

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 8

Abgabe: Montag, 23. Juni

- (1) Man zeige:
- (a) Sind M ein metrischer Raum und $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\max(f, g): M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max(f(x), g(x))$ stetig.
 - (b) Die Abbildung $f: \text{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K}), A \mapsto A^{-1}$ ist stetig, und Bilder offener Mengen unter f sind wieder offen.
 - (c) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Menge $O(n)$ aller orthogonalen Matrizen kompakt in $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- (2) Bestimme für alle $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ die von der Summennorm $\|\cdot\|_1$ induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{K}^{m \times n}$.
- (3) Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f: M \rightarrow M$ eine Abbildung mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$. Man zeige:
- (a) Ist M kompakt, so hat f genau einen Fixpunkt.
 - (b) Ist M nicht notwendig kompakt, so muss f im Allgemeinen keinen Fixpunkt haben.
- (4) Zu einem gegebenen metrischen Raum M sei $\mathcal{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von M . Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathcal{K}(M)$ sei $d(a, B) := \min\{d(a, b) : b \in B\}$,

für $A, B \in \mathcal{K}(M)$ sei $h(A, B) := \max(\max\{d(a, B) : a \in A\}, \max\{d(b, A) : b \in B\})$.

Man zeige:

- (a) Die oben angegebenen Minima und Maxima existieren.
- (b) h ist eine Metrik auf $\mathcal{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)
- (c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathcal{K}(M)$.