Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 2

Abgabe: Montag, 12. Mai

(1) (a) Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $\chi_A(t) = t^5 - 2t^4$.

Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Jordanbasis für A .

(b) Es sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 4. Berechne die Jordansche Normalform für die lineare Abbildung $f: V \rightarrow V, \varphi \mapsto \varphi''$, die jedem Polynom seine zweite Ableitung zuordnet.

(2) (a) Für eine gegebene Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vom Rang $r := \text{rk } B$ sei

$$A = \left(\begin{array}{c|c} E_n & B \\ \hline 0 & E_n \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(2n) \times (2n)}.$$

Bestimme die Jordansche Normalform von A in Abhängigkeit von r .

(b) Man zeige mit Hilfe der Jordanschen Normalform: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\text{rk } A = 1$ gilt $\det(E + A) = 1 + \text{Spur } A$.

(3) Man zeige:

(a) Sind A und B zwei ähnliche Matrizen, so gilt $\dim H_k(A, \lambda) = \dim H_k(B, \lambda)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

(b) Ist A eine Matrix in Jordanscher Normalform, λ ein Eigenwert von A und $k \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist die Anzahl der Jordanblöcke der Größe k zum Eigenwert λ in A genau

$$2 \dim H_k(A, \lambda) - \dim H_{k-1}(A, \lambda) - \dim H_{k+1}(A, \lambda).$$

(c) Zwei Matrizen in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie aus den gleichen Jordanblöcken, nur evtl. in anderer Reihenfolge bestehen.

(4) Eine quadratische Matrix $N \in K^{n \times n}$ heißt nilpotent, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^k = 0$.

(a) Zeige, dass sich jede komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ als Summe $A = D + N$ schreiben lässt, wobei D diagonalisierbar und N nilpotent ist, sowie $DN = ND$ gilt.

(b) Berechne mit Hilfe von (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$ und $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

(c) Wir definieren eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bestimme eine explizite Formel für alle a_n .

Hinweis: Die Rekursionsgleichung ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.