

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 9

Abgabe: Montag, 30. Juni

- (1) Es seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Man zeige:

- (a) Die Funktion f ist differenzierbar, die partiellen Ableitungen von f sind aber nicht stetig. Berechne auch die Ableitung f' .
 - (b) Die partiellen Ableitungen $\partial_1 \partial_2 g$ und $\partial_2 \partial_1 g$ existieren auf ganz $\mathbb{R}^2$, stimmen im Nullpunkt jedoch nicht überein.
(Hinweis: Es ist für die Lösung dieser Aufgabe nicht nötig, $\partial_1 \partial_2 g$ und $\partial_2 \partial_1 g$ in jedem Punkt zu berechnen.)
- (2)
- (a) Zeige, dass die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ für *keine* Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit $n > 0$ differenzierbar ist.
 - (b) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion mit beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige, dass f stetig ist.
- (3) Es seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{K}^n$. Man zeige:
- (a) Der Grenzwert $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ existiert in $\mathbb{K}^{n \times n}$.
 - (b) Die Funktion $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $t \mapsto e^{At}v$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'(t) = A e^{At}v$. Insbesondere ist f damit also eine Lösung der Differentialgleichung $f' = Af$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = v$.
(Hinweis: Ihr dürft ohne Beweis benutzen, dass diese Exponentialfunktion für kommutierende Matrizen die übliche Funktionalgleichung erfüllt, also insbesondere dass $e^{At} = e^{A(t-t_0)}e^{At_0}$ gilt. Dies zeigt man genauso wie im eindimensionalen Fall, indem man das Cauchy-Produkt von Reihen in $\mathbb{K}$ auf Reihen von Matrizen verallgemeinert.)
- (4) Es seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ sowie $[a, b] \times [c, d]$ ein in D enthaltenes Rechteck. Man zeige:
- (a) Die Integralfunktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2$ ist stetig.
 - (b) Ist f stetig partiell nach x_1 differenzierbar, so ist F auf (a, b) differenzierbar mit Ableitung $F'(x_1) = \int_c^d \partial_1 f(x_1, x_2) dx_2$ (d. h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen können vertauscht werden).
 - (c) $\int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = \int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.