Andreas Gathmann und Marco Albert Sommersemester 2025

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 6

Abgabe: Montag, 9. Juni

(1) Es sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen. Man zeige:

(a) Die Abbildung $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto \min(|x-y|,1)$ ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung

$$e\colon V\times V\to\mathbb{R},\ \big((a_k)_k,(b_k)_k\big)\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d(a_k,b_k)}{2^k}$$

(mit d wie in (a)) ist eine Metrik auf V.

(c) Eine Folge reeller Folgen $(a_k^{(n)})_k\in V$ mit $n\in\mathbb{N}$ konvergiert für $n\to\infty$ bezüglich der Metrik e wie in (b) genau dann gegen $(a_k)_k\in V$, wenn sie „punktweise konvergiert“, also wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)} = a_k$ für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt.

(2) Für $x,y\in\mathbb{R}^2$ sind

$$d_1(x,y) := \begin{cases} \|x\|_2+\|y\|_2 & \text{für } x\neq y,\\ 0 & \text{für } x=y\end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_2(x,y) := \min(\|x-y\|_2,1)$$

Metriken auf $\mathbb{R}^2$ (das braucht ihr nicht zu zeigen).

(a) Skizziere die qualitativ verschiedenen Fälle, wie abgeschlossene Kugeln bezüglich dieser beiden Metriken aussehen können.

(b) Man zeige: Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_1 genau dann beschränkt, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt ist. Für d_2 gilt dies jedoch nicht.

(c) Man zeige: Eine Menge $A\subset\mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_2 genau dann eine Umgebung eines Punktes $a\in\mathbb{R}^2$, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik eine Umgebung von a ist. Für d_1 gilt dies jedoch nicht.

(Insbesondere zeigt d_2 also, dass Beschränktheit kein topologischer Begriff ist: Diese Metrik liefert die gleichen Umgebungen wie die euklidische Metrik, aber nicht die gleichen beschränkten Mengen.)

(3) In dieser Aufgabe seien alle auftretenden Matrizenräume mit der Frobenius-Norm versehen, also mit der Norm zum Standardskalarprodukt.
Man zeige:

(a) Für alle $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ und $B\in\mathbb{K}^{n\times p}$ gilt $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$.

(b) Ist $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|A\|<1$, so ist $E-A$ invertierbar, und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=(E-A)^{-1}$.

(4) Es sei $V=C^0([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige:

(a) $(V,\|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) $(V,\|\cdot\|_2)$ ist kein Banachraum.