

17. Komplemente und Quotientenräume

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der folgenden Frage beschäftigen, die in der linearen Algebra oft auftritt: Gegeben sei ein Unterraum U eines Vektorraums V . Können wir dann jeden Vektor $x \in V$ in einem gewissen Sinne eindeutig in einen „Anteil in U “ und einen „Restteil“ zerlegen?

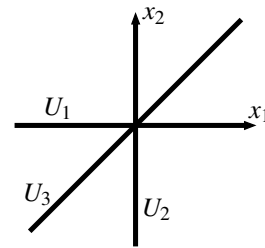
Diese Frage ist so sicher erst einmal nicht mathematisch exakt formuliert, und in der Tat werden wir in den beiden Abschnitten dieses Kapitels zwei ganz verschiedene Arten sehen, wie man sie interpretieren kann. Das folgende Beispiel zeigt aber schon einmal in einem sehr einfachen Fall, was damit gemeint sein kann: Sind $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \text{Lin}(e_1)$ die horizontale Koordinatenachse, so können wir natürlich jeden Vektor $x \in V$ eindeutig als $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ mit seinen Koordinaten x_1 und x_2 bezüglich der Standardbasis schreiben. Wir haben x damit also geschrieben als Summe von einem Anteil $x_1 e_1$ in U und einem Rest $x_2 e_2$, der in $\text{Lin}(e_2)$ liegt. Diese recht naheliegende Idee, einen Vektor eindeutig in eine Summe zu zerlegen, bei der jeder Summand in einem gegebenen Unterraum liegt, wollen wir jetzt im ersten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen.

17.A Direkte Summen und Komplemente

Wir betrachten noch einmal die Konstruktion der Summe $U_1 + \dots + U_n$ von Unterräumen U_1, \dots, U_n eines Vektorraums V wie in Lemma 13.13:

Bemerkung 17.1 (Eindeutigkeit der Summendarstellung). Jeder Vektor in einer Summe $U_1 + \dots + U_n$ von Unterräumen eines Vektorraums V lässt sich nach Definition als $x_1 + \dots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ schreiben. Allerdings ist diese Darstellung im Allgemeinen natürlich nicht eindeutig: Betrachten wir z. B. wie im Bild rechts die drei Ursprungsgeraden

$$U_1 = \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \text{Lin} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



in \mathbb{R}^2 , so hat der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U_3} \in U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$$

zwei verschiedene Darstellungen dieser Art. Ist die Darstellung jedoch immer eindeutig, so geben wir dieser Situation einen besonderen Namen:

Definition 17.2 (Direkte Summe von Unterräumen). Es seien U_1, \dots, U_n Untervektorräume eines K -Vektorraums V und $U = U_1 + \dots + U_n$. Hat jedes $x \in U$ eine *eindeutige* Darstellung der Form $x = x_1 + \dots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so nennt man die Summe **direkt**. Möchte man dies auch in der Notation andeuten, so schreibt man dafür $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

Die Summe in Bemerkung 17.1 ist also nicht direkt – was natürlich einfach daran liegt, dass die drei aufspannenden Vektoren von U_1 , U_2 und U_3 linear abhängig sind. In der Tat kann man sich direkte Summen als eine Verallgemeinerung des Konzepts der linearen Unabhängigkeit auf Unterräume vorstellen.

Lemma 17.3 (Alternatives Kriterium für direkte Summen). Die Summe $U_1 + \dots + U_n$ von Unterräumen U_1, \dots, U_n eines K -Vektorraums V ist genau dann direkt, wenn die Abbildung

$$f: U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow U_1 + \dots + U_n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$$

ein Isomorphismus ist. Ist V endlich-dimensional, so gilt in diesem Fall also die **Dimensionsformel für direkte Summen**

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n).$$

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildung f in jedem Fall linear ist; außerdem ist f nach Definition der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ stets surjektiv. Injektiv ist f genau dann, wenn für alle $x_i, y_i \in U_i$ aus $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$ bereits $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$, also $x_i = y_i$ für alle i folgt. Dies bedeutet nach Definition 17.2 aber genau, dass die Summe direkt ist.

Ist V darüber hinaus endlich-dimensional, so gilt dies nach Lemma 14.23 (a) auch für die Unterräume U_1, \dots, U_n . Da endlich erzeugte isomorphe Vektorräume nach Lemma 16.17 (c) die gleiche Dimension haben, ist also

$$\dim U_1 + \cdots + \dim U_n \stackrel{16.21}{=} \dim(U_1 \times \cdots \times U_n) = \dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n). \quad \square$$

Im Fall von nur zwei Unterräumen kann man besonders einfach feststellen, ob ihre Summe direkt ist:

Lemma 17.4. Die Summe $U_1 + U_2$ von zwei Unterräumen U_1 und U_2 eines K -Vektorraums V ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Beweis. Nach Lemma 17.3 ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn die Abbildung

$$f: U_1 \times U_2 \rightarrow U_1 + U_2, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

ein Isomorphismus ist. Wir hatten im Beweis dieses Lemmas aber auch schon gesehen, dass f stets linear und surjektiv ist. Also ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn f injektiv ist, d. h. nach Lemma 16.9 genau dann, wenn $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$ gilt. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, x_1 + x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1, -x_1 \in U_2\} \\ &= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1 \cap U_2\}, \end{aligned}$$

und damit ist wie behauptet genau dann $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. \square

Beispiel 17.5.

- (a) Die Summe $U_1 + U_2$ der x_1 -Achse und der x_2 -Achse in \mathbb{R}^3 in Beispiel 13.14 ist direkt, denn in diesem Fall ist natürlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. In der Tat sieht man in diesem Beispiel auch sofort, dass sich jeder Vektor in der x_1 - x_2 -Ebene $U_1 + U_2$ wie in der Einleitung zu diesem Kapitel eindeutig als Summe von einem Vektor in U_1 und einem in U_2 schreiben lässt.
- (b) Die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ in Bemerkung 17.1 ist hingegen nicht direkt, wie wir dort bereits gesehen hatten. Allerdings ist in diesem Fall trotzdem $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ – was zeigt, dass sich die Aussage von Lemma 17.4 nicht genauso auf mehr als zwei Summanden übertragen lässt. Zu Lemma 17.4 analoge Aussagen für allgemeine Summen sind stattdessen die folgenden.

Aufgabe 17.6. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und U_1, \dots, U_n Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ ist direkt.
- (b) Sind $x_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$ so dass $x_1 + \cdots + x_n = 0$ ist, so gilt bereits $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
- (c) $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- (d) $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

Aufgabe 17.7. Es seien U_1, \dots, U_n Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V . Zeige in Ergänzung zu Lemma 17.3, dass die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ genau dann direkt ist, wenn

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n,$$

und dass man in diesem Fall eine Basis von $U_1 + \cdots + U_n$ erhält, indem man Basen von U_1, \dots, U_n vereinigt.

Sind nun U ein Unterraum eines Vektorraums V und U' ein weiterer Unterraum mit $U \oplus U' = V$, so haben wir genau die am Anfang dieses Kapitels beschriebene Situation, dass sich jeder Vektor $x \in V$ eindeutig als $x = y + z$ schreiben lässt, wobei y in U liegt und z als „Restteil“ des Vektors in U' aufgefasst werden kann. Diese Situation hat einen besonderen Namen:

Definition 17.8 (Komplemente). Es sei U ein Unterraum eines K -Vektorraums V . Ein Unterraum $U' \leq V$ heißt **Komplement** oder **komplementärer Unterraum** von U in V , wenn $U \oplus U' = V$ (nach Lemma 17.4 also $U + U' = V$ und $U \cap U' = \{0\}$) gilt.

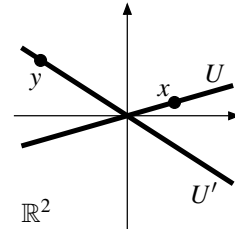
Bemerkung 17.9 (Dimensionsformel für Komplemente). Nach Lemma 17.3 gilt für jedes Komplement U' eines Untervektorraums U in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V die Dimensionsformel $\dim U + \dim U' = \dim V$, also

$$\dim U' = \dim V - \dim U.$$

Beispiel 17.10 (Nichteindeutigkeit von Komplementen). Wie im Bild unten rechts seien $U = \text{Lin}(x)$ und $U' = \text{Lin}(y)$ zwei verschiedene Ursprungsgeraden in \mathbb{R}^2 . Da x und y dann keine Vielfachen voneinander sind, sind diese beiden Vektoren also linear unabhängig und bilden damit eine Basis des zweidimensionalen Vektorraums \mathbb{R}^2 .

Es ist also $U + U' = \text{Lin}(x, y) = \mathbb{R}^2$, außerdem gilt natürlich $U \cap U' = \{0\}$. Also ist U' ein Komplement von U .

Da es zu einer gegebenen Ursprungsgeraden U in \mathbb{R}^2 aber natürlich unendlich viele Geraden $U' \neq U$ gibt, folgt daraus insbesondere, dass Komplemente von Unterräumen in der Regel nicht eindeutig sind. Wir wollen nun aber sehen, dass Komplemente zumindest im endlich-dimensionalen Fall stets existieren:



Satz 17.11 (Existenz von Komplementen). Jeder Unterraum U eines endlich-dimensionalen Vektorraums V besitzt ein Komplement.

Beweis. Nach Lemma 14.23 (a) ist U endlich erzeugt, besitzt damit also nach Satz 14.11 eine Basis (x_1, \dots, x_n) . Wir ergänzen sie gemäß Folgerung 14.16 zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ von V und zeigen, dass $U' := \text{Lin}(y_1, \dots, y_m)$ dann ein Komplement von U ist:

- Es ist offensichtlich $U + U' = V$, denn nach Beispiel 13.14 ist

$$U + U' = \text{Lin}(x_1, \dots, x_n) + \text{Lin}(y_1, \dots, y_m) = \text{Lin}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = V.$$

- Nach der Dimensionsformel aus Satz 14.25 ist damit

$$\dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' - \underbrace{\dim(U + U')}_{=V} = n + m - (n + m) = 0,$$

also auch $U \cap U' = \{0\}$. □

Bemerkung 17.12 (Berechnung von Komplementen). Beachte, dass der Beweis von Satz 17.11 konstruktiv ist, d. h. auch die konkrete Berechnung eines Komplements ermöglicht: Möchte man ein Komplement U' zu einem Unterraum U eines endlich-dimensionalen Vektorraums V berechnen, muss man nur eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen; die dafür hinzugenommenen Vektoren bilden dann eine Basis eines Komplements U' .

So haben wir z. B. in Beispiel 16.22 (b) im Raum $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Polynome vom Grad höchstens 3 die Basis $(1 + 2x^3, x + x^2 + x^3)$ von $U := \text{Lin}(1 + 2x^3, x + x^2 + x^3)$ mit den Polynomen x^2 und x^3 zu einer Basis von $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ergänzt; dementsprechend ist $U' := \text{Lin}(x^2, x^3)$ also ein Komplement von U in V .

Aufgabe 17.13. Es seien U_1, U_2, U_3 und U Unterräume eines Vektorraums V mit $U_1 \oplus U_2 = U$ und $U \oplus U_3 = V$.

Zeige, dass dann $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = V$ gilt.

17.B Quotientenräume

Komplemente von Unterräumen sind in der Praxis sehr nützlich: Wir haben gerade gesehen, dass ein Komplement U' eines Unterraums U in einem Vektorraum V die „Restteile“ von Vektoren in V misst, wenn man ihren Anteil in U heraus nimmt. Unschön ist an dieser Konstruktion allerdings, dass ein Komplement nach Beispiel 17.10 nicht eindeutig bestimmt und damit ein recht unnatürliches Objekt ist. Was im obigen Sinne der Restteil eines Vektors in V nach Herausnehmen des Anteils in U ist, lässt sich also nicht beantworten, solange man nicht eine (letztlich willkürliche) Wahl eines Komplements von U in V getroffen hat.

Wir wollen nun eine deutlich schönere Konstruktion einführen, die solche Restteile auch ohne willkürliche Wahlen messen kann. Der Preis dafür ist, dass der Vektorraum, der diese Restteile auf ganz natürliche Art beschreibt, kein Unterraum von V mehr ist, sondern ein sogenannter *Quotientenraum*: ein Raum von Äquivalenzklassen von Vektoren in V wie in Abschnitt 2.B, wobei wir zwei Vektoren in V miteinander identifizieren wollen, wenn sie sich um ein Element von U voneinander unterscheiden. Diejenigen von euch, die auch die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ besuchen, kennen diese Idee vermutlich bereits von den Faktorgruppen [G, Kapitel 6].

Lemma und Definition 17.14. *Es seien V ein K -Vektorraum und $U \leq V$ ein fest gewählter Unterraum. Dann ist durch*

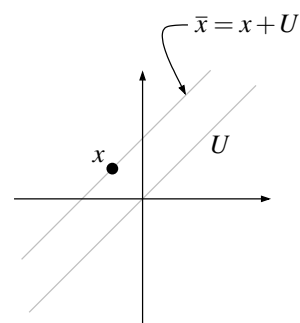
$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in U \quad \text{für alle } x, y \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Für die Äquivalenzklasse eines Vektors $x \in V$ bezüglich dieser Relation gilt

$$\bar{x} = x + U := \{x + u : u \in U\},$$

d. h. \bar{x} ist (wie in Beispiel 13.12 (c) und im Bild rechts) ein verschobener Unterraum mit Aufpunkt x . Man nennt dies auch einen affinen Unterraum mit Aufpunkt x .

Die Menge V / \sim aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation bezeichnet man mit V/U .



Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \sim eine Äquivalenzrelation wie in Definition 2.31 ist.

Reflexivität: Für alle $x \in V$ gilt $x - x = 0 \in U$ nach Definition 13.8 (a), und damit $x \sim x$.

Symmetrie: Es seien $x, y \in V$ mit $x \sim y$, also $x - y \in U$. Dann ist nach Definition 13.8 (c) auch $(-1)(x - y) = y - x \in U$, und damit $y \sim x$.

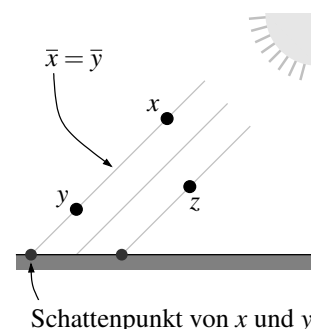
Transitivität: Sind $x, y, z \in V$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x - y \in U$ und $y - z \in U$, so ist nach Definition 13.8 (b) auch $(x - y) + (y - z) = x - z \in U$, und damit $x \sim z$.

Also ist \sim eine Äquivalenzrelation. Für die Klasse \bar{x} eines Vektors x gilt nun nach Definition 2.31

$$\bar{x} = \{y \in V : y - x \in U\} = \{y \in V : y - x = u \text{ für ein } u \in U\} = \{x + u : u \in U\}. \quad \square$$

Bemerkung 17.15 (Anschauliche Deutung von V/U). Die geometrische Bedeutung des Raumes V/U lässt sich am besten wie im Bild rechts erläutern, in dem $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Dort scheint die Sonne mit parallelen (hell eingezeichneten) Strahlen in Richtung von U und wirft dabei von jedem Punkt in V einen Schatten auf den Boden. In diesem Bild ist die Klasse $\bar{x} \in V/U$ eines Punktes $x \in V$ gerade der Sonnenstrahl durch x . Zwei Punkte in V bestimmen also genau dann den gleichen Punkt in V/U , wenn sie auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen, d. h. denselben Schattenpunkt auf dem Boden werfen. Im Bild rechts ist also $\bar{x} = \bar{y} \neq \bar{z}$.



In diesem Sinne kann man sich V/U damit als eine „Schattenwelt“ von V vorstellen, die zwar jeden Punkt von V sieht, aber nur mit einem Teil seiner Informationen: Der „Abstand zur Sonne“ eines Punktes in V ist anhand des Schattenbildes nicht mehr zu rekonstruieren. Für einen Vektor $x \in V$ nimmt die Klasse \bar{x} also wie beabsichtigt „den Anteil in U heraus“.

Bemerkung 17.16. Für zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt nach Satz 2.33 (a) genau dann $\bar{x} = \bar{y}$ in V/U , wenn $x \sim y$ ist. Wir sehen mit Definition 17.14 also für alle $x, y \in V$ in V/U :

$\bar{x} = \bar{y} \iff x - y \in U,$ <p>insbesondere also</p> $\bar{x} = \bar{0} \iff x \in U.$
--

Mit diesen Rechenregeln kann man Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen in V/U immer auf Aussagen über die Repräsentanten in V zurückführen. So ist in der Situation von Bemerkung 17.15 beispielsweise

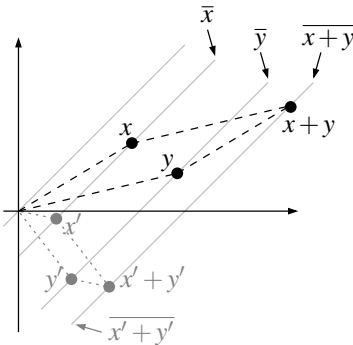
$$\overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}}, \quad \text{weil} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \in U.$$

Allerdings fehlt uns noch ein letzter Schritt: Bisher ist der Raum V/U nur eine Menge ohne weitere Struktur. Um ihn im Rahmen der linearen Algebra untersuchen zu können, müssen wir ihn selbst wieder zu einem Vektorraum machen, also auf ihm eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definieren und zeigen, dass damit dann die Vektorraumeigenschaften für V/U gelten.

Die Idee hierfür ist sehr einfach und im Bild rechts dargestellt: Wollen wir die verschobenen Unterräume \bar{x} und \bar{y} in V/U addieren, so addieren wir einfach wie im oberen Teil des Bildes die Aufpunkte x und y und verwenden den so erhaltenen Punkt $x + y$ als Aufpunkt für die Summe, d. h. wir setzen

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}. \quad (*)$$

Allerdings müssen wir dabei etwas aufpassen: Wir hätten für dieselben verschobenen Unterräume statt x und y ja auch wie im unteren Teil des Bildes genauso gut andere Aufpunkte x' bzw. y' wählen können und hätten dann als Ergebnis den verschobenen Unterraum $\overline{x' + y'}$ erhalten!



Damit die Vorschrift $(*)$ wirklich widerspruchsfrei eine Verknüpfung auf V/U definiert, müssen wir also überprüfen, dass der verschobene Unterraum $\overline{x' + y'}$ derselbe ist wie $\overline{x + y}$, d. h. dass das *Endergebnis nicht von der Wahl der Aufpunkte abhängt*. Man sagt dazu auch, dass wir die *Wohldefiniertheit* von $(*)$ überprüfen müssen. Eine solche Überprüfung ist immer dann nötig, wenn wir eine Funktion auf einer Menge von Äquivalenzklassen (hier: V/U) definieren wollen und bei der Konstruktion die Wahl eines Repräsentanten einer Äquivalenzklasse (hier: eines Aufpunktes eines verschobenen Unterrums) verwenden. Die allgemeine Situation ist die folgende:

Notation 17.17 (Wohldefiniertheit). Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M . Möchte man auf der Menge M/\sim der Äquivalenzklassen eine Abbildung in eine andere Menge N definieren, so ist die Idee hierfür in der Regel, dass man eine Abbildung $g: M \rightarrow N$ wählt und dann

$$f: M/\sim \rightarrow N, \quad f(\bar{x}) := g(x) \quad (*)$$

setzt. Man möchte das Bild einer Äquivalenzklasse unter f also dadurch definieren, dass man einen Repräsentanten dieser Klasse wählt und diesen dann mit g abbildet. Damit dies nun f widerspruchsfrei definiert, brauchen wir offensichtlich, dass das Ergebnis dieser Vorschrift nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt: Sind $x, y \in M$ äquivalent zueinander, sind sie also Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse, so muss $g(x) = g(y)$ gelten. Mit anderen Worten benötigen wir

$$g(x) = g(y) \quad \text{für alle } x, y \in M \text{ mit } \bar{x} = \bar{y},$$

damit die Definition (*) widerspruchsfrei ist. Statt „widerspruchsfrei“ sagt man in diesem Fall wie oben schon erwähnt in der Regel, dass f durch die Vorschrift (*) **wohldefiniert** ist. Die Wohldefiniertheit einer Funktion muss man also immer dann nachprüfen, wenn der Startraum der Funktion eine Menge von Äquivalenzklassen ist und die Funktionsvorschrift Repräsentanten dieser Klassen benutzt. Oder noch etwas allgemeiner: Wenn eine Funktionsvorschrift an irgendeiner Stelle eine Wahl beinhaltet, muss man sich vergewissern, dass der letztliche Funktionswert von dieser Wahl unabhängig ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir die Menge V/U nun wie angekündigt zu einem Vektorraum machen:

Satz und Definition 17.18 (Quotientenräume). *Es sei U ein Unterraum eines K -Vektorraums V . Dann sind die Verknüpfungen*

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x+y} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \bar{x} := \overline{\lambda x} \quad \text{für } x, y \in V \text{ und } \lambda \in K$$

*auf V/U wohldefiniert und machen V/U zu einem K -Vektorraum. Man nennt ihn den **Quotientenraum** bzw. **Faktorraum** von V nach U .*

*Man spricht V/U auch als „ V modulo U “ und nennt $\bar{x} \in V/U$ für ein $x \in V$ die **Restklasse** von x modulo U .*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Addition: Sind $x, x', y, y' \in V$ mit $\bar{x} = \bar{x'}$ und $\bar{y} = \bar{y'}$, so bedeutet dies nach Bemerkung 17.16 genau $x - x' \in U$ und $y - y' \in U$. Nach Definition 13.8 (a) ist dann aber auch $(x+y) - (x'+y') = (x-x') + (y-y') \in U$ – was wiederum nach Bemerkung 17.16 genau $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$ bedeutet. Also ist die Addition auf V/U wohldefiniert.

Genauso zeigt man die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation: Sind $\lambda \in K$ und $x, x' \in V$ mit $\bar{x} = \bar{x'}$, also $x - x' \in U$, so ist nach Definition 13.8 (a) auch $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in U$ und damit $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda x'}$.

Die Vektorraumaxiome für V/U ergeben sich nun unmittelbar aus denen von V . So erhält man z. B. die Assoziativität der Vektoraddition durch die einfache Rechnung

$$(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \overline{x+y} + \bar{z} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+(y+z)} = \bar{x} + \overline{y+z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$$

für alle $x, y, z \in V$, wobei die mittlere Gleichheit die Assoziativität in V ist und sich die anderen Gleichungen aus der Definition der Addition in V/U ergeben. Die übrigen Eigenschaften überprüft man genauso; der Nullvektor in V/U ist die Klasse $\bar{0}$ des Nullvektors in V bzw. der unverschobene Unterraum U , das additive Inverse eines Elements $\bar{x} \in V/U$ ist $\overline{-x}$. \square

Aufgrund der anschaulichen Deutung von Komplementen und Quotientenräumen sollte es nicht verwundern, dass wir nun zeigen können, dass diese beiden Konzepte letztlich das gleiche beschreiben, also als Vektorräume isomorph zueinander sind. Wie oben schon erwähnt ist der Vorteil des Komplements lediglich, dass es als Unterraum des ursprünglichen Vektorraums anschaulich leichter zu verstehen ist; der Vorteil des Quotientenraums ist dagegen, dass er ohne willkürliche Wahlen konstruiert werden kann und damit aus mathematischer Sicht das natürlichere Objekt ist.

Satz 17.19 (Quotientenräume und Komplemente). *Es seien U ein Untervektorraum eines K -Vektorraums V und U' ein Komplement von U . Dann ist die Abbildung*

$$f: U' \rightarrow V/U, x \mapsto \bar{x}$$

ein Isomorphismus.

*Ist V endlich-dimensional, so gilt also insbesondere die **Dimensionsformel für Quotientenräume***

$$\dim V/U = \dim V - \dim U.$$

Beweis. Um zu zeigen, dass f ein Isomorphismus ist, müssen wir die folgenden Dinge überprüfen:

- f ist eine lineare Abbildung, denn für alle $x, y \in U'$ ist

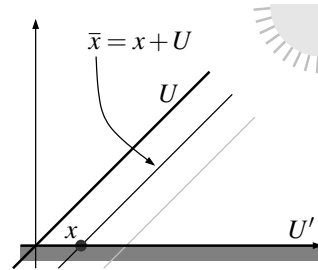
$$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y),$$

und eine analoge Aussage gilt natürlich für die Skalarmultiplikation.

- f ist surjektiv: Es sei $\bar{x} \in V/U$ beliebig, also $x \in V$. Wegen $V = U + U'$ können wir $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U'$ schreiben. Dann liegt x_2 in der Definitionsmenge U' von f , und es gilt $f(x_2) = \bar{x}_2 = \bar{x}$ nach Bemerkung 17.16, da $x - x_2 = x_1 \in U$. Also ist f surjektiv.
- f ist injektiv: Es sei $x \in U'$ mit $f(x) = \bar{x} = \bar{0}$, also $x \in U$ nach Bemerkung 17.16. Dann ist aber $x \in U \cap U' = \{0\}$. Damit ist f nach Lemma 16.9 injektiv.

Die Zusatzaussage folgt nun sofort daraus, dass das Komplement U' nach Bemerkung 17.9 die Dimension $\dim V - \dim U$ hat. \square

Bemerkung 17.20. Das Bild rechts illustriert in der Situation von Bemerkung 17.15 noch einmal, dass der Morphismus f aus Satz 17.19 bijektiv ist: Die Bodenlinie U' ist nach Beispiel 17.10 ein Komplement der Richtung U der Sonnenstrahlen. Die Abbildung f ordnet nun jedem Punkt $x \in U'$ auf dem Boden den Sonnenstrahl $\bar{x} \in V/U$ durch diesen Punkt zu, und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Bodenpunkten und der Menge der Sonnenstrahlen. Wenn wir in Bemerkung 17.15 gesagt haben, dass V/U die „Schattenwelt“ auf dem Boden ist, haben wir dabei also schon den Isomorphismus zwischen dem eigentlichen Quotientenraum V/U und dem Boden U' verwendet.



Bemerkung 17.21 (Basen von Quotientenräumen). Nach Satz 17.19 (und Lemma 16.17 (c)) erhalten wir im endlich-dimensionalen Fall eine Basis des Quotientenraums V/U , indem wir eine Basis eines Komplements von U wählen und die Restklassen dieser Vektoren in V/U nehmen. Kombinieren wir dies mit dem Verfahren aus Bemerkung 17.12, so bedeutet dies: Wir können eine Basis von V/U konstruieren, indem wir eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen und dann die Restklassen der hinzugenommenen Vektoren wählen.

Im Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \text{Lin}(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus Bemerkung 17.15 ergänzt z. B. e_1 den Vektor v zu einer Basis von \mathbb{R}^2 , und damit ist (\bar{e}_1) eine Basis von V/U .

Damit müssen wir z. B. den Vektor $\bar{e}_2 \in V/U$ als Linearkombination dieser Basis, also als Vielfaches von \bar{e}_1 schreiben können. Dies ist hier auch einfach zu sehen: Wegen $e_1 + e_2 = v \in U$ ist $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = \bar{0}$ in V/U , also $\bar{e}_2 = -\bar{e}_1$. Im Bild von Bemerkung 17.20 bedeutet dies einfach, dass die Vektoren e_2 und $-e_1$ auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen.

Aufgabe 17.22. Es sei $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : -2x_1 + x_2 + x_3 = x_1 - 2x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$.

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig in \mathbb{R}^3/U ?

Aufgabe 17.23.

- (a) Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/U$, $x \mapsto \bar{x}$ mit $U = \text{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$.

Bestimme eine Basis B von \mathbb{R}^3/U sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis E von \mathbb{R}^3 .

- (b) Es sei U ein Unterraum eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V .

Man zeige: Ist (x_1, \dots, x_n) eine Basis von U , und sind $y_1, \dots, y_m \in V$ so dass $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$ eine Basis von V/U ist, dann ist $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von V .

Aufgabe 17.24.

- (a) Zeige, dass $f: \text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \text{Pol}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\varphi} \mapsto \varphi''(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wohldefiniert ist, und bestimme die Dimension von $\text{Ker } f$.
- (b) Es seien U ein Unterraum eines K -Vektorraums V und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$g: V/U \rightarrow V/U, \bar{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine wohldefinierte lineare Abbildung ist, wenn $f(U) \subset U$ gilt.

Mit Hilfe von Quotientenräumen wollen wir jetzt sehen, wie man aus jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ „einen Isomorphismus machen kann“. Die Idee hierfür ist sehr einfach: Natürlich kann man f zunächst einmal surjektiv machen, indem man den Zielraum W durch den Bildraum $\text{Im } f$ ersetzt. Um f auch noch injektiv zu machen, also gemäß Lemma 16.9 den Kern zu $\{0\}$ zu machen, können wir einfach den Startraum V durch den Quotientenraum $V / \text{Ker } f$ ersetzen: Auf diese Art werden alle Elemente des Kerns von f miteinander identifiziert, so dass der Kern der neuen Abbildung auf dem Quotientenraum nur noch aus dem einen Element $\bar{0} = \text{Ker } f$ besteht.

Satz 17.25 (Homomorphiesatz). Für jede lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist die Abbildung

$$g: V / \text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f, \bar{x} \mapsto f(x)$$

(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.

Beweis. Wir müssen einige Dinge überprüfen:

- Die Abbildung g ist wohldefiniert: Sind $x, y \in V$ mit $\bar{x} = \bar{y}$, also $x - y \in \text{Ker } f$ nach Bemerkung 17.16, so ist $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ und damit $f(x) = f(y)$.
- Die Abbildung g ist linear: Für $x, y \in V$ gilt

$$g(\bar{x} + \bar{y}) = g(\overline{x + y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = g(\bar{x}) + g(\bar{y});$$

analog folgt auch die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.

- Die Abbildung g ist surjektiv: Dies ist klar nach Definition von $\text{Im } f$, denn jedes Element in $\text{Im } f$ ist ja von der Form $f(x) = g(\bar{x})$ für ein $x \in V$.
- Die Abbildung g ist injektiv: Nach Lemma 16.9 genügt es dafür zu zeigen, dass $\text{Ker } g = \{\bar{0}\}$. Es sei also $x \in V$ mit $g(\bar{x}) = 0$. Dann ist $f(x) = 0$, also $x \in \text{Ker } f$ und damit $\bar{x} = \bar{0} \in V / \text{Ker } f$ nach Bemerkung 17.16. \square

Bemerkung 17.26 (Dimensionsformel aus dem Homomorphiesatz). Insbesondere liefert der Homomorphiesatz für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen einen alternativen Beweis der Dimensionsformel für Morphismen aus Folgerung 16.30 (c), der nicht den Umweg über Matrizen und die algorithmischen Methoden aus Abschnitt 15.C nimmt: Da Isomorphismen nach Lemma 16.17 (c) die Dimension erhalten, folgt aus dem Homomorphiesatz 17.25 mit der Dimensionsformel für Quotientenräume aus Satz 17.19 sofort

$$\dim V - \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f, \quad \text{also} \quad \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V.$$

Beispiel 17.27 (Anschauliche Deutung des Homomorphiesatzes). Als anschauliches Beispiel für den Homomorphiesatz können wir noch einmal die „Schattenwelt“ aus Bemerkung 17.15 und Bemerkung 17.20 betrachten. Ist $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die einen Punkt auf seinen Schattenpunkt auf den Boden abbildet, so ist $\text{Ker } f = U$ der Sonnenstrahl durch 0 und $\text{Im } f = U'$ der Boden. Satz 17.25 gibt uns dann den Isomorphismus $g: \mathbb{R}^2 / U \rightarrow U'$, der jeden Sonnenstrahl auf seinen Bodenpunkt abbildet und genau die Umkehrung des Isomorphismus aus Satz 17.19 ist.

Aufgabe 17.28. Die lineare Abbildung, die der Situation in Beispiel 17.27 entspricht, ist

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfe den Homomorphiesatz in diesem Fall explizit, d. h. zeige durch eine direkte Rechnung, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{R}^2 / \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wohldefiniert, linear, surjektiv und injektiv ist.

Als Anwendung des Homomorphiesatzes wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels noch einmal Abbildungsmatrizen wie in Satz 16.26 und Folgerung 16.27 betrachten. Dort hatten wir gesehen, dass jeder Morphismus $f: V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen nach Wahl von Basen B und C von V bzw. W eindeutig durch seine Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ beschrieben werden kann. Allerdings ist die Wahl solcher Basen natürlich oft willkürlich, und eine andere Wahl führt auch zu einer anderen Matrix – nämlich nach Satz 16.42 zu einer Matrix der Form $S \cdot A_f^{B,C} \cdot T$, wobei S und T die zugehörigen Basiswechsellmatrizen sind.

Es ist daher eine naheliegende Frage, in wie weit wir zumindest durch eine geschickte Wahl der Basen B und C erreichen können, dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ möglichst einfach wird – also z. B. viele Nullen enthält. Dabei ist nach Bemerkung 16.29 natürlich klar, dass $A_f^{B,C}$ zumindest denselben Rang wie f haben muss. Ansonsten besagt der folgende Satz aber, dass wir immer die einfachste mögliche Matrix von diesem Rang erhalten können. Der Beweis ist dabei auch konstruktiv, gibt also ein Verfahren an, wie B und C gefunden werden können.

Satz und Definition 17.29 (Normalform von Abbildungsmatrizen). *Es sei $f: V \rightarrow W$ ein Morphismus vom Rang r zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann gibt es Basen B und C von V bzw. W , so dass die Abbildungsmatrix von f bezüglich dieser Basen die Form*

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

hat, d. h. so dass Einsen genau auf den ersten r Diagonalpositionen stehen, und sonst überall Nullen. Man sagt, dass eine solche Abbildungsmatrix in **Normalform** ist. (Beachte dabei, dass unter der Einheitsmatrix E_r genau $m - r$ Nullzeilen, rechts von der Einheitsmatrix hingegen $n - r$ Nullspalten stehen – die Matrix $A_f^{B,C}$ ist also nicht notwendig quadratisch.)

Beweis. Nach der Dimensionsformel aus Folgerung 16.30 (c) ist $\dim \text{Ker } f = \dim V - \text{rk } f = n - r$. Wir können also eine Basis (x_{r+1}, \dots, x_n) von $\text{Ker } f$ wählen und zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V ergänzen. Damit ist $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ nach Bemerkung 17.21 eine Basis des Quotientenraums $V / \text{Ker } f$.

Nach dem Homomorphiesatz 17.25 ist nun aber die Abbildung $V / \text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f$, $\bar{x} \mapsto f(x)$ ein Isomorphismus, und damit ist (y_1, \dots, y_r) mit $y_i := f(x_i)$ für $i = 1, \dots, r$ nach Lemma 16.17 (c) eine Basis von $\text{Im } f$. Wir ergänzen diese schließlich noch zu einer Basis $C = (y_1, \dots, y_m)$ von W . Wegen

$$f(x_i) = \begin{cases} y_i & \text{für } i \leq r, \\ 0 & \text{für } i > r, \end{cases} \quad \text{also} \quad \Phi_C(f(x_i)) = \begin{cases} e_i & \text{für } i \leq r, \\ 0 & \text{für } i > r, \end{cases}$$

hat die Matrix $A_f^{B,C}$ nach Definition 16.26 dann die gewünschte Form $(e_1 | \dots | e_r | 0 | \dots | 0)$. \square

Bemerkung 17.30 (Normalform von Matrizen bezüglich Äquivalenz). Nach Bemerkung 16.45 (b) können wir Satz 17.29 auch so formulieren: Ist $A \in K^{m \times n}$ eine beliebige Matrix vom Rang r , so ist A äquivalent zur Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (*)$$

d. h. es gibt invertierbare Matrizen $S \in \text{GL}(m, K)$ und $T \in \text{GL}(n, K)$, so dass SAT diese eine spezielle Form hat. Insbesondere sind also alle Matrizen vom gleichen Rang zueinander äquivalent. Zusammen mit Folgerung 16.46 bedeutet dies, dass zwei Matrizen (derselben Größe) genau dann zueinander äquivalent sind, wenn sie denselben Rang haben.

Analog zu Satz 17.29 nennt man $(*)$ auch die **Normalform** von A (bezüglich der Äquivalenz von Matrizen); sie ist die „einfachste“ Matrix in der Äquivalenzklasse von A . Normalformen bezüglich anderer Matrixtransformationen werden wir z. B. in Kapitel 20 und Satz 22.35 noch kennenlernen.

Bemerkung 17.31 (Alternativer Beweis von $\text{rk} A = \text{rk}(A^T)$ mit Normalformen). Als Beispiel für die Nützlichkeit von Normalformen wollen wir damit nun einen alternativen Beweis der Gleichung $\text{rk} A = \text{rk}(A^T)$ für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ geben.

Bisher hatten wir diese sehr wichtige Aussage in Satz 15.38 durch den Vergleich von zwei verschiedenen Verfahren zur Berechnung von $\text{Im} A$ gezeigt. Auch wenn dies natürlich ein vollständiger Beweis war, gibt er dennoch durch seine algorithmische Struktur wenig Erkenntnisse darüber, welche Idee dahinter steckt – das Ergebnis ist einfach am Ende aus einer nicht besonders gut überschaubaren Rechnung so herausgekommen.

Im Gegensatz dazu geben Normalformen einen sehr einfachen und sofort verständlichen Beweis dieser Aussage: Da sich der Rang einer Matrix beim Übergang zu einer äquivalenten Matrix nach Folgerung 16.46 nicht ändert, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Matrix in Normalform bezüglich Äquivalenz ist. Für solche Matrizen ist die Aussage aber offensichtlich.

Die ausführliche Formulierung dieses Beweises lautet so: Nach Bemerkung 17.30 gibt es Matrizen $S \in \text{GL}(m, K)$ und $T \in \text{GL}(n, K)$, so dass

$$SAT = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{mit } r = \text{rk} A$$

gilt. Transponieren dieser Gleichung liefert dann mit Lemma 15.7 (d) die Matrix

$$T^T A^T S^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in K^{n \times m},$$

nach Folgerung 16.46 ist also

$$\text{rk}(A^T) = \text{rk}(T^T A^T S^T) = \text{rk} \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = r = \text{rk} A.$$

Aufgabe 17.32. Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$.

- Für die Abbildung $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ bestimme man Basen B von \mathbb{R}^5 und C von \mathbb{R}^4 , so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ in Normalform ist.
- Bestimme $S \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$ und $T \in \text{GL}(5, \mathbb{R})$ so, dass SAT in Normalform ist.
- Es sei $f: \text{Pol}_4(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(\varphi)(x) = x\varphi''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Gibt es Basen B und C von $\text{Pol}_4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so dass $A_f^{B,C} = A$ gilt?

Aufgabe 17.33.

- Bestimme Basen B und C von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ der Transpositionsabbildung $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $M \mapsto M^T$ in Normalform ist.
- Kann diese Normalform auch mit derselben Basis im Start- und Zielraum erreicht werden?