

### 30. Der Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale

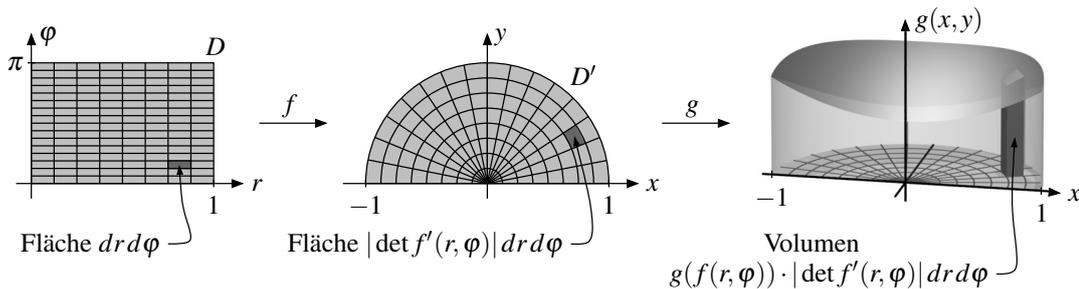
In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, wie man mehrdimensionale Integrale über gewisse Funktionen auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definieren und mit Hilfe des Satzes von Fubini auf  $n$ -dimensionale Integrale zurückführen kann. Ein wesentliches Phänomen dabei ist, dass die Integrationsgrenzen der zuerst ausgeführten Integrale dabei wie in Beispiel 29.34 oder Folgerung 29.38 von den späteren Integrationsvariablen abhängen, wenn der Integrationsbereich nicht gerade ein Quader ist. So würde z. B. wie im Bild unten rechts das Integral über eine Funktion  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  auf der oberen Hälfte des Einheitskreises

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

zu einem Doppelintegral der Form

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} g(x, y) dy \right) dx$$

mit variabler Grenze für  $y$  führen. Dieses Einsetzen der variablen Grenzen im  $y$ -Integral kann natürlich schnell zur Folge haben, dass der Integrand für das äußere  $x$ -Integral zu kompliziert wird, um seine Stammfunktion explizit zu bestimmen.



Es wäre daher schön, wenn wir für die Berechnung des Integrals andere Koordinaten verwenden könnten. So würden sich z. B. für die gerade betrachtete obere Hälfte des Einheitskreises Polarkoordinaten  $r, \varphi$  wie in Satz 9.27 und Beispiel 27.4 anbieten, denn in diesen Koordinaten lässt sich diese Menge  $D'$  gerade durch den Quader  $D$  mit den Grenzen  $0 \leq r \leq 1$  und  $0 \leq \varphi \leq \pi$  wie im Bild oben links beschreiben – formal ist also  $D' = f(D)$  mit der Polarkoordinatenabbildung  $f: (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Könnten wir das Integral auch in diesen Koordinaten berechnen, so ergäbe sich damit ein Doppelintegral

$$\int_0^1 \left( \int_0^\pi \dots d\varphi \right) dr,$$

in dem die Integrationsgrenzen nun konstant sind und die zu integrierende Funktion durch das Einsetzen der inneren Grenzen damit nicht unnötig verkompliziert wird. Wir wollen daher jetzt untersuchen, wie sich mehrdimensionale Integrale unter derartigen Variablentransformationen verhalten, also wie die Integrale über  $g$  und  $g \circ f$  miteinander zusammenhängen, wenn  $f$  eine Koordinatentransformation wie oben ist. Mit anderen Worten wollen wir eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel aus Satz 12.31 finden.

Aus dem Bild oben lässt sich bereits ablesen, wie eine solche Transformationsformel für Integrale aussehen sollte: Wollen wir das Integral  $\int_{D'} g(x, y) d(x, y)$ , also das Volumen unter dem Graphen von  $g$  über  $D'$  berechnen, so können wir uns dieses Volumen wie gewohnt als Summe der Volumina von kleinen Säulen wie im Bild oben rechts vorstellen, deren Grundflächen nun aber keine Quader mehr sind, sondern Bilder kleiner Quader unter der Koordinatentransformation  $f$ . In der Tat werden

wir sehen, dass  $f$  die Volumina (d. h. hier die 2-dimensionalen Flächeninhalte) kleiner Mengen näherungsweise mit dem Betrag der Determinante der Ableitungsmatrix  $f'$  multipliziert, so dass also z. B. ein kleiner Quader mit Seitenlängen  $dr$  und  $d\varphi$  in eine Menge mit Flächeninhalt  $|\det f'(r, \varphi)| \cdot dr d\varphi$  transformiert wird. Summiert man dies nun auf, so würde man also erwarten, dass sich das Integral über  $g$  als

$$\int_D g(f(r, \varphi)) \cdot |\det f'(r, \varphi)| d(r, \varphi) = \int_{D'} g(x, y) d(x, y)$$

mit  $D = [0, 1] \times [0, \pi]$  in den neuen Koordinaten  $(r, \varphi)$  berechnen lässt. In der Tat ist dies bereits die gesuchte Transformationsformel (im Fall der obigen Koordinaten  $(x, y)$  bzw  $(r, \varphi)$ ).

Wir wollen diese anschaulichen Argumente nun zu einem exakten Beweis machen. Allerdings ist der daraus resultierende wichtige Satz 30.8 ohne Zweifel die am aufwendigsten zu zeigende Aussage in diesem Skript. Um den Beweis besser verdaulich zu machen, werden wir daher von drei vorbereitenden Lemmas im nächsten Abschnitt 30.A zunächst nur Beweisideen angeben, die für das Verständnis des gesamten Beweises ausreichen. Bei Interesse könnt ihr die exakten Beweise der Vorbereitungslemmas in Abschnitt 30.C finden; in der Vorlesung wird davon je nach zur Verfügung stehender Zeit ein gewisser Anteil behandelt. Darüber hinaus könnt ihr einen vollständigen Beweis des Transformationssatzes im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie auch in der Vorlesung „Maß- und Integrationstheorie“ sehen.

### 30.A Beweisskizze des Transformationssatzes

Bevor wir mit der Untersuchung des Transformationssatzes beginnen können, müssen wir als Erstes festlegen, welche Voraussetzungen wir dafür an unsere Koordinatentransformation stellen wollen. Natürlich sollte eine solche Koordinatentransformation  $f$  zunächst einmal bijektiv sein. Da wie oben schon angekündigt die Ableitung  $f'$  im Integral der Transformationsformel auftreten wird, werden wir zusätzlich die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  (und auch der Umkehrfunktion) benötigen. Derartige Abbildungen werden als Diffeomorphismen bezeichnet – was man sich als Verschmelzung der Worte „differenzierbar“ und „Isomorphismus“ vorstellen kann.

**Definition 30.1** (Diffeomorphismen). Eine Abbildung  $f: D \rightarrow D'$  zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv ist, und sowohl  $f$  als auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}: D' \rightarrow D$  stetig differenzierbar sind.

**Beispiel 30.2** (Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ ). Die Polarkoordinatenabbildung aus Satz 9.27 und Beispiel 27.4 wird z. B. durch die Einschränkung

$$f: \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

also das Herausnehmen des Nullpunkts und der positiven  $x$ -Achse aus dem Zielbereich, zu einem Diffeomorphismus. Da Start- und Zielraum eines Diffeomorphismus offen sein müssen, ist es nicht möglich, diesen Diffeomorphismus so zu erweitern, dass sein Bild der gesamte  $\mathbb{R}^2$  wird – aber da (nach Einschränkung auf ein beschränktes Gebiet der Ebene) die fehlenden Punkte auf der  $x$ -Achse eine Nullmenge bilden, wird dies beim Integrieren am Ende kein Problem sein.

78

Auf unserem Weg zum Transformationssatz beginnen wir nun mit der oben schon erwähnten Frage, wie sich Volumina unter Diffeomorphismen transformieren. Leider haben wir dabei ein kleines technisches Problem, da wir ja in Kapitel 29 gesehen haben, dass wir gar nicht jeder beliebigen Menge sinnvoll ein Volumen zuordnen können. Wir müssen daher zunächst erst einmal überprüfen, ob messbare Mengen durch Diffeomorphismen überhaupt wieder in ebenfalls messbare Mengen umgewandelt werden. In den für uns relevanten Fällen bestätigt uns dies glücklicherweise das folgende technische Lemma, dessen vollständigen Beweis ihr (zusammen mit denen der folgenden Lemmas 30.5 und 30.7) in Abschnitt 30.C finden könnt.

**Lemma 30.3** (Diffeomorphe Bilder kompakter Mengen). *Es sei  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subset D$ :*

- (a) *Ist  $K$  eine Nullmenge, so auch  $f(K)$ .*
- (b) *Ist  $K$  messbar, so auch  $f(K)$ .*

*Beweisidee.*

- (a) Da  $f'$  nach Voraussetzung stetig ist, existiert das Maximum  $s := \max \|f'(K)\| \in \mathbb{R}_{>0}$  auf der kompakten Menge  $K$ . Nach dem Mittelwertsatz aus Folgerung 26.19 bedeutet dies, dass  $f$  Längen höchstens um den Faktor  $s$ , und damit Volumina höchstens um den Faktor  $s^n$  streckt. Überdecken wir  $K$  also mit endlich vielen Quadern mit Gesamtvolumen kleiner als  $\frac{\varepsilon}{s^n}$ , so überdecken deren Bilder unter  $f$  die Menge  $f(K)$  und haben Gesamtvolumen kleiner als  $\varepsilon$ .
- (b) Als in beide Richtungen stetige Abbildungen erhalten Diffeomorphismen alle topologischen Begriffe, insbesondere auch Ränder. Ist  $K$  messbar, also  $\partial K$  nach Folgerung 29.28 eine Nullmenge, so ist damit auch  $\partial f(K) = f(\partial K)$  nach (a) eine Nullmenge, d. h. auch  $f(K)$  ist messbar.  $\square$

**Bemerkung 30.4.** Beachte in der Beweisidee von Lemma 30.3 (a), dass der mehrdimensionale Mittelwertsatz die Differenz  $f(x) - f(a)$  zweier Funktionswerte durch die Ableitung  $f'$  auf der Verbindungsstrecke  $\bar{ax}$  abschätzt – dass  $K$  hier aber nicht als konvex vorausgesetzt wurde und  $\bar{ax}$  daher nicht unbedingt in  $K$  liegen muss. In der Tat sind Nullmengen „fast nie“ konvex, wie schon das Beispiel einer Kreislinie in  $\mathbb{R}^2$  zeigt (siehe Beispiel 29.18). Die Umgehung dieses Problems ist ein wesentlicher Teil im exakten Beweis von Lemma 30.3 (a) in Abschnitt 30.C.

Sind  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus und  $K \subset D$  eine kompakte messbare Menge, so wissen wir nun also nach Lemma 30.3, dass das Volumen von  $f(K)$  existiert. Aber wie können wir es berechnen? Dazu betrachten wir als Vereinfachung zunächst eine *lineare* Abbildung, und approximieren anschließend einen beliebigen Diffeomorphismus lokal mit seiner durch die Ableitung gegebenen linearen Näherung.

**Lemma 30.5** (Volumenformel für lineare Isomorphismen). *Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein linearer Isomorphismus, also  $f: x \mapsto Ax$  für eine invertierbare Matrix  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Dann gilt für jede kompakte messbare Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$*

$$\text{vol } f(K) = \text{vol } K \cdot |\det A|.$$

*Beweisidee.* Mit einer Approximation durch eine Vereinigung kleiner Quader genügt es, den Fall zu betrachten, dass  $K$  selbst ein Quader ist. Da jede invertierbare Matrix nach Folgerung 15.36 ein Produkt von Elementarmatrizen wie in Konstruktion 15.24 ist, reicht es außerdem, für  $A$  eine Elementarmatrix zu nehmen. Von diesen gibt es aber nur zwei Typen: Im Fall  $A = F_k(\lambda)$  streckt  $f$  die  $k$ -te Koordinate um  $\lambda$ , was offensichtlich das Volumen mit  $|\lambda|$  multipliziert; und im Fall  $A = F_{k,l}(\lambda)$  haben wir eine Scherung, die nach dem Prinzip von Cavalieri aus Beispiel 29.40 das Volumen nicht ändert.  $\square$

**Beispiel 30.6.**

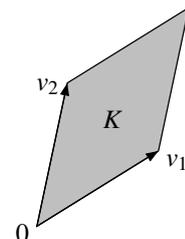
- (a) Es sei  $K$  wie im Bild rechts ein von  $n$  linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespanntes Parallelotop

$$K = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1\}.$$

Offensichtlich ist  $K$  dann das Bild des Einheitswürfels

$$Q = [0, 1]^n = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1\}$$

unter der linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix  $A = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ , die für alle  $i = 1, \dots, n$  den  $i$ -ten Einheitsvektor  $e_i$  auf  $v_i$  abbildet. Nach Lemma 30.5 gilt damit also  $\text{vol } K = \text{vol } Q \cdot |\det A| = |\det A|$ .



- (b) Eine kompakte messbare Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  wird durch die Streckung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \lambda x$  um den Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  nach Lemma 30.5 auf die Menge  $f(K) = \lambda K$  mit dem Volumen  $\text{vol} f(K) = \lambda^n \text{vol} K$  abgebildet, da die Determinante der zugehörigen Abbildungsmatrix  $\lambda E$  gleich  $\lambda^n$  ist.
- (c) Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (bezüglich des Standardskalarprodukts) orthogonale Abbildung, also wie in Bemerkung 22.4 (b) z. B. eine Drehung oder Spiegelung, so wird  $f$  nach Lemma 22.3 (a) durch eine orthogonale Matrix  $A$  beschrieben, deren Determinante nach Lemma 22.7 (a) Betrag 1 hat. In diesem Fall erhalten wir aus Lemma 30.5 also für jede kompakte messbare Menge die anschaulich einleuchtende Aussage  $\text{vol} f(K) = \text{vol} K$ , also dass das Volumen unter Drehungen und Spiegelungen unverändert bleibt.

**Lemma 30.7** (Volumen unter Diffeomorphismen). *Es sei  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede kompakte messbare Menge  $K \subset D$*

$$\text{vol} K \cdot \min |\det f'(K)| \leq \text{vol} f(K) \leq \text{vol} K \cdot \max |\det f'(K)|.$$

*Beweisidee.* Wir approximieren  $K$  wieder durch kleine Quader  $Q$ . Ist  $Q$  ein solcher Quader und  $a \in Q \cap K$ , so ist  $f$  auf  $Q$  näherungsweise linear mit Abbildungsmatrix  $f'(a)$ . Die Abbildung  $f$  multipliziert  $\text{vol} Q$  also nach Lemma 30.5 in etwa mit  $|\det f'(a)|$ , was zwischen  $\min |\det f'(K)|$  und  $\max |\det f'(K)|$  liegt. Aufsummieren über alle Quader liefert dann die Behauptung.  $\square$

Mit der Vorarbeit aus den Lemmas 30.3, 30.5 und 30.7 können wir nun einen exakten Beweis des Transformationssatzes geben.

**Satz 30.8 (Transformationssatz für Integrale).** *Es sei  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen beschränkten offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede Funktion  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx = \int_{D'} g(y) dy,$$

*sofern diese beiden Integrale existieren.*

*Beweis.* Zunächst einmal genügt es, den Satz für nicht-negative Funktionen  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  zu zeigen: Nach Folgerung 29.8 (b) können wir ihn im allgemeinen Fall dann nämlich separat auf  $g_+$  und  $g_-$  anwenden und erhalten durch Subtraktion dieser beiden Transformationsformeln die gewünschte Aussage auch für  $g$ .

Außerdem reicht es, nur die Ungleichung

$$\int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx \leq \int_{D'} g(y) dy \quad (1)$$

zu zeigen: Anwenden dieser Ungleichung auf den Diffeomorphismus  $f^{-1}: D' \rightarrow D$  und die Funktion  $(g \circ f) \cdot |\det f'|: D \rightarrow \mathbb{R}$  liefert dann nämlich auch die andere Ungleichung

$$\int_{D'} g(y) dy = \int_D (g \circ f)(f^{-1}(y)) \cdot \underbrace{|\det f'(f^{-1}(y))| \cdot |\det (f^{-1})'(y)|}_{=1} dy \leq \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx,$$

da  $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = (f \circ f^{-1})'(y) = \text{id}'(y) = E$  nach der Kettenregel aus Satz 25.30 gilt.

Für den Beweis von (1) approximieren wir das Integral über  $D$  zunächst durch Integrale über kompakte Mengen: Es sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig; nach Aufgabe 29.32 (b) gibt es dann eine kompakte messbare Teilmenge  $K \subset D$  mit

$$\int_K g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx > \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx - \varepsilon. \quad (2)$$

Es sei nun  $Z$  eine beliebige Zerlegung eines Quaders, der  $K$  enthält. Dann gilt zunächst für alle  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \subset K$

$$\begin{aligned} \text{vol} Q \cdot \inf g(f(Q)) \cdot \min |\det f'(Q)| &\stackrel{30.7}{\leq} \text{vol} f(Q) \cdot \inf g(f(Q)) \\ &= \int_{f(Q)} \inf g(f(Q)) dy \stackrel{29.7(c)}{\leq} \int_{f(Q)} g(y) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Wir addieren nun diese Ungleichungen für alle diese Teilquader. Auf der linken Seite von (3) erhalten wir dann genau die Untersumme  $US((g \circ f)_K, |\det f'|_K, Z)$  wie in Aufgabe 28.16. Beachte dabei, dass Quader  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \not\subset K$  keinen Beitrag dazu liefern, da  $(g \circ f)_K$  und  $|\det f'|_K$  dann an mindestens einem Punkt von  $Q$  Null sind und ihr Minimum auf  $Q$  damit ebenfalls gleich 0 ist. Beachte außerdem, dass (wie in Aufgabe 28.16 gefordert) nicht nur das Produkt  $(g \circ f) \cdot |\det f'|$  auf  $K$  integrierbar ist, sondern auch beide Faktoren separat:

- Die Funktion  $|\det f'|$  ist stetig und beschränkt auf der kompakten messbaren Menge  $K$  und damit integrierbar nach dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium aus Folgerung 29.30.
- Da  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $|\det f'|$  überall positiv. Damit ist die Funktion  $\frac{1}{|\det f'|}$  ebenfalls stetig und beschränkt auf der kompakten Menge  $K$ , also dort ebenfalls integrierbar. Nach Aufgabe 28.16 ist somit auch das Produkt  $g \circ f = ((g \circ f) \cdot |\det f'|) \cdot \frac{1}{|\det f'|}$  auf  $K$  integrierbar.

Auf der rechten Seite von (3) dagegen ergibt sich nach Folgerung 29.9 (a) das Integral  $\int_A g(y) dy$  über die Menge  $A := \bigcup_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \subset K} f(Q) \subset D'$ , da für je zwei verschiedene solche Teilquader  $Q_1, Q_2 \subset K$  der Schnitt  $f(Q_1) \cap f(Q_2) = f(Q_1 \cap Q_2)$  nach Lemma 30.3 (a) eine Nullmenge ist. Wir erhalten durch die Summation von (3) also

$$US((g \circ f)_K, |\det f'|_K, Z) \leq \int_A g(y) dy \leq \int_{D'} g(y) dy.$$

Bilden wir hiervon nun das Supremum über alle Zerlegungen  $Z$ , ergibt sich nach Aufgabe 28.16

$$\int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx - \varepsilon \stackrel{(2)}{<} \int_K g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx \leq \int_{D'} g(y) dy.$$

Mit der Grenzwertbildung  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt also die Behauptung (1). □

79

**Bemerkung 30.9.**

- Man kann zeigen, dass die Aussage von Satz 30.8 bereits gilt, wenn nur die Ausgangsfunktion  $g$  als integrierbar vorausgesetzt wird – die Integrierbarkeit der transformierten Funktion  $(g \circ f) \cdot |\det f'|$  ist dann automatisch. Wir werden dies hier jedoch nicht beweisen, da dies noch etwas aufwendiger wäre und sich die Integrierbarkeit beider Funktionen in den meisten konkret gegebenen Anwendungsfällen ohnehin sofort aus dem Lebesgueschen Integrabilitätskriterium in Folgerung 29.30 ergibt.
- Im Fall  $n = 1$  ist  $f'(x)$  im Transformationssatz eine  $1 \times 1$ -Matrix, so dass  $\det f'(x) = f'(x)$  gilt. Die Formel aus Satz 30.8 sieht damit bis auf die Betragsstriche formal so aus wie die Substitutionsregel für eindimensionale Integrale aus Satz 12.31.

Diese Betragsstriche kommen daher, dass im Fall einer *monoton fallenden* Koordinatentransformation in Satz 12.31 (also wenn dort  $f' < 0$  gilt) durch die Substitution der Grenzen im resultierenden Integral die Obergrenze kleiner ist als die Untergrenze – was gemäß Notation 12.15 genau das Vorzeichen des Integrals ändert. Dieses Vorzeichen wird in unserer mehrdimensionalen Integrationstheorie (in der es generell keine Unter- und Obergrenzen, sondern nur eine Menge als Integrationsbereich gibt) berücksichtigt, indem wir statt  $f'$  den Betrag von  $f'$  verwenden.

Als direkte Folgerung des Transformationssatzes erhalten wir die folgende Volumenformel, die die Aussage aus Lemma 30.5 auf Diffeomorphismen verallgemeinert und die Ungleichungen in Lemma 30.7 zu einer Gleichung macht.

**Folgerung 30.10** (Volumenformel für Diffeomorphismen). *Es sei wieder  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede kompakte messbare Menge  $K \subset D$*

$$\text{vol } f(K) = \int_K |\det f'(x)| dx.$$

*Beweis.* Anwenden des Transformationssatzes 30.8 auf die Indikatorfunktion  $1_{f(K)}$  liefert sofort

$$\text{vol } f(K) = \int_{D'} 1_{f(K)}(y) dy = \int_D 1_{f(K)}(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx = \int_K |\det f'(x)| dx. \quad \square$$

### 30.B Anwendungen des Transformationssatzes

In diesem Abschnitt wollen wir ein paar konkrete Fälle des Transformationssatzes untersuchen, hauptsächlich für die schon in der Einleitung erwähnten Polarkoordinaten und die dazu analogen Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ .

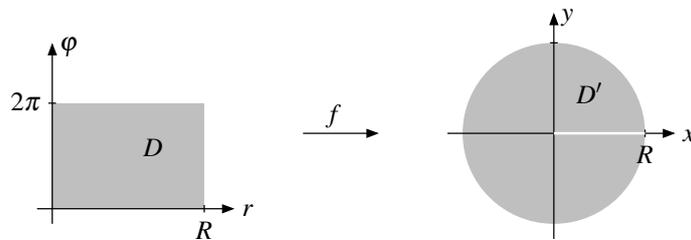
**Beispiel 30.11** (Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ ). Wir betrachten noch einmal die ebene Polarkoordinatenabbildung  $f: \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}$  aus Beispiel 30.2. Schränken wir sie weiter auf beschränkte offene Mengen  $D$  und  $D'$  ein, so dass  $f|_D: D \rightarrow D'$  dort bijektiv und damit ebenfalls wieder ein Diffeomorphismus ist, besagt Satz 30.8 also

$$\int_D g(f(r, \varphi)) r d(r, \varphi) = \int_{D'} g(x, y) d(x, y)$$

(sofern die beiden Integrale existieren), da wir in Beispiel 27.4 bereits die Determinante der Ableitungsmatrix  $\det f'(r, \varphi) = r$  berechnet haben. Hier sind zwei konkrete Beispiele dafür.

- (a) (*Kreisfläche*) Wir wollen den Flächeninhalt des (euklidischen) Kreises  $K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  berechnen. Dazu verwenden wir wie im Bild unten Polarkoordinaten mit Start- bzw. Zielbereich

$$D = (0, R) \times (0, 2\pi) \quad \text{und} \quad D' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 < R^2 \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}.$$



Die Menge  $D'$  unterscheidet sich dabei vom gewünschten Kreis  $K_R(0)$  nur durch eine Nullmenge, so dass es keine Rolle spielt, von welcher dieser beiden Mengen wir das Volumen berechnen. Aus dem gleichen Grund sind auch die resultierenden Integrale in Polarkoordinaten über die Bereiche  $(0, R) \times (0, 2\pi)$  und  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  gleich. Derartige Abänderungen der Integrationsbereiche, um Mengen je nach Bedarf offen bzw. abgeschlossen zu machen, werden wir im Folgenden in der Regel durchführen, ohne dies jedes Mal explizit zu erwähnen.

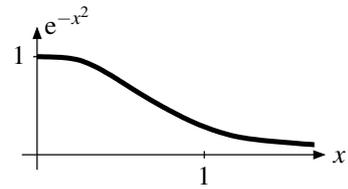
Wir erhalten für die gesuchte Kreisfläche also mit Hilfe des Transformationssatzes (bzw. Folgerung 30.10) wie erwartet

$$\begin{aligned} \text{vol } K_R(0) &= \int_{D'} 1 d(x, y) = \int_D r d(r, \varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

- (b) Das in der Praxis häufig vorkommende uneigentliche eindimensionale Integral

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

lässt sich nicht mit den herkömmlichen Methoden berechnen, da der Integrand keine Stammfunktion besitzt, die sich mit den bekannten speziellen Funktionen aus Kapitel 9 ausdrücken lässt.



In der Tat kann man Integrale über  $e^{-x^2}$  mit gegebenen Grenzen in  $\mathbb{R}$  aus diesem Grund nur mit Näherungsverfahren berechnen. Das obige *uneigentliche* Integral  $I$  ist jedoch mit einem unerwarteten Trick durch Polarkoordinaten exakt berechenbar: Dazu quadrieren wir das Integral zunächst und erhalten

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-y^2} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \int_0^n e^{-y^2} dy \right) \quad (\text{Grenzwertsatz 5.13 (b)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,n] \times [0,n]} e^{-x^2-y^2} d(x,y) \quad (\text{Satz 28.17 von Fubini}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y). \quad (\text{Definition 29.45 (a)}) \end{aligned}$$

Verwenden wir zur Berechnung dieses uneigentlichen zweidimensionalen Integrals über  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  nun die ausschöpfende Folge von Viertelkreisen

$$D_n := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq n^2 \text{ und } x, y \geq 0 \right\}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ , so erhalten wir mit Polarkoordinaten wegen  $x^2 + y^2 = r^2$

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-r^2} r dr.$$

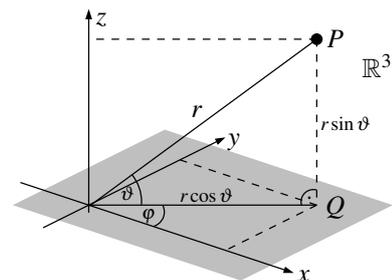
Im Gegensatz zum ursprünglichen Problem ist dieses Integral nun wegen des zusätzlichen Faktors  $r$  mit Hilfe einer Substitution für  $r^2$  einfach zu lösen: Wir erhalten

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n = -\frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n^2} - 1) = \frac{\pi}{4}$$

und damit für das Ausgangsintegral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Beispiel 30.12** (Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ ). Die zu Polarkoordinaten analoge Konstruktion im Dreidimensionalen sind die sogenannten *Kugelkoordinaten*. Hier beschreibt man einen Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  wie im Bild rechts durch eine Abstandskoordinate  $r$  sowie zwei Winkelkoordinaten  $\varphi$  und  $\vartheta$ : Ist  $Q$  die orthogonale Projektion von  $P$  auf die  $x$ - $y$ -Ebene, so ist  $r$  der Abstand von  $P$  zum Nullpunkt,  $\varphi$  der Winkel zwischen  $Q$  und der  $x$ -Achse und  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $P$  und der  $x$ - $y$ -Ebene.



Der Abstand von  $Q$  zum Nullpunkt ist dann  $r \cos \vartheta$ , und damit gilt für die Koordinaten der beteiligten Punkte

$$Q = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Kugelkoordinatenabbildung ist damit also

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

und sie wird offensichtlich bijektiv, wenn wir Start- und Zielbereich auf

$$D = \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad D' = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, z \in \mathbb{R} \right\}$$

einschränken. Die Jacobi-Matrix von  $f$  ist damit

$$f'(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante lässt sich z. B. mit Beispiel 18.13 (b) einfach zu  $\det f'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$  berechnen.

Wie in Beispiel 30.11 (a) können wir damit nun z. B. mit Folgerung 30.10 das Volumen der euklidischen Kugel  $K_R(0)$  in  $\mathbb{R}^3$  vom Radius  $R$  berechnen und erhalten wie erwartet

$$\begin{aligned} \text{vol} K_R(0) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi \, dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 \, dr \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

**Bemerkung 30.13** (Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$ ). Die Idee aus Beispiel 30.12 kann auch rekursiv verwendet werden, um Kugelkoordinaten in einem beliebigen  $\mathbb{R}^n$  zu konstruieren. Dazu sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Lin}(e_1, \dots, e_{n-1}) \cong \mathbb{R}^{n-1}$  die orthogonale Projektion, die die letzte Koordinate eines Vektors auf 0 setzt. Wir beschreiben nun einen beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \text{Lin}(e_n)$  durch:

- seine euklidische Länge  $r := \|x\|_2$ ;
- den orientierten Winkel  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  zwischen  $f(x)$  und  $x$ , so dass  $x_n = r \sin \alpha$  ist und  $f(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$  die Länge  $r \cos \alpha$  hat;
- die Winkelkoordinaten der rekursiv bekannten  $(n-1)$ -dimensionalen Polarkoordinaten für den projizierten Punkt  $f(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Auf diese Art werden die Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  (bis auf eine Nullmenge) also durch ihre Länge und  $n-2$  Winkelkoordinaten beschrieben.

Berechnet man damit die Volumina der  $n$ -dimensionalen euklidischen Einheitskugeln  $K_1(0)$  analog zu Beispiel 30.12, so erhält man für kleine  $n$  die folgenden (exakten und gerundeten) Werte:

$n$	1	2	3	4	5	6
$\text{vol} K_1(0) \subset \mathbb{R}^n$	2	$\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$
	2,00	3,14	4,19	4,93	5,26	5,17

Dabei fällt auf, dass dieses Volumen für  $n=5$  ein Maximum besitzt – in der Tat kann man zeigen, dass es für  $n > 6$  weiter fällt und für  $n \rightarrow \infty$  sogar gegen 0 konvergiert.

**Aufgabe 30.14.** Berechne das Integral  $\int_D (2x - y) d(x, y)$ , wobei  $D$  das Parallelogramm mit den Eckpunkten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  ist.

(Hinweis: Betrachte dazu den Diffeomorphismus  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$ .)

**Aufgabe 30.15.** Berechne das Integral  $\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} d(x, y)$ , wobei  $D$  das Gebiet ist, das von den vier Kurven  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$ ,  $y = x$  und  $y = 2x$  im Bereich  $x \geq 0$  begrenzt wird.

**Aufgabe 30.16.** Es seien  $A \subset \mathbb{R}$  eine kompakte messbare Menge und

$$M_A := \{((1 - t^2)x, t) : x \in A \text{ und } t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- (a) Skizziere  $M_A$  für den Fall  $A = [1, 2]$ .
- (b) Zeige, dass  $M_A$  messbar ist.
- (c) Berechne  $\text{vol} M_A$  in Abhängigkeit von  $\text{vol} A$ .

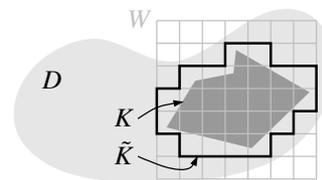
**Aufgabe 30.17.** Führe wie in Beispiel 30.13 Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^4$  ein und zeige damit, dass eine vierdimensionale euklidische Kugel  $K_R(0)$  mit  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  das Volumen  $\text{vol} K_R(0) = \frac{\pi^2 R^4}{2}$  hat.

80

### 30.C Beweise der Lemmas

In diesem Anhang wollen wir nun die exakten Beweise der drei Vorbereitungslemmas für den Transformationssatz aus Abschnitt 30.A geben, die wir bisher nur skizziert hatten. Wir verwenden dazu durchgängig die Maximumsnorm für Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  und die davon induzierte Zeilensummennorm für Matrizen (wie z. B. Ableitungen).

**Konstruktion 30.18** (Angepasste Zerlegungen). Im Folgenden werden wir mehrfach die Situation haben, dass wir eine kompakte Teilmenge  $K$  in einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  betrachten (auf der dann ein Diffeomorphismus definiert ist). In diesem Fall bietet es sich bei der Untersuchung von Volumina oder Integralen an, spezielle Zerlegungen wie im Bild rechts zu wählen, die wir jetzt beschreiben wollen.



Da  $K$  kompakt und damit beschränkt ist, können wir zunächst einen Würfel  $W$  wählen, der  $K$  enthält – also einen Quader, dessen Seiten alle gleich lang sind. Nach Aufgabe 23.62 (angewendet auf die offene Überdeckung von  $K$ , die aus nur der einen Menge  $D$  besteht) gibt es nun ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ , so dass  $U_\delta(a) \subset D$  für alle  $a \in K$  gilt. Wie im Bild fixieren wir jetzt eine Zerlegung  $Z$  von  $W$  in gleich große Teilwürfel mit Seitenlänge kleiner als  $\delta$ . Jeder Teilwürfel  $Q$ , der  $K$  in mindestens einem Punkt  $a$  schneidet, liegt dann also in  $U_\delta(a)$ , und damit in  $D$ . Damit ist

$$\tilde{K} := \bigcup_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z) \\ Q \cap K \neq \emptyset}} Q$$

eine kompakte Vereinigung von Würfeln mit  $K \subset \tilde{K} \subset D$ ; sie ist im Bild dick umrandet eingezeichnet.

Nach Aufgabe 28.15 können wir uns nun bei der Untersuchung von Volumina oder Integralen auf  $K$  auf Zerlegungen  $Z$  von  $W$  beschränken, die aus  $\tilde{Z}$  entstehen, indem wir die Teilwürfel von  $\tilde{Z}$  wiederum in kleine Teilwürfel unterteilen. Eine solche Zerlegung hat dann offensichtlich die Eigenschaft, dass jeder Teilwürfel von  $Z$ , der  $K$  schneidet, auch in einem Teilwürfel von  $\tilde{Z}$  liegt, der  $K$  schneidet, und somit in  $\tilde{K}$  enthalten ist. Wir bezeichnen diese Zerlegungen  $Z$  im Folgenden als *angepasste Zerlegungen*.

Mit dieser Vorbereitung ist der exakte Beweis unseres ersten Lemmas zur Messbarkeit von Bildern kompakter messbarer Mengen unter Diffeomorphismen nun eine direkte Folgerung aus dem Mittelwertsatz:

*Beweis von Lemma 30.3 (a).* Es seien  $\tilde{Z}$  und  $\tilde{K}$  wie in Konstruktion 30.18. Da  $f'$  stetig und  $\tilde{K}$  kompakt ist, existiert nach Folgerung 24.35 das Maximum  $s := \max \|f'(\tilde{K})\|$ .

Es sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Wegen  $\text{vol} K = 0$  können wir eine an  $K \subset D$  angepasste Zerlegung finden mit

$$\sum_{\substack{Q \in \mathcal{TQ}(Z) \\ Q \cap K \neq \emptyset}} \text{vol} Q < \frac{\varepsilon}{s^n}.$$

Wir bezeichnen die in dieser Summe auftretenden Würfel mit  $Q_1, \dots, Q_k \subset \tilde{K}$ . Man kann sie als konvexe abgeschlossene Kugeln

$$Q_i = K_r(a_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a_i\| \leq r\}$$

in der Maximumsnorm schreiben, wobei  $a_i$  ihre Mittelpunkte sind und  $r$  ihr gemeinsamer Radius ist. Dann gilt nach der Folgerung 26.19 aus dem Mittelwertsatz aber für alle  $x \in Q_i$ , dass  $f(x) \in R_i$  mit

$$R_i = K_{sr}(f(a_i)) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - f(a_i)\| \leq sr\}.$$

Da die Würfel  $Q_1, \dots, Q_k$  die Menge  $K$  überdecken, überdecken die Würfel  $R_1, \dots, R_k$  nun also  $f(K)$ , und es gilt

$$\sum_{i=1}^k \text{vol} R_i = k \cdot (2sr)^n = s^n \sum_{i=1}^k \text{vol} Q_i < s^n \cdot \frac{\varepsilon}{s^n} = \varepsilon.$$

Also ist  $f(K)$  eine Nullmenge. □

*Beweis von Lemma 30.3 (b).* Zunächst ist (auch ohne Voraussetzungen an  $K$ )  $f(\partial K) = \partial f(K)$ , denn für alle  $a \in D$  gilt

$$\begin{aligned} f(a) \in f(\partial K) &\Leftrightarrow a \in \partial K \\ &\Leftrightarrow \text{jede Umgebung von } a \text{ enthält einen Punkt von } K \text{ und einen von } D \setminus K \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \text{jede Umgebung von } f(a) \text{ enthält einen Punkt von } f(K) \text{ und einen von } D' \setminus f(K) \\ &\Leftrightarrow f(a) \in \partial f(K), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die bijektive Abbildung  $f$  angewendet haben und benutzt haben, dass  $f$  nach Lemma 24.16 wegen der Stetigkeit von  $f$  und  $f^{-1}$  genau die Umgebungen von  $a$  auf Umgebungen von  $f(a)$  abbildet.

Ist nun  $K$  messbar, so ist  $\partial K$  nach Folgerung 29.28 eine Nullmenge. Außerdem ist  $K$  nach Voraussetzung kompakt und damit nach Satz 23.51 (a) beschränkt, so dass  $\partial K$  nach Lemma 23.40 (e) und Satz 23.51 (b) ebenfalls abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt ist. Also ist  $\partial f(K) = f(\partial K)$  nach Lemma 30.3 (a) eine Nullmenge, woraus sich wieder mit Folgerung 29.28 die Messbarkeit von  $f(K)$  ergibt. □

Wir kommen nun zu unserem zweiten Lemma zur Transformation von Volumina unter linearen Abbildungen. Wie schon in Abschnitt 30.A erwähnt ist die Idee dabei, die Aussage auf den Fall zu reduzieren, dass die betrachtete Menge ein Quader und die lineare Abbildung durch eine Elementarmatrix gegeben ist – und in diesem Fall ist die Aussage dann offensichtlich.

*Beweis von Lemma 30.5.* Wir machen zunächst drei Reduktionsschritte:

- (1) Es genügt, die Ungleichung  $\text{vol} f(K) \leq \text{vol} K \cdot |\det A|$  zu zeigen: Wenden wir diese Aussage dann nämlich auf die Umkehrfunktion  $f^{-1}: x \mapsto A^{-1}x$  und die nach Satz 24.30 und Lemma 30.3 (b) ebenfalls kompakte und messbare Menge  $f(K)$  an, so erhalten wir

$$\text{vol} K = \text{vol} f^{-1}(f(K)) \leq \text{vol} f(K) \cdot |\det A^{-1}|,$$

nach Satz 18.6 (b) also auch die umgekehrte Ungleichung  $\text{vol} f(K) \geq \text{vol} K \cdot |\det A|$ .

- (2) Es genügt auch, diese Ungleichung für Quader zu zeigen: Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  dann eine allgemeine kompakte messbare Menge, so gibt es nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (b) für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Zerlegung  $Z$  eines Quaders, der  $K$  enthält, mit

$$\text{OS}(1_K, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol } Q \cdot \sup 1_K(Q) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \cap K \neq \emptyset} \text{vol } Q < \text{vol } K + \varepsilon.$$

Da diese Quader  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \cap K \neq \emptyset$  die Menge  $K$  überdecken, überdecken die Mengen  $f(Q)$  für diese Quader aber auch die Menge  $f(K)$ , und wir erhalten aus Bemerkung 29.10 unter Verwendung der zu zeigenden Aussage für Quader

$$\text{vol } f(K) \leq \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} \text{vol } f(Q) \leq \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} \text{vol } Q \cdot |\det A| < (\text{vol } K + \varepsilon) \cdot |\det A|.$$

Nehmen wir hier nun den Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so erhalten wir die zu zeigende Ungleichung  $\text{vol } f(K) \leq \text{vol } K \cdot |\det A|$  auch für  $K$ .

- (3) Weiterhin genügt es, die Aussage in dem Fall zu zeigen, dass die Abbildungsmatrix  $A$  von  $f$  eine Elementarmatrix wie in Konstruktion 15.24 ist: Nach Folgerung 15.36 ist jede invertierbare Matrix nämlich ein Produkt von solchen Elementarmatrizen, und wenn die zu zeigende Ungleichung für zwei Isomorphismen  $f: x \mapsto Ax$  und  $g: x \mapsto Bx$  gilt, dann auch für ihre Verkettung  $g \circ f$  bzw. das Produkt  $BA$  wegen

$$\text{vol } g(f(K)) \leq \text{vol } f(K) \cdot |\det B| \leq \text{vol } K \cdot |\det B| \cdot |\det A| = \text{vol } K \cdot |\det(BA)|,$$

da auch  $f(K)$  nach Lemma 30.3 (b) kompakt und messbar ist.

Es sei nun nach (2) also  $K = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader; wir untersuchen die beiden Typen von Elementarmatrizen nach (3) gemäß Konstruktion 15.24 separat:

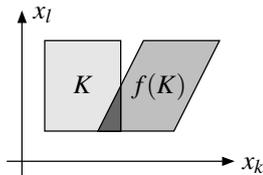
- (a) Für die Elementarmatrix  $A = F_k(\lambda)$  aus Konstruktion 15.24 (a), die die  $k$ -te Koordinate um den Faktor  $\lambda$  streckt, ist

$$\begin{aligned} f(K) &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [\lambda a_k, \lambda b_k] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \text{für } \lambda > 0 \\ \text{bzw. } f(K) &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [\lambda b_k, \lambda a_k] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \text{für } \lambda < 0, \end{aligned}$$

und damit in beiden Fällen  $\text{vol } f(K) = |\lambda| \cdot \text{vol } K = \text{vol } K \cdot |\det A|$ .

- (b) Für die Elementarmatrix  $A = F_{k,l}(\lambda)$  aus Konstruktion 15.24 (b), die das  $\lambda$ -fache der  $l$ -ten Koordinate auf die  $k$ -te addiert, ist  $f(K)$  ein Parallelotop wie im Bild rechts. Nach dem Prinzip von Cavalieri aus Beispiel 29.40 hat dieses das gleiche Volumen wie der Quader  $K$ , und wir erhalten wie gewünscht

$$\text{vol } f(K) = 1 \cdot \text{vol } K = \text{vol } K \cdot |\det A|. \quad \square$$



Zum Abschluss müssen wir diese Aussage nun für den Beweis unseres dritten Lemmas noch auf lokale lineare Approximationen eines Diffeomorphismus anwenden.

*Beweis von Lemma 30.7.* Zunächst einmal genügt es wieder, die zweite Ungleichung zu zeigen: Wenden wir dann die Aussage über das Maximum auf die Menge  $f(K)$  und den Diffeomorphismus  $f^{-1}$  an, so erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung

$$\text{vol } K \leq \text{vol } f(K) \cdot \max |\det(f^{-1})'(f(K))| \stackrel{27.3}{=} \text{vol } f(K) \cdot \max \frac{1}{|\det f'(K)|} = \frac{\text{vol } f(K)}{\min |\det f'(K)|}.$$

Für den Beweis der Maximumungleichung seien nun wieder  $\tilde{Z}$  und  $\tilde{K}$  wie in Konstruktion 30.18 und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig. Da  $f'$  auf der kompakten Menge  $\tilde{K}$  stetig und invertierbar ist, existiert das Maximum  $s := \max \|f'(\tilde{K})^{-1}\|$ . Gleichzeitig ist  $f'$  nach Bemerkung 24.26 (d) auf  $\tilde{K}$  auch gleichmäßig stetig, und somit gibt es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\|f'(x) - f'(y)\| < \frac{\varepsilon}{s}$  für alle  $x, y \in \tilde{K}$  mit  $\|x - y\| < \delta$ .

Wir betrachten nun eine beliebige an  $K \subset D$  angepasste Zerlegung  $Z$ , deren Teilwürfel einen Radius  $r$  kleiner als  $\frac{\delta}{2}$  haben. Es sei zunächst  $Q \in \text{TQ}(Z)$  ein beliebiger Teilwürfel dieser Zerlegung, der  $K$

schneidet. Wie im Beweis von Lemma 30.3 (a) können wir ihn wieder als  $Q = K_r(a) \subset \tilde{K}$  für ein  $a \in \tilde{K}$  schreiben; wegen  $Q \cap K \neq \emptyset$  gibt es ferner ein  $y \in Q \cap K$ .

Mit diesen Bezeichnungen gilt zunächst für alle  $x \in Q$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(y) \cdot (x - a) + h(x) && \text{mit } h(x) := f(x) - f(a) - f'(y) \cdot (x - a) \\ &= f(a) + f'(y) \cdot \underbrace{(x - a + f'(y)^{-1} \cdot h(x))}_{(2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei ist  $h(a) = 0$  und  $h'(x) = f'(x) - f'(y)$ . Da alle hier betrachteten Punkte im konvexen Würfel  $Q \subset \tilde{K}$  mit Seitenlänge  $2r < \delta$  liegen, gilt dabei nach der Folgerung 26.19 aus dem Mittelwertsatz und unserer Wahl von  $\delta$

$$\|h(x)\| = \|h(x) - h(a)\| \leq \|h'\|_{\overline{ax}} \cdot \|x - a\| = \underbrace{\max\{\|f'(c) - f'(y)\| : c \in \overline{ax}\}}_{\leq \frac{\varepsilon}{s}} \cdot \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} \leq \frac{\varepsilon r}{s}.$$

Damit können wir den Ausdruck (2) nach Folgerung 24.39 in der Norm abschätzen durch

$$\|x - a + f'(y)^{-1} \cdot h(x)\| \leq \underbrace{\|x - a\|}_{\leq r} + \underbrace{\|f'(y)^{-1}\|}_{\leq s} \cdot \underbrace{\|h(x)\|}_{\leq \frac{\varepsilon r}{s}} \leq (1 + \varepsilon)r.$$

Der Ausdruck (2) liegt also für alle  $x \in Q$  im Würfel  $K_{(1+\varepsilon)r}(0)$  mit Volumen  $(1 + \varepsilon)^n \text{vol} Q$ . Dieser Würfel wird in (1) durch die Multiplikation mit  $f'(y)$  nach Lemma 30.5 auf eine kompakte messbare Menge mit Volumen  $(1 + \varepsilon)^n \text{vol} Q \cdot |\det f'(y)|$  abgebildet. Da die Translation um  $f(a)$  in (1) an diesem Volumen nichts ändert, ist also

$$\begin{aligned} \text{vol } f(Q) &\leq (1 + \varepsilon)^n \text{vol } Q \cdot |\det f'(y)| \\ &\leq (1 + \varepsilon)^n \text{vol } Q \cdot \max |\det f'(K)| \quad (\text{wegen } y \in K). \end{aligned}$$

Wir addieren diese Ungleichungen nun für alle  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \cap K \neq \emptyset$  auf. Da die Mengen  $f(Q)$  für diese Teilwürfel das gesamte Bild  $f(K)$  überdecken, ergibt sich mit Bemerkung 29.10

$$\text{vol } f(K) \leq (1 + \varepsilon)^n \cdot \sum_{\substack{Q \in \text{TQ}(Z) \\ Q \cap K \neq \emptyset}} \text{vol } Q \cdot \max |\det f'(K)| = (1 + \varepsilon)^n \cdot \text{OS}(1_K, Z) \cdot \max |\det f'(K)|.$$

Lassen wir nun den Radius  $r$  der Teilwürfel in  $Z$  gegen 0 gehen, konvergiert die Obersumme  $\text{OS}(1_K, Z)$  nach Aufgabe 28.15 gegen  $\text{vol } K$ , und wir erhalten

$$\text{vol } f(K) \leq (1 + \varepsilon)^n \cdot \text{vol } K \cdot \max |\det f'(K)|.$$

Mit der Grenzwertbildung  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt also die Behauptung.  $\square$