Andreas Gathmann und Marco Albert Sommersemester 2025

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 1

Abgabe: Montag, 5. Mai

(1) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche dieser Matrizen ist / sind diagonalisierbar? Im Fall der Diagonalisierbarkeit bestimme man jeweils eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ bzw. $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sind A und B ähnlich zueinander?

(d) Wie kann man mit Hilfe von (a) und (b) auf einfache Art eine allgemeine Formel für die Potenzen A^n mit $n \in \mathbb{N}$ bestimmen? (Ihr braucht die Rechnung nicht explizit durchzuführen.)

(2) (a) Es sei λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{GL}(n,K)$.
Zeige, dass dann $\lambda \neq 0$ gilt, und $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1} ist mit $\mu_{\mathrm{g}}(A^{-1},\frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda)$ und $\mu_{\mathrm{a}}(A^{-1},\frac{1}{\lambda}) = \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine reelle quadratische Matrix mit $\chi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$. Berechne χ_{A^2}.

(3) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen.

(a) Zeige für alle $\lambda \in K\backslash\{0\}$, dass die lineare Abbildung $f\colon K^n \to K^n$, $x \mapsto Bx$ den Eigenraum $\mathrm{Eig}(AB,\lambda)$ isomorph auf $\mathrm{Eig}(BA,\lambda)$ abbildet. Insbesondere gilt also $\mu_{\mathrm{g}}(AB,\lambda) = \mu_{\mathrm{g}}(BA,\lambda)$.

(b) Finde für $n = 2$ und $K = \mathbb{R}$ ein Beispiel dafür, dass nicht unbedingt $\mu_{\mathrm{g}}(AB,0) = \mu_{\mathrm{g}}(BA,0)$ gelten muss.

(4) (a) Es seien $V = C^0(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

(b) Es seien V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ wieder die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

Die Abgabe der Lösungen kann allein oder in Zweiergruppen erfolgen. Um den Arbeitsaufwand dabei sowohl für euch als auch für die Übungsleiter beim Korrigieren in Grenzen zu halten, solltet ihr möglichst zu zweit abgeben. Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eures Übungsgruppenleiters neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.