Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 7

Abgabe: Montag, 16. Juni

Die in der Vorlesung nur angegebene, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit in metrischen Räumen soll bei der Lösung der Aufgaben natürlich nicht verwendet werden. Wie in der Vorlesung ist mit „kompakt“ immer „folgenkompakt“ gemeint.

(1) (a) Untersuche, ob die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden können:

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto {x_1}^{x_2}.$$

(b) Es seien A und B zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Zeige die Inklusion $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$, und dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(2) (a) Zeige durch direkten Rückgang auf die Definition, dass die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 + 1\}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Es seien V ein normierter Raum, $A \subset V$ abgeschlossen und $K \subset V$ kompakt. Zeige, dass die Menge $A + K := \{x + y : x \in A,\ y \in K\}$ dann ebenfalls abgeschlossen ist.

(c) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei $M_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge aller diagonalisierbaren Matrizen. Zeige, dass M_n weder offen noch abgeschlossen ist.

(3) In einem metrischen Raum M betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$. Man zeige:

(a) Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

(4) (a) Es seien K eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K in M. Man zeige:

$$\text{Es gibt ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ so dass zu jedem } a \in K \text{ ein } i \in I \text{ existiert mit } U_\varepsilon(a) \subset U_i. \qquad (*)$$

(b) Finde ein Beispiel einer *endlichen* offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $K = M = \mathbb{R}^n$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Aussage $(*)$ falsch ist.