Andreas Gathmann und Marco Albert Sommersemester 2025

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 3

Abgabe: Montag, 19. Mai

(1) Überprüfe, für welche $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgenden Abbildungen b Skalarprodukte auf dem reellen Vektorraum V sind:

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = x^{\mathsf{T}} A y$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(A,B) = \operatorname{Spur}(AB)$.

(2) Eine Bilinearform $b\colon V \times V \to K$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V heißt *ausgeartet*, wenn es ein $x \in V \backslash \{0\}$ gibt, so dass $b(x,y) = 0$ für alle $y \in V$ gilt.

(a) Man zeige: Ist B eine Basis von V, so ist b genau dann ausgeartet, wenn $\operatorname{rk} A_b^B < \dim V$ gilt.

(b) Man beweise oder widerlege: Ist U ein Unterraum von V, und ist b nicht ausgeartet auf V, so ist auch die Einschränkung $b|_{U \times U}$ nicht ausgeartet auf U.

(3) (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ eine Matrix mit $\operatorname{rk} A = 6$ und $A^4 + 3A^2 = 3A^3 + A$, so dass einer der Eigenräume von A zweidimensional ist.

Bestimme das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von A.

(b) Man zeige: Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine invertierbare Matrix, so dass A^m für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ diagonalisierbar ist, so ist auch A diagonalisierbar.

(Hinweis: Die Betrachtung von Minimalpolynomen ist hier nützlich.)

(4) Zu einer symmetrischen Bilinearform b auf einem reellen Vektorraum V sei $U_b = \{x \in V : b(x,x) = 0\}$. Man zeige:

(a) U_b ist im Allgemeinen kein Unterraum von V.

(b) Ist b jedoch positiv semidefinit, so ist U_b ein Unterraum, und $\overline{b}(\overline{x}, \overline{y}) := b(x,y)$ ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf V/U_b.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass $U_b = \{x \in V : b(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$.)

Falls ihr noch weiter über diese Aufgabe nachdenken möchtet (ohne Abgabe): Was ergibt sich aus dieser Konstruktion, wenn V der Vektorraum aller stückweise stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$ und $b(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ist? Wie kann man sich in diesem Fall die Elemente von U_b und V/U_b anschaulich vorstellen?