durch Rundungen an den Intervallgrenzen an, ob die Randpunkte mit dazugehören sollen oder nicht.

In der Literatur sind statt der runden Klammern oft auch „falsch herum geöffnete" eckige Klammern üblich, also z. B. $[a,b[$ statt $[a,b)$.

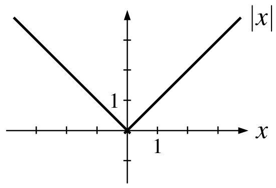
(b) Für $x \in K$ definieren wir den **Betrag** von x als

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also immer $|x| \geq 0$. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sieht die Betragsfunktion natürlich wie im folgenden Bild rechts aus.

(a,b)

$[a,\infty)$



Die wichtigsten beiden Eigenschaften der Betragsfunktion sind ihre „Verträglichkeit" mit Addition und Multiplikation:

Lemma 4.18 (Eigenschaften der Betragsfunktion)**.** *Für alle x, y in einem geordneten Körper K gilt:*

(a) $|xy| = |x| \cdot |y|$. *Insbesondere ergibt sich daraus für $y = -1$, dass $|-x| = |x|$.*

(b) $x \leq |x|$.

(c) $|x+y| \leq |x| + |y|$. *Diese Ungleichung bezeichnet man als* ***Dreiecksungleichung*** *– wir werden in Bemerkung 6.10 (a) sehen, warum.*

Beweis.

(a) Wir machen eine Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von x und y. Ist z. B. $x \geq 0$ und $y \leq 0$, so ist $xy \leq 0$ und damit nach Definition des Betrages $|x| = x$, $|y| = -y$ und $|xy| = -xy$.

Zusammensetzen dieser Gleichungen ergibt die Behauptung $|xy| = -xy = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Die anderen Fälle der möglichen Vorzeichenverteilungen beweist man genauso.

(b) Für $x \leq 0$ ist $x \leq 0 \leq |x|$; für $x \geq 0$ ist $x = |x|$.

(c) Nach (b), angewendet auf x und y, gilt (mit Lemma 4.16 (a))

$$x + y \leq |x| + |y|. \tag{1}$$

Wenden wir (b) hingegen auf $-x$ und $-y$ an, so folgt auch

$$-x - y \leq |-x| + |-y| \overset{(a)}{=} |x| + |y|. \tag{2}$$

Aber $|x+y|$ ist in jedem Fall eine der beiden Zahlen $x+y$ oder $-x-y$. Damit folgt die Behauptung $|x+y| \leq |x| + |y|$ aus (1) und (2). □

Bemerkung 4.19 (Dreiecksungleichung nach oben und unten)**.** Die Dreiecksungleichung aus Lemma 4.18 (c) schätzt den Betrag $|x+y|$ einer Summe nach oben ab. Offensichtlich gilt im Allgemeinen keine Gleichheit, wie das Beispiel $x = 1$, $y = -1$ zeigt: Hier ist $|x+y| = 0 < 2 = |x| + |y|$.

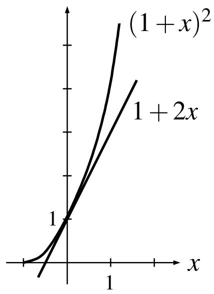
Eine Abschätzung nach unten kann man erhalten, indem man Lemma 4.18 (c) auf die Zahlen $x+y$ und $-y$ anwendet: Man erhält dann nämlich $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$ und damit $|x+y| \geq |x| - |y|$. Insgesamt haben wir also für alle $x, y \in K$

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Eine weitere Anwendung der Eigenschaften eines geordneten Körpers ist die folgende Ungleichung, die oftmals dann nützlich ist, wenn die Größe von Potenzen x^n mit der von Produkten $n \cdot x$ verglichen werden soll.

Satz 4.20 (**Bernoullische Ungleichung**)**.** *Es seien K ein geordneter Körper, $x \in K$ mit $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über n. Das Bild rechts unten veranschaulicht die Ungleichung im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$.



Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist klar: dann sind beide Seiten gleich 1, die Ungleichung ist also erfüllt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x \geq -1$ und ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Lemma 4.16 (b) können wir diese Ungleichung mit der nach Voraussetzung nicht-negativen Zahl $1+x$ multiplizieren und erhalten

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Nach Lemma 4.16 (c) ist nun $nx^2 \geq 0$ und damit $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, was zu zeigen war. □

Aufgabe 4.21. Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Ungleichungen?

(a) $\dfrac{2xy}{x+y} \leq \dfrac{x+y}{2}$ (b) $\dfrac{4^n}{2n+1} < \dbinom{2n}{n} < 4^n$ (c) $n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

4.C Supremum und Infimum

Wie bereits angekündigt wollen wir in diesem Abschnitt nun endlich eine eindeutige axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen angeben. Bisher haben wir nur gesehen, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist. Aber auch $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper, und daher müssen wir noch untersuchen, wie sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Anschaulich würden wir dies wohl so formulieren, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen „Löcher“ auf der Zahlengeraden hat, also dass es Punkte wie z. B. $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden gibt, die keiner rationalen Zahl entsprechen (siehe Lemma 4.36). Aber wie formuliert man so etwas exakt?

Um dies zu sehen, müssen wir genauer untersuchen, wann Teilmengen eines geordneten Körpers K größte bzw. kleinste Elemente haben. Dazu können wir natürlich zunächst auf die offensichtliche Art das Maximum und Minimum zweier Elemente von K definieren.

Definition 4.22 (Maximum und Minimum endlich vieler Zahlen). Für zwei Elemente x und y eines geordneten Körpers K definieren wir das **Maximum** und **Minimum** durch

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{falls } y \geq x \end{cases} \quad \text{und} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y, \\ y & \text{falls } y \leq x. \end{cases}$$

Analog kann man auch das Maximum und Minimum von mehr als zwei Zahlen definieren, *sofern es nur endlich viele sind*. Betrachten wir dagegen eine (unendliche) Teilmenge $M \subset K$, so können wir in der Regel nicht mehr erwarten, dass M ein kleinstes bzw. größtes Element hat, allein schon weil die Menge dann in folgendem Sinne unbeschränkt sein kann:

Definition 4.23 (Beschränkte Mengen). Es sei M eine Teilmenge eines geordneten Körpers K.

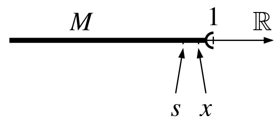
(a) Ein Element $s \in K$ heißt **obere Schranke** für M, wenn $x \leq s$ für alle $x \in M$. Existiert eine solche obere Schranke für M, so nennt man M **nach oben beschränkt**. Analog definiert man den Begriff einer **unteren Schranke** bzw. einer **nach unten beschränkten** Menge.

(b) Die Menge M heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, oder – äquivalent dazu – wenn die Menge ihrer Beträge beschränkt ist, also wenn es ein $s \in K$ gibt mit $|x| \leq s$ für alle $x \in M$.

Beispiel 4.24. Es sei $M = \mathbb{R}_{<1}$ im geordneten Körper $\mathbb{R}$.

(a) Die Menge M ist nach oben (aber nicht nach unten) beschränkt, denn $s = 1$ ist eine obere Schranke für M. Genauso ist auch $s = 2$ eine obere Schranke für M, auch wenn man anschaulich vielleicht sagen würde, dass diese Schranke „nicht so gut" ist, weil $x \leq 2$ für alle $x \in M$ eine schwächere Aussage ist als $x \leq 1$ für alle $x \in M$.

(b) Ist $s \in M$, also $s < 1$, so gilt für den Mittelpunkt $x := \frac{s+1}{2}$ zwischen s und 1 wie im Bild rechts natürlich



$$x = \frac{s+1}{2} > \frac{s+s}{2} = s \quad \text{und} \quad x = \frac{s+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1.$$

Hieraus ergeben sich sofort zwei einfache Folgerungen:

- Es gibt keine größte Zahl in M (denn zu $s \in M$ liegt die größere Zahl x wegen $x < 1$ ebenfalls noch in M).
- Die Menge M ist aber nach (a) nach oben beschränkt, und die kleinste mögliche obere Schranke für M ist 1 (denn $s < 1$ kann keine obere Schranke mehr sein, da $x > s$ ebenfalls noch in M liegt).

Die Zahl 1 kann damit als „Obergrenze der Zahlen in M" angesehen werden, auch wenn sie kein Element von M und daher keine größte Zahl in M ist. Dieses Konzept wollen wir jetzt exakt definieren.

Definition 4.25 (Supremum und Infimum). Es sei M eine Teilmenge eines geordneten Körpers K.

(a) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Supremum** von M, wenn s eine „kleinste obere Schranke für M" ist, d. h. wenn gilt:

- s ist eine obere Schranke für M; und
- für jede obere Schranke s' für M gilt $s \leq s'$.

(b) Eine Zahl $s \in K$ heißt ein **Maximum** von M, wenn s eine „obere Schranke für M in M" ist, d. h. wenn gilt:

- s ist eine obere Schranke für M; und
- $s \in M$.

Analog heißt $s \in K$ ein **Infimum** von M, wenn s eine größte untere Schranke für M ist, und ein **Minimum**, wenn s eine untere Schranke für M in M ist.

Bemerkung und Notation 4.26 ($\sup M$, $\max M$, $\inf M$, $\min M$)**.**

(a) Jedes Maximum s einer Menge M ist auch ein Supremum von M: Ist dann nämlich $s' \in K$ eine weitere obere Schranke, so folgt wegen $s \in M$ natürlich sofort $s \leq s'$.

(b) Wenn die Menge M ein Supremum besitzt, dann ist es eindeutig bestimmt: Sind nämlich s_1 und s_2 zwei kleinste obere Schranken, so folgt nach Definition 4.25 (a) sofort $s_1 \leq s_2$ (weil s_1 eine kleinste obere Schranke und s_2 auch eine obere Schranke ist) und $s_2 \leq s_1$ (weil s_2 Supremum und s_1 auch eine obere Schranke ist), also $s_1 = s_2$. Nach (a) ist damit auch ein Maximum von M eindeutig bestimmt, falls es existiert.

Wenn ein Supremum oder Maximum von M existiert, können wir also von *dem* Supremum bzw. *dem* Maximum von M reden. Wir bezeichnen es dann mit $\sup M$ bzw. $\max M$.

(c) Analog sind natürlich auch Infimum und Minimum von M eindeutig bestimmt, sofern sie existieren; wir bezeichnen sie dann mit $\inf M$ bzw. $\min M$.

Beispiel 4.27.

(a) Die Menge $M = \mathbb{R}_{\leq 1}$ hat offensichtlich das Maximum 1. Nach Bemerkung 4.26 (a) ist 1 damit auch das Supremum von M, d. h. es ist $\sup M = \max M = 1$.

(b) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{<1}$ hat nach Beispiel 4.24 (b) kein Maximum, aber es gilt $\sup M = 1$.

(c) Das uneigentliche Intervall $M = \mathbb{R}_{>1}$ besitzt kein Supremum (und damit auch kein Maximum), da M nach oben unbeschränkt ist, also nicht einmal irgendeine obere Schranke für M existiert – insbesondere also keine kleinste.

(d) Auch die leere Menge hat kein Supremum, weil für sie jede reelle Zahl eine obere Schranke ist und damit keine kleinste obere Schranke existiert.

Aufgabe 4.28. Es seien A und B zwei Teilmengen eines geordneten Körpers K, die ein Supremum $\sup A$ bzw. $\sup B$ besitzen. Setzen wir $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$ und $-A := \{-x : x \in A\}$, so zeige man, dass auch die folgenden Suprema und Infima existieren und die behaupteten Werte haben:

(a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) $\inf(-A) = -\sup A$.

(c) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

Unsere bisher betrachteten Beispiele von Mengen ohne Supremum in Beispiel 4.27 (c) und (d) waren letztlich trivial – also Mengen, die überhaupt keine obere Schranke besitzen, und die leere Menge. Ist es auch möglich, dass eine Menge (die natürlich nicht unbedingt ein Intervall sein muss) zwar nicht leer und nach oben beschränkt ist, aber trotzdem keine *kleinste* obere Schranke hat? In der Tat ist dies in $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ nicht möglich, und wie wir sehen werden, ist genau dies der wesentliche Unterschied zwischen diesen beiden Körpern. Wir definieren daher zunächst:

Definition 4.29 (Supremumsaxiom)**.** Wir sagen, dass ein geordneter Körper das **Supremumsaxiom** erfüllt, wenn in ihm jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. (Natürlich besitzt dann nach Aufgabe 4.28 (b) auch jede nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum.)

Die reellen Zahlen erfüllen also dieses Supremumsaxiom – das werden wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen, und das ist nun auch endlich die letzte Eigenschaft der reellen Zahlen, die wir benötigen. Wenn wir dieses und das vorangegangene Kapitel zusammenfassen, setzen wir nun also insgesamt über die reellen Zahlen voraus:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist ein geordneter Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt.}}$$

Wie schon in Notation 1.14 gesagt, kann man die Existenz der reellen Zahlen auch aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre herleiten – und dann ist es natürlich ein beweisbarer Satz, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt. Man kann sogar noch mehr zeigen, nämlich dass diese Eigenschaften die reellen Zahlen auch vollständig charakterisieren: $\mathbb{R}$ ist in der Tat der *einzige* geordnete Körper, der das Supremumsaxiom erfüllt. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch sehr schwierig und soll hier nicht gegeben werden, zumal wir diese Aussage auch nicht benötigen werden. Wir werden lediglich in Bemerkung 4.37 noch sehen, dass $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom in der Tat nicht erfüllt.

Für uns bedeutet diese Tatsache letztlich nur, dass wir ab jetzt alles, was wir mit den reellen Zahlen tun möchten, ausschließlich auf den Axiomen eines geordneten Körpers und dem Supremumsaxiom aufbauen können und werden.

Wir wollen nun ein paar erste elementare Folgerungen aus dem Supremumsaxiom ziehen. Seine wahre Stärke wird dieses Axiom jedoch erst im nächsten Kapitel bei der Untersuchung von Grenzwerten von Folgen zeigen.

Satz 4.30 ($\mathbb{R}$ ist **archimedisch geordnet**). *Die Teilmenge $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben unbeschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre nach oben beschränkt. Dann würde nach dem Supremumsaxiom $s := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existieren. Da s die *kleinste* obere Schranke ist, ist $s-1$ keine obere Schranke; es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s-1$. Dann ist aber $n+1 \in \mathbb{N}$ mit $n+1 > s$, im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist. □

Bemerkung 4.31.

(a) Eine einfache, aber oft verwendete Folgerung aus Satz 4.30 ist, dass es zu jeder positiven Zahl $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt mit $\frac{1}{n} < x$: Da $\mathbb{N}$ nach oben unbeschränkt ist, ist insbesondere $\frac{1}{x}$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$, und damit nach Lemma 4.16 (d) mit $\frac{1}{n} < x$.

(b) Satz 4.30 mag zwar selbstverständlich erscheinen – man kann allerdings in der Tat geordnete Körper konstruieren, in denen diese Aussage falsch ist, in denen es also „unendlich große" Elemente gibt, die größer sind als jede Zahl, die man durch fortlaufende Addition der 1 erreichen kann [E, Kapitel 11].

Aufgabe 4.32. Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Menge

$$M = \left\{ \frac{m+n}{mn} : m,n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \quad \subset \mathbb{R}.$$

07

Folgerung 4.33. *Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Maximum. Entsprechend hat jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein Minimum.*

Insbesondere hat also jede nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein Minimum. (Man sagt dafür auch: $\mathbb{N}$ ist ***wohlgeordnet****.)*

Beweis. Es sei $M \subset \mathbb{Z}$ nicht-leer und nach oben beschränkt, mit oberer Schranke s. Nach Satz 4.30 gibt es weiterhin eine natürliche Zahl $b > s$, die dann natürlich auch eine obere Schranke für M ist.

Ist $a \in M$ nun ein beliebiges Element, so ist $M_{\geq a} = M \cap \{a, a+1, \dots, b\}$ eine nicht-leere endliche Menge, die demzufolge natürlich ein Maximum besitzt. Alle anderen Zahlen von M sind aber noch kleiner als a, so dass dieses Maximum also auch das Maximum von M ist. □

Bemerkung 4.34 (*Gaußklammer*). Nach Folgerung 4.33 kann man für alle $x \in \mathbb{R}$ die Zahl

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

definieren, da die Menge aller $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq x$ nach Satz 4.30 nicht leer ist (es gibt ja ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq -x$, wir können dann $k = -n$ setzen), und natürlich durch x nach oben beschränkt. Als die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x kann man sie sich als „Abrundung" von x vorstellen; es ist also z. B.

$$\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \quad \text{und} \quad \left\lfloor -\frac{7}{2} \right\rfloor = -4.$$

Folgerung 4.35 ($\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$)**.** *Jedes nicht-leere offene Intervall (a,b) in $\mathbb{R}$ enthält eine rationale Zahl.*

Beweis. Nach Bemerkung 4.31 (a) gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $\frac{1}{n} < b-a$. Weiterhin ist die Menge

$$M := \left\{ k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{n} > a \right\} = \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$$

nach Satz 4.30 nicht-leer und durch na nach unten beschränkt, und besitzt damit nach Folgerung 4.33 ein Minimum k. Für dieses Minimum gilt also:

(a) $k \in M$ und damit $\frac{k}{n} > a$;

(b) $k-1 \notin M$ und damit $\frac{k-1}{n} \leq a$, d. h.

$$\frac{k}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b.$$

Also ist $\frac{k}{n}$ eine rationale Zahl im offenen Intervall (a,b). $\square$

Als eine Konsequenz aus dieser Folgerung wollen wir wie bereits angekündigt nun sehen, dass die rationalen Zahlen das Supremumsaxiom nicht erfüllen, dass hier also der entscheidende Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ liegt. Wir untersuchen dazu zunächst, ob es eine Quadratwurzel aus 2 gibt, also eine positive Zahl x mit $x^2 = 2$ (die wir dann als $\sqrt{2}$ schreiben).

Lemma 4.36 (Irrationalität von $\sqrt{2}$)**.** *Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Wir können x als gekürzten Bruch $x = \frac{p}{q}$ (mit $p,q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$) schreiben und erhalten

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{also} \quad p^2 = 2q^2. \qquad (*)$$

Also muss p^2 und damit auch p selbst eine gerade Zahl, d. h. durch 2 teilbar sein. Wir können daher $p = 2r$ für eine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$ setzen. Einsetzen in $(*)$ liefert

$$(2r)^2 = 2q^2, \quad \text{also} \quad q^2 = 2r^2.$$

Aber dann muss auch q^2 und damit q eine gerade Zahl sein – was ein Widerspruch dazu ist, dass die Darstellung von x als Bruch $\frac{p}{q}$ als gekürzt vorausgesetzt worden ist. $\square$

Wie ihr aus der Schule wisst, gibt es aber in den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine Wurzel aus 2. Da unsere Axiome, dass $\mathbb{R}$ ein geordneter Körper ist, der das Supremumsaxiom erfüllt, die reellen Zahlen ja vollständig beschreiben, könnten wir die Existenz dieser Wurzel jetzt sogar aus unseren Axiomen beweisen: Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ ist offensichtlich eine nicht-leere, nach oben beschränkte Menge, die demzufolge ein Supremum s besitzt – und für dieses Supremum kann man zeigen, dass $s^2 = 2$ gilt, also dass s eine Wurzel aus 2 ist. Dieser Beweis ist jedoch recht technisch, und da wir in Folgerung 5.30 ohnehin die Existenz reeller Quadratwurzeln aus beliebigen nicht-negativen Zahlen aus unseren Axiomen beweisen werden, wollen wir hier darauf verzichten und für die folgende Bemerkung der Einfachheit halber annehmen, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ existiert, zumal wir diese Bemerkung im Folgenden nicht verwenden werden.

Bemerkung 4.37 ($\mathbb{Q}$ erfüllt das Supremumsaxiom nicht)**.** Es sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. Diese Menge ist offensichtlich nicht leer (denn $0 \in M$) und nach oben beschränkt (z. B. mit oberer Schranke 2). Würde $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom erfüllen, müsste sie also ein Supremum $s := \sup M \in \mathbb{Q}$ besitzen. Allerdings ist für dieses Supremum sowohl $s < \sqrt{2}$ als auch $s > \sqrt{2}$ ausgeschlossen:

- $s < \sqrt{2}$ kann keine obere Schranke für M sein, denn nach Folgerung 4.35 gäbe es dann eine rationale Zahl $x \in (s, \sqrt{2})$, also mit $x \in M$, aber $x > s$.
- $s > \sqrt{2}$ kann keine *kleinste* obere Schranke für M sein, denn wieder nach Folgerung 4.35 gäbe es nun eine rationale Zahl $s' \in (\sqrt{2}, s)$, die kleiner ist als s, aber immer noch eine obere Schranke für M (da aus $x \in M$, also $x < \sqrt{2}$, ja sofort auch $x < s'$ folgt).

Also bleibt nur die Möglichkeit $s = \sqrt{2}$, was aber nach Lemma 4.36 ein Widerspruch zu $s \in \mathbb{Q}$ ist. Damit erfüllt $\mathbb{Q}$ das Supremumsaxiom nicht. Anschaulich hat M zwar ein Supremum in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{2}$, aber genau an dieser Stelle hat $\mathbb{Q}$ ein „Loch" auf der Zahlengeraden – und daher existiert kein Supremum von M in $\mathbb{Q}$.

Bemerkung 4.38 (Uneigentliche Suprema)**.** Nach dem Supremumsaxiom existiert das Supremum $\sup M$ für jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$. Oft ist es praktisch, diese Notation wie folgt auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu erweitern:

(a) Ist $M = \emptyset$, so schreiben wir formal $\sup M = -\infty$. (Anschaulich: Jede reelle Zahl ist eine obere Schranke der leeren Menge, daher ist „die kleinste" davon $-\infty$.)

(b) Ist $M \neq \emptyset$ nach oben unbeschränkt, so schreiben wir formal $\sup M = \infty$. (Anschaulich: Ist M nach oben unbeschränkt, so ist keine reelle Zahl eine obere Schranke für M, die einzige und damit kleinste „obere Schranke" für M ist also ∞.)

Man spricht in diesem Fall von *uneigentlichen Suprema*. Analog setzt man natürlich $\inf \emptyset = \infty$ und $\inf M = -\infty$ für jede nach unten unbeschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$.

Mit „wir schreiben formal" ist dabei oben gemeint, dass $-\infty$ und ∞ natürlich keine Zahlen sind, mit denen man uneingeschränkt wie gewohnt rechnen kann. Manche Rechenoperationen wie z. B. $\infty + x := \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ lassen sich zwar noch intuitiv sinnvoll definieren (siehe Bemerkung 5.42), aber andere wie z. B. $\infty - \infty$ nicht. Mit anderen Worten ist $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ kein Körper. Trotzdem hat die Einführung uneigentlicher Suprema und Infima den Vorteil, dass $\sup M$ und $\inf M$ für *jede* Teilmenge M von $\mathbb{R}$ definiert sind, und Aussagen darüber oft auch in den neuen Fällen gültig bleiben. So gelten z. B. die Aussagen aus Aufgabe 4.28 sogar für beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$ (sofern in (c) rechts nicht der unbestimmte Ausdruck $\infty - \infty$ auftritt) – allerdings brauchen wir dafür natürlich einen neuen Beweis, da ja schon die Definition eines uneigentlichen Supremums eine andere als üblich ist.