

Grundlagen der Mathematik 2: Analysis

23. Topologische Grundbegriffe

Wir haben nun unser Studium der linearen Algebra beendet und wenden uns wieder der Analysis zu. Unser Ziel für den Rest dieser Vorlesung wird es sein, die in den Kapiteln 5 bis 12 entwickelte Theorie für Funktionen in einer reellen Variablen – insbesondere die Differential- und Integralrechnung – auf den mehrdimensionalen Fall zu übertragen, also analoge Resultate z. B. auch für Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m zu finden. Da es bekanntlich die grundlegende Idee der Differentialrechnung ist, beliebige Funktionen durch lineare zu approximieren, werden unsere Ergebnisse zu linearen Abbildungen, die wir in den vorangegangenen Kapiteln zur linearen Algebra erzielt haben, dabei sehr nützlich sein.

23.A Normierte und metrische Räume

Erinnern wir uns an die eindimensionale Analysis zurück: Der zentrale Begriff, mit dem wir damals in Kapitel 5 begonnen haben, war der des Grenzwerts einer Folge. Wir haben dabei eine (reelle oder komplexe) Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{K}$ genannt, wenn in jeder ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} : |x - a| < \varepsilon\} \quad (*)$$

von a fast alle Folgenglieder a_n liegen (siehe Definition 5.1 und Bemerkung 5.2). Wenn wir diese Definition auf den höherdimensionalen Fall übertragen wollen, brauchen wir dazu offensichtlich eine Verallgemeinerung der Betragsfunktion, mit der wir in (*) den Abstand von x zu a messen konnten. In der Tat haben wir so etwas in Definition 21.13 bereits kennengelernt: die Norm bzw. Länge eines Vektors in einem Vektorraum mit Skalarprodukt. Wir wollen daher zuerst diesen Normbegriff genauer untersuchen. Wie schon in Bemerkung 21.21 erwähnt ist in der Analysis das Konzept einer Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum sehr allgemein und erlaubt nicht nur die Normen von Skalarprodukten, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben. Vielmehr ist eine allgemeine Norm definiert als eine Abbildung, die jedem Vektor eine reelle Zahl zuordnet und die erwarteten Eigenschaften erfüllt – nämlich genau diejenigen, die wir in Satz 21.20 für Normen zu Skalarprodukten bereits bewiesen haben.

Definition 23.1 (Normen und normierte Räume). Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Wir nennen eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$ eine **Norm** auf V , wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

- (a) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- (b) $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0$;
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Dreiecksungleichung**).

Ein \mathbb{K} -Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ wird als **normierter Raum** bezeichnet. Wir schreiben ihn als $(V, \|\cdot\|)$, oder auch einfach nur als V , wenn die betrachtete Norm aus dem Zusammenhang klar ist.

Bemerkung 23.2.

- (a) In jedem normierten Raum ist die Norm des Nullvektors nach Definition 23.1 (a) gleich $\|0_V\| = \|0_{\mathbb{K}} \cdot 0_V\| = 0_{\mathbb{K}} \cdot \|0_V\| = 0$. Eine Norm nimmt also nur reelle nicht-negative Werte an, und ist genau dann gleich 0, wenn der Vektor der Nullvektor ist.
- (b) Genau wie bei Skalarprodukten in Bemerkung 21.14 (b) kann man offensichtlich auch eine Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V immer auf einen Unterraum $U \leq V$ einschränken, um auch U zu einem normierten Raum zu machen.

Beispiel 23.3.

- (a) Jeder \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt, also jeder euklidische oder unitäre Raum, ist mit der Vorschrift $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ein normierter Raum – dies haben wir in Satz 21.20 bewiesen. Wenn wir nichts anderes angeben, werden wir in Zukunft jeden Vektorraum mit Skalarprodukt (und nach Bemerkung 23.2 (b) auch jeden Unterraum davon) auf diese Art als normierten Raum ansehen.

Um Normen anschaulich darzustellen, zeichnet man in der Regel die sogenannte Einheitskugel $\{x \in V : \|x\| \leq 1\}$, also die Menge aller Vektoren, die bezüglich dieser Norm die Länge höchstens 1 haben. Wir haben bei der Hauptachsentransformation in Konstruktion 22.37 gesehen, dass diese Einheitskugel im Fall einer von einem Skalarprodukt bestimmten Norm ein gedrehtes Ellipsoid mit Mittelpunkt im Ursprung ist. Im Fall eines reellen zweidimensionalen Vektorraums ist dies im Bild unten dargestellt.

Der wichtigste Fall ist dabei natürlich $V = \mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Wenn wir nichts Gegenteiliges angeben, wollen wir \mathbb{K}^n in Zukunft immer mit der hieraus resultierenden Norm

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

als normierten Raum betrachten. Man nennt dies die **euklidische Norm**. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ dann natürlich die „gewöhnliche“ Kugel.

- (b) Für $V = \mathbb{K}^n$ ist die **Maximumsnorm** definiert als

$$\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

In der Tat ist dies eine Norm: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.1 sind offensichtlich, und die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der in \mathbb{K} , denn es ist

$$\|x + y\| = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\| + \|y\|,$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ einen Index bezeichnet, für den in $\|x + y\| = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|)$ das Maximum angenommen wird. Die zugehörige Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{K}^n : \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{K}^n : |x_i| \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

ist in diesem Fall ein achsenparalleler Würfel; er ist wieder im Bild unten eingezeichnet. Da wir hier kein Ellipsoid erhalten, sehen wir also auch schon, dass die Maximumsnorm keine Norm sein kann, die von einem Skalarprodukt kommt (siehe auch Aufgabe 23.5). Das Konzept eines normierten Raumes lässt also allgemeinere Normen zu als die, die wir in Abschnitt 21.B kennengelernt haben.

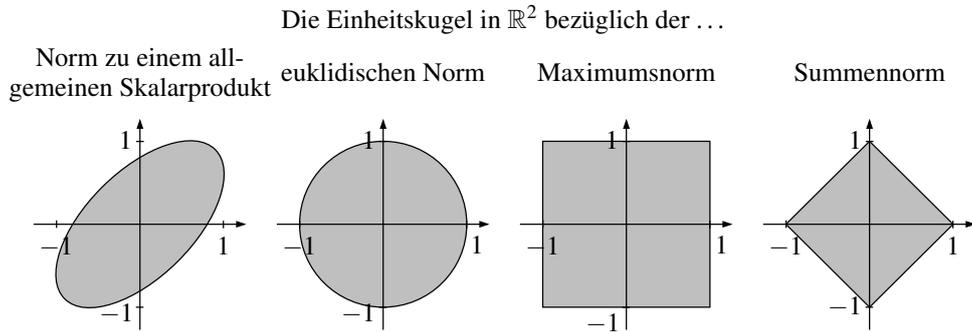
- (c) Für $V = \mathbb{K}^n$ definieren wir die **Summennorm** durch

$$\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

Auch hier sind die Bedingungen (a) und (b) in Definition 23.1 wieder offensichtlich, und die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$\|x + y\| = |x_1 + y_1| + \dots + |x_n + y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| = \|x\| + \|y\|.$$

Die zugehörige Einheitskugel ist für $n = 2$ wieder im folgenden Bild dargestellt. Man kann sich ihre Form leicht dadurch überlegen, dass sie wegen der Beträge in der Definition der Norm symmetrisch zu beiden Achsen sein muss und im positiven Quadranten $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ durch die Ungleichung $x_1 + x_2 \leq 1$ gegeben ist.



(d) Es sei wieder $V = \mathbb{K}^n$. Für eine reelle Zahl $p \geq 1$ kann man zeigen, dass durch

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

eine Norm definiert wird, die sogenannte **p -Norm**. In der Tat sind die ersten beiden Eigenschaften von Definition 23.1 auch hier wieder klar, die Dreiecksungleichung ist jedoch etwas aufwendiger als für unsere bisher betrachteten Normen nachzurechnen (und benötigt die Bedingung $p \geq 1$). Da wir diese allgemeinen p -Normen in unserer Vorlesung nicht weiter benötigen, verzichten wir hier auf den Beweis. Ihr könnt ihn z. B. in [Fo1, Kapitel 16, Satz 8] finden.

Wir erwähnen die p -Norm hier nur deshalb, weil sie eine Verallgemeinerung unserer oben betrachteten Normen ist und sich daraus auch deren übliche Bezeichnungsweise ableitet: Offensichtlich ist die 1-Norm gerade die Summennorm und die 2-Norm die euklidische Norm. Für $p \rightarrow \infty$ hingegen ergibt sich die Maximumsnorm: Ist nämlich $x \in \mathbb{K}^n$ ein Vektor, für den ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Maximum in $\|x\| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ für $|x_1|$ angenommen wird, so ist

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = |x_1| \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}} = |x_1| = \|x\|,$$

da der Ausdruck unter der Wurzel zwischen 1 und n liegt und der Grenzwert für $p \rightarrow \infty$ somit durch $\sqrt[p]{1} \rightarrow 1$ und $\sqrt[p]{n} \rightarrow 1$ eingeschachtelt wird. Für $x \in \mathbb{K}^n$ bezeichnet man daher ...

- die Summennorm mit $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$,
- die euklidische Norm mit $\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$,
- die Maximumsnorm mit $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

(e) Alle oben betrachteten Normen gibt es analog auch auf dem Vektorraum $C^0([a, b])$ aller stetigen reellen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$: So ist z. B. für eine solche Funktion f

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}, \quad \|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

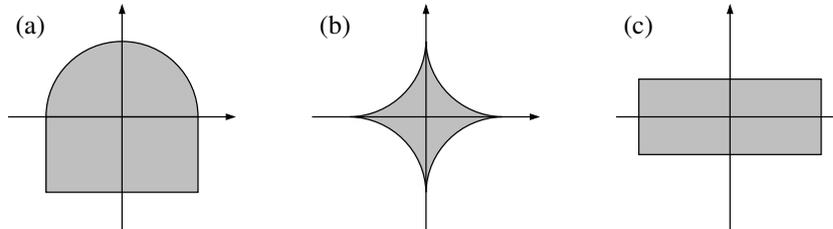
(das Maximum existiert nach Satz 8.25, und die Normeigenschaften beweist man analog zu den Fällen oben bzw. zu Konstruktion 21.16). Die 2-Norm $\|f\|_2$ ist dabei genau die Norm zum Standardskalarprodukt aus Konstruktion 21.16, und die Maximumsnorm $\|f\|_\infty$ haben wir in Aufgabe 8.41 (a) bereits in einem etwas allgemeineren Fall als *Supremumsnorm* kennengelernt.

(f) Auf den Matrizenräumen $\mathbb{K}^{m \times n}$ heißt die zum Standardskalarprodukt aus Beispiel 21.15 (c) gehörige Norm

$$\|A\| = \sqrt{\text{Spur}(\bar{A}^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2} \quad \text{für } A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

die **Frobenius-Norm**. Wir werden $\mathbb{K}^{m \times n}$ im Folgenden standardmäßig mit dieser Norm versehen, sofern wir nichts Gegenteiliges angeben. Beachte aber, dass diese Norm *nicht* mit $\|A\|_2$ bezeichnet wird, weil dieser Name bereits für eine andere Matrixnorm reserviert ist, die wir auch später in Definition 24.38 und Beispiel 24.40 (a) noch kennenlernen werden.

Aufgabe 23.4. Welche der folgenden Bilder können Einheitskugeln einer Norm auf \mathbb{R}^2 sein?



Aufgabe 23.5. Man zeige:

(a) In jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

(b) Die Maximumsnorm auf \mathbb{K}^n für $n \geq 2$ erfüllt die Parallelogrammgleichung nicht, und kann damit nach (a) also nicht die Norm zu einem Skalarprodukt sein.

Bemerkung 23.6 (Vergleich von Normen). In Beispiel 23.3 haben wir viele verschiedene Normen gesehen. Wie hängen diese miteinander zusammen? Oft ist es so, dass man Normen gegeneinander abschätzen kann: So gelten z. B. für die Maximumsnorm und die euklidische Norm auf \mathbb{K}^n die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = |x_i| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2$$

und $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq \sqrt{|x_i|^2 + \dots + |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot |x_i| = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty,$

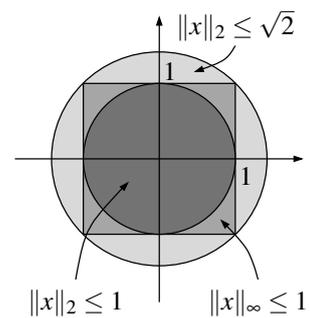
wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Index mit maximalem Wert von $|x_i|$ ist. Es gilt also für alle $x \in \mathbb{K}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty,$$

d. h. wir haben die Folgerungen:

- (a) Wenn $\|x\|_2 \leq 1$ gilt, so ist $\|x\|_\infty \leq 1$.
- (b) Wenn $\|x\|_\infty \leq 1$ gilt, so ist $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}$.

Dies kann man sich auch gut anschaulich vorstellen: Betrachten wir zu einer Norm $\|\cdot\|$ Kugeln $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| \leq r\}$ mit einem anderen Radius als 1, so sind diese wegen der Linearitätseigenschaft aus Definition 23.1 (a) einfach nur skalierte Versionen der Einheitskugel, und die Ergebnisse (a) und (b) oben besagen genau, dass solche Kugeln wie im Bild rechts ineinander liegen: In jedem Kreis liegt noch ein Quadrat, und in jedem Quadrat liegt noch ein Kreis (mit geeigneten Radien).



Wir werden später (z. B. in Lemma 23.17 und Bemerkung 23.18) noch sehen, dass dies dazu führt, dass sich die beiden betrachteten Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. Man definiert daher:

Definition 23.7 (Äquivalente Normen). Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V heißen **äquivalent**, wenn es Konstanten $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\| \quad \text{für alle } x \in V.$$

Man prüft leicht nach, dass dies in der Tat eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V ist.

Beispiel 23.8.

- (a) Ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V , so können wir daraus für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ eine skalierte Variante $\|\cdot\|'$ mit

$$\|x\|' := \lambda \cdot \|x\| \quad \text{für alle } x \in V$$

konstruieren, die ebenfalls eine Norm ist. Diese neue Norm $\|\cdot\|'$ ist natürlich zur ursprünglichen äquivalent (wobei in Definition 23.7 mit $a := b := \lambda$ sogar die Gleichheit gilt).

- (b) Wie wir in Bemerkung 23.6 gesehen haben, ist die Maximumsnorm auf \mathbb{K}^n zur euklidischen Norm äquivalent.

In der Tat werden wir in Satz 24.37 noch sehen, dass sogar *alle* Normen auf \mathbb{K}^n zueinander äquivalent sind (was sehr praktisch ist, weil wir ab dann für die meisten Anwendungen die uns jeweils am einfachsten erscheinende Norm benutzen können, ohne etwas am Ergebnis zu ändern). Für den Moment bedeutet dies aber erst einmal nur, dass wir für ein Beispiel nicht-äquivalenter Normen zwangsläufig einen unendlich-dimensionalen Vektorraum betrachten müssen:

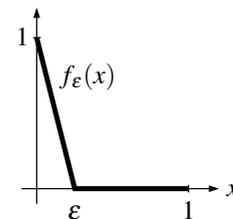
- (c) Im Vektorraum $V = C^0([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ mit den beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

aus Beispiel 23.3 (e) betrachten wir für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ die Funktion f_ε wie im Bild rechts. Dann gilt

$$\|f_\varepsilon\|_1 = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \|f_\varepsilon\|_\infty = 1,$$

und damit $\|f_\varepsilon\|_\infty = \frac{2}{\varepsilon} \|f_\varepsilon\|_1$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ sehen wir also, dass es kein $b \in \mathbb{R}_{>0}$ geben kann mit $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq b \|f_\varepsilon\|_1$, d. h. dass die beiden Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $C^0([0, 1])$ nicht äquivalent sind.



Bevor wir zur angekündigten Anwendung des Längen- bzw. Abstandsbegriffs in der Analysis kommen, wollen wir das Konzept eines normierten Raumes aber erst noch etwas verallgemeinern. Eine recht große Einschränkung ist es in der Praxis nämlich, dass normierte Räume nach Definition stets Vektorräume (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}) sein müssen. Um nur Abstände zwischen Punkten sinnvoll definieren zu können, benötigt man aber keine Vektorraumstruktur. Diese Idee führt zum folgenden Begriff eines metrischen Raumes, der lediglich den Abstand zweier Punkte, aber nicht die Länge eines Vektors definiert.

Definition 23.9 (Metriken und metrische Räume). Es sei M eine Menge. Man nennt eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ (die man sich als *Abstandsfunktion* zwischen zwei Punkten vorstellen sollte; der hierfür übliche Buchstabe d steht dabei für *Distanz*) eine **Metrik** auf M , wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- (a) $d(x, y) = d(y, x)$ (**Symmetrie**);
- (b) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$;
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**Dreiecksungleichung**).

Eine Menge M zusammen mit einer Metrik d heißt **metrischer Raum** und wird manchmal auch als (M, d) geschrieben.

Lemma 23.10. Jeder normierte Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist mit der Abstandsfunktion $d(x, y) := \|x - y\|$ ein metrischer Raum.

Wenn wir nichts anderes spezifizieren, werden wir in Zukunft daher jeden normierten Raum auf diese Art als metrischen Raum auffassen.

Beweis. Wir überprüfen die Eigenschaften aus Definition 23.9: Für alle $x, y, z \in V$ folgt nach Definition 23.1

- aus Teil (a): $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = d(y, x)$;
- aus Teil (b): $d(x, y) = \|x - y\| = 0$ genau dann, wenn $x - y = 0$, also $x = y$;
- aus Teil (c): $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$. \square

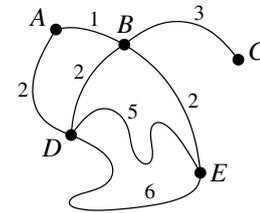
Bemerkung 23.11. Analog zu Skalarprodukten und Normen (siehe Bemerkung 21.14 (b) und Bemerkung 23.2 (b)) lassen sich auch Metriken auf beliebige Teilmengen einschränken. Wir werden daher jede Teilmenge eines metrischen Raumes in Zukunft standardmäßig auf diese Art wieder als metrischen Raum betrachten. Fassen wir alle unsere Konventionen zusammen, so werden wir also insbesondere jede Teilmenge von \mathbb{K}^n als metrischen Raum mit der *euklidischen Metrik*

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$$

auffassen, sofern wir nichts Gegenteiliges angeben.

Beispiel 23.12.

- (a) Wir betrachten die „Landkarte“ mit 5 Städten A, B, C, D, E und Verbindungsstraßen wie im Bild rechts, wobei die (positiven) Zahlen an den Straßen deren Längen angeben sollen – man nennt ein solches Diagramm auch einen (zusammenhängenden) *gewichteten Graphen*. Für die Menge $M = \{A, B, C, D, E\}$ und $x, y \in M$ sei nun $d(x, y)$ die Länge eines kürzesten Weges von x nach y . So ist z. B. $d(D, E) = 4$, da von D nach E der Weg über B der kürzeste ist und eine Gesamtlänge von 4 hat.



Man sieht leicht ein, dass diese Abstandsfunktion d dann eine Metrik auf M definiert: Die Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 23.9 sind offensichtlich, und (c) folgt aus der einfachen Tatsache, dass $d(x, y) + d(y, z)$ ja die Länge eines kürzesten Weges von x über y nach z ist und diese natürlich mindestens gleich der Länge $d(x, z)$ eines kürzesten Weges von x nach z ist, bei dem man nicht notwendig über y laufen muss.

Metrische Räume dieser Art spielen z. B. in der Optimierung eine große Rolle. In unserer Vorlesung werden sie nicht weiter vorkommen, sondern sollen hier nur als Beispiel dafür dienen, dass metrische Räume sehr allgemeine Objekte sind und auch „ganz anders aussehen“ können als normierte Vektorräume.

- (b) Auf jeder Menge M ist

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

offensichtlich eine Metrik, die sogenannte **diskrete Metrik**.

23.B Folgenkonvergenz in metrischen Räumen

Wie bereits angekündigt können wir nun analog zu Definition 5.1 Grenzwerte von Folgen in metrischen Räumen (und damit auch in normierten Räumen bzw. Vektorräumen mit Skalarprodukt) definieren.

Definition 23.13 (Kugeln, Umgebungen und Grenzwerte von Folgen). Es seien M ein metrischer Raum und $a \in M$.

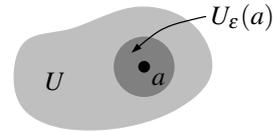
- (a) Zu $r \in \mathbb{R}_{>0}$ heißt

$$U_r(a) := \{x \in M : d(x, a) < r\} \quad \text{die offene Kugel, und}$$

$$K_r(a) := \{x \in M : d(x, a) \leq r\} \quad \text{die abgeschlossene Kugel}$$

um a mit Radius r .

- (b) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **Umgebung** von a , wenn es wie im Bild rechts ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$ (insbesondere ist dann natürlich auch $a \in U$). Damit ist auch $U_\varepsilon(a)$ selbst eine Umgebung von a ; man nennt sie die ε -**Umgebung** von a .



- (c) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Dann heißt a **Grenzwert** von $(a_n)_n$, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: d(a_n, a) < \varepsilon$$

(wobei wir die Bedingung $d(a_n, a) < \varepsilon$ natürlich auch als $a_n \in U_\varepsilon(a)$ schreiben können). Wie im Fall von Folgen in \mathbb{K} werden wir gleich in Lemma 23.15 sehen, dass ein solcher Grenzwert a eindeutig ist, sofern er existiert. Wir können ihn dann also *den* Grenzwert der Folge nennen und schreiben wie gewohnt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder „ $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ “. Existiert dieser Grenzwert, so heißt die Folge $(a_n)_n$ **konvergent**, andernfalls **divergent**.

56

Bemerkung 23.14.

- (a) Es gibt mehrere äquivalente Umformulierungen der obigen Grenzwertdefinition. Am nützlichsten ist vermutlich das Kriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0,$$

das wegen der Positivität der Metrik unmittelbar durch Vergleich mit Definition 5.1 (b) folgt und den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ im metrischen Raum M damit direkt auf einen Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a)$ in \mathbb{R} zurückführt. Eine andere äquivalente Formulierung von Definition 23.13 (c) mit Hilfe des Umgebungsbegriffs und der Notation „fast alle“ für „alle bis auf endlich viele“ ist offensichtlich genau wie in Bemerkung 5.2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \text{In jeder } \varepsilon\text{-Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Dies kann man schließlich noch umformulieren als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \text{In jeder Umgebung von } a \text{ liegen fast alle Folgenglieder } a_n.$$

Liegen nämlich in jeder Umgebung fast alle a_n , so natürlich insbesondere auch in jeder ε -Umgebung. Enthält umgekehrt jede ε -Umgebung von a fast alle a_n , so auch jede Umgebung von a , da eine solche ja nach Definition noch eine ε -Umgebung von a enthält.

- (b) Wendet man Definition 23.13 auf einen normierten Raum V an, so ist nach Lemma 23.10 also $d(x, y) = \|x - y\|$. In diesem Fall ist demnach z. B. $U_r(a) = \{x \in V : \|x - a\| < r\}$, und eine Folge $(a_n)_n$ in V konvergiert genau dann gegen $a \in V$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - a\| = 0$.

Lemma 23.15 (Eindeutigkeit des Grenzwerts). *In einem metrischen Raum hat jede Folge höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem metrischen Raum M , die gegen zwei Punkte $a, b \in M$ konvergiert. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(a_n, b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$d(a, b) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b) \stackrel{23.14(a)}{=} 0 + 0 = 0,$$

d. h. nach Definition 23.9 (b) wie behauptet $a = b$. □

Beispiel 23.16. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ in \mathbb{R}^2 mit $a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$ für alle n .

- (a) Versehen wir \mathbb{R}^2 standardmäßig mit der euklidischen Norm, so konvergiert die Folge nach Bemerkung 23.14 (b) gegen $0 \in \mathbb{R}^2$, denn es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - 0\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0.$$

(b) Auch mit der Maximumsnorm aus Beispiel 23.3 (b) konvergiert die Folge gegen 0, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n - 0\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(c) In der diskreten Metrik aus Beispiel 23.12 (b) konvergiert die Folge jedoch nicht gegen 0: Hier ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0,$$

da ja $a_n \neq 0$ für alle n gilt. In der Tat konvergiert eine Folge in dieser Metrik genau dann gegen a , wenn fast alle Folgenglieder gleich a sind. Da dies für die in diesem Beispiel betrachtete Folge für kein a der Fall ist, ist diese Folge in der diskreten Metrik also divergent.

Die Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum hängt also im Allgemeinen von der gewählten Metrik ab. Wir wollen nun aber zeigen, dass dies bei äquivalenten Normen nicht der Fall ist. So hatten wir ja z. B. in Beispiel 23.8 (b) gesehen, dass die Maximumsnorm auf \mathbb{R}^2 zur euklidischen Norm äquivalent ist, und dementsprechend haben wir oben in den Beispielen 23.16 (a) und (b) dasselbe Ergebnis erhalten. Diese Tatsache beruht auf der folgenden wichtigen Aussage.

Lemma 23.17. *Es seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei äquivalente Normen auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V . Dann gilt für alle $a \in V$ und $U \subset V$:*

$$U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } \|\cdot\|' \Leftrightarrow U \text{ ist eine Umgebung von } a \text{ bezüglich } \|\cdot\|,$$

d. h. „die beiden Normen erzeugen den gleichen Umgebungsbegriff“.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|x\|' \leq b\|x\|$ für alle $x \in V$. Im Folgenden bezeichnen wir die ε -Umgebungen eines Punktes $a \in V$ bezüglich $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ mit $U_{\varepsilon}(a)$ bzw. $U'_{\varepsilon}(a)$.

Es sei nun U eine Umgebung von a bezüglich $\|\cdot\|'$, d. h. es gilt $U'_{\varepsilon}(a) \subset U$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist aber auch $U_{\varepsilon/b}(a) \subset U$, denn für alle $x \in U_{\varepsilon/b}(a)$ gilt $\|x - a\|' \leq b\|x - a\| < b \cdot \frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon$, also $x \in U'_{\varepsilon}(a) \subset U$. Damit ist U auch eine Umgebung von a bezüglich $\|\cdot\|$.

Die andere Richtung ergibt sich analog durch Vertauschen der Rollen der beiden Normen. \square

Bemerkung 23.18 (Topologie). Wir hatten in Abschnitt 23.A bereits erwähnt, dass sich äquivalente Normen in vielerlei Hinsicht gleich verhalten. In Lemma 23.17 haben wir nun ein erstes und sehr wichtiges Beispiel dafür gesehen: Der von ihnen erzeugte Umgebungsbegriff ist der gleiche.

Damit stimmen bei äquivalenten Normen natürlich auch alle Eigenschaften von Objekten überein, die sich allein mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definieren lassen. Derartige Eigenschaften, von denen wir im Folgenden noch viele kennenlernen werden, bezeichnet man als *topologische Eigenschaften*. Ein erstes Beispiel dafür ist die Folgenkonvergenz, denn nach Bemerkung 23.14 (a) konvergiert eine Folge ja genau dann gegen einen Punkt, wenn in jeder Umgebung dieses Punktes fast alle Folgenglieder liegen. So können wir nach Beispiel 23.8 (b) also z. B. für Fragen zur Folgenkonvergenz in \mathbb{K}^n statt der euklidischen Norm auch die oft einfachere Maximumsnorm verwenden, da diese beiden Normen dort äquivalent sind.

In der Tat gibt es eine weitere Verallgemeinerung metrischer Räume: die sogenannten *topologischen Räume*, die ihr in der Vorlesung „Einführung in die Topologie“ des zweiten Studienjahres kennenlernen könnt. In ihnen gibt es keine Metrik mehr, aber noch einen Umgebungsbegriff. Demnach kann man dort dann zwar keine Abstände mehr messen, aber dennoch alle topologischen Eigenschaften wie z. B. die Folgenkonvergenz definieren und untersuchen.

Im konkreten Fall des normierten Raumes \mathbb{K}^n ist die Untersuchung der Konvergenz von Folgen allerdings noch etwas einfacher: Wie man vielleicht schon vermutet, wollen wir jetzt kurz zeigen, dass man diese Konvergenz dort einfach koordinatenweise überprüfen kann.

Lemma 23.19. *Eine Folge $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K}^n konvergiert (in der Standardnorm) genau dann gegen $a \in \mathbb{K}^n$, wenn jede Koordinatenfolge $(a_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $i = 1, \dots, n$ in \mathbb{K} gegen die i -te Koordinate a_i von a konvergiert.*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = a &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - a\|_2 = 0 && \text{(Bemerkung 23.14 (b))} \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{|a_1^{(k)} - a_1|^2 + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|^2} = 0 \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_i^{(k)} - a_i| = 0 \text{ für alle } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

wobei in (*) die Richtung „ \Leftarrow “ die üblichen Grenzwertsätze in \mathbb{R} sind, und die Richtung „ \Rightarrow “ aus der Ungleichung $|a_i^{(k)} - a_i| \leq \sqrt{|a_1^{(k)} - a_1|^2 + \cdots + |a_n^{(k)} - a_n|^2}$ folgt. \square

Als Nächstes wollen wir die in \mathbb{K} aus Lemma 5.8 bekannte Aussage, dass konvergente Folgen beschränkt sind, auf metrische Räume übertragen. Dazu müssen wir aber natürlich den Begriff der Beschränktheit einer Menge oder Folge in einem metrischen Raum erst einmal definieren.

Definition 23.20 (Beschränkte Mengen und Folgen). Es sei M ein metrischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge $X \subset M$ heißt **beschränkt**, wenn sie in einer abgeschlossenen Kugel enthalten ist, also wenn es ein $a \in M$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $X \subset K_r(a)$, d. h. mit $d(x, a) \leq r$ für alle $x \in X$.
- (b) Eine Folge in M heißt **beschränkt**, wenn die Menge ihrer Folgenglieder in M beschränkt ist.

Bemerkung 23.21.

- (a) Ist $X \subset M$ beschränkt, so gilt die Bedingung aus Definition 23.20 (a) sogar für alle $a \in M$: Ist nämlich $d(x, a) \leq r$ für alle $x \in X$, so gilt für einen beliebigen anderen Punkt $a' \in M$ auch

$$d(x, a') \leq d(x, a) + d(a, a') \leq r + d(a, a') = R \quad \text{für alle } x \in X,$$

wobei wir $R := r + d(a, a')$ gesetzt haben.

Insbesondere können wir in einem normierten Raum V also stets $a = 0$ wählen, und erhalten so die Aussage, dass eine Teilmenge $X \subset V$ genau dann beschränkt ist, wenn es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in X$. Für den Fall $V = \mathbb{K}$ mit der gewöhnlichen Metrik stimmt dies dann offensichtlich mit unserer alten Definition 4.23 (b) der Beschränktheit überein.

- (b) Wie wir in Aufgabe 23.25 sehen werden, ist die Beschränktheit einer Menge in einem metrischen Raum keine topologische Eigenschaft im Sinne von 23.18. Dennoch stimmt sie für zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem Vektorraum V überein: Ist $\|x\|' \leq b\|x\|$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $x \in V$, und ist $X \subset V$ beschränkt bezüglich $\|\cdot\|$, d. h. gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|x\| \leq r$ für alle $x \in X$, so ist dann auch $\|x\|' \leq b\|x\| \leq br$ für alle $x \in X$, d. h. X ist auch beschränkt bezüglich $\|\cdot\|'$.

Lemma 23.22. In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.

Beweis. Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a . Nach Bemerkung 23.14 (a) gilt dann $d(a_n, a) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Nach Lemma 5.8 ist die konvergente reelle Folge $(d(a_n, a))_n$ also beschränkt, d. h. es gibt ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $d(a_n, a) \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist auch $(a_n)_n$ beschränkt. \square

Als einfache Folgerung können wir nun die aus Satz 5.13 bekannten Grenzwertsätze verallgemeinern – also die Aussage, dass Grenzwerte mit den üblichen Rechenoperationen vertauschen. Da es nach Definition aber in metrischen Räumen überhaupt keine Rechenoperationen und in normierten Vektorräumen nur Vektoraddition und Skalarmultiplikation gibt, müssen wir uns dabei natürlich auf diese Fälle beschränken.

Satz 23.23 (Grenzwertsätze in normierten Räumen). Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen in einem normierten \mathbb{K} -Vektorraum V mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Ferner sei $(\lambda_n)_n$ eine konvergente Folge in \mathbb{K} mit $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Dann gilt:

- (a) $a_n + b_n \rightarrow a + b$ und $a_n - b_n \rightarrow a - b$;
- (b) $\lambda_n a_n \rightarrow \lambda a$.

Beweis.

- (a) Der Beweis ist (bis auf das Ersetzen der Betragsstriche durch die Norm) wörtlich derselbe wie in Satz 5.13.
- (b) Auch hier ist der Beweis analog zum eindimensionalen Fall: Es gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_n a_n - \lambda a\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda a_n + \lambda a_n - \lambda a\| \\ &\leq \|(\lambda_n - \lambda)a_n\| + \|\lambda(a_n - a)\| && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &= \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{(*)} \cdot \|a_n\| + |\lambda| \cdot \underbrace{\|a_n - a\|}_{(*)}. && \text{(Definition 23.1 (a))} \end{aligned}$$

Dabei sind die mit (*) bezeichneten Terme nach Voraussetzung (reelle) Nullfolgen, und wegen der Konvergenz von $(a_n)_n$ sind die Normen $\|a_n\|$ nach Lemma 23.22 beschränkt. Wie im Beweis von Satz 5.13 (b) ergibt sich nun also wieder $\|\lambda_n a_n - \lambda a\| \rightarrow 0$, und damit $\lambda_n a_n \rightarrow \lambda a$. □

Aufgabe 23.24. Es sei $V = \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Zahlenfolgen. Man zeige:

- (a) Die Abbildung $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \min(|x - y|, 1)$ ist eine Metrik auf \mathbb{R} .
- (b) Die Abbildung

$$e: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, ((a_k)_k, (b_k)_k) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(a_k, b_k)}{2^k}$$

(mit d wie in (a)) ist eine Metrik auf V .

- (c) Eine Folge reeller Folgen $(a_k^{(n)})_k \in V$ mit $n \in \mathbb{N}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der Metrik e wie in (b) genau dann gegen $(a_k)_k \in V$, wenn sie „punktweise konvergiert“, also wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_k^{(n)} = a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 23.25. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sind

$$d_1(x, y) := \begin{cases} \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases} \quad \text{und} \quad d_2(x, y) := \min(\|x - y\|_2, 1)$$

Metriken auf \mathbb{R}^2 (das braucht ihr nicht zu zeigen).

- (a) Skizziere die qualitativ verschiedenen Fälle, wie abgeschlossene Kugeln bezüglich dieser beiden Metriken aussehen können.
- (b) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_1 genau dann beschränkt, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt ist. Für d_2 gilt dies jedoch nicht.
- (c) Man zeige: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ ist bezüglich d_2 genau dann eine Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^2$, wenn A bezüglich der euklidischen Metrik eine Umgebung von a ist. Für d_1 gilt dies jedoch nicht.

Insbesondere zeigt d_2 also, dass Beschränktheit kein topologischer Begriff ist: Diese Metrik liefert die gleichen Umgebungen wie die euklidische Metrik, aber nicht die gleichen beschränkten Mengen.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch kurz das Cauchy-Kriterium aus Satz 6.25 verallgemeinern, das immer dann für den Nachweis der Konvergenz einer Folge benötigt wird, wenn ihr Grenzwert vorher noch nicht bekannt ist. Die Definition einer Cauchyfolge kann dabei unmittelbar aus Definition 6.22 übertragen werden.

Definition 23.26 (Cauchyfolgen). Eine Folge $(a_n)_n$ in einem metrischen Raum M heißt **Cauchyfolge**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0: d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Bemerkung 23.27.

- (a) Genau wie die Beschränktheit von Mengen bzw. Folgen ist auch das Konzept von Cauchyfolgen keine topologische Eigenschaft. Mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 23.21 (b) stimmt es für äquivalente Normen aber dennoch überein.
- (b) Wie in Bemerkung 6.23 folgt auch in beliebigen metrischen Räumen sofort aus der Dreiecksungleichung, dass jede konvergente Folge eine Cauchyfolge ist. Im Gegensatz zu Satz 6.25 gilt die Umkehrung in allgemeinen metrischen Räumen aber nicht: In $M = \mathbb{R}_{>0}$ (mit der euklidischen Metrik) ist die Folge $(\frac{1}{n})_n$ eine Cauchyfolge, da sie in \mathbb{R} gegen 0 konvergiert; ihr Grenzwert 0 liegt jedoch nicht in M , so dass sie in M divergiert.

Da es in der Regel sehr wichtig ist zu wissen, ob Cauchyfolgen stets konvergieren und man somit die Konvergenz von Folgen mit dem Cauchy-Kriterium überprüfen kann, haben derartige metrische Räume einen besonderen Namen.

Definition 23.28 (Vollständige Räume).

- (a) Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert (und die Cauchyfolgen nach Bemerkung 23.27 (b) damit genau die konvergenten Folgen sind).
- (b) Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

Satz 23.29. \mathbb{K}^n ist (bezüglich der euklidischen Norm) ein Banachraum.

Beweis. Nach Bemerkung 23.18 und 23.27 (a) dürfen wir auf \mathbb{K}^n statt der euklidischen Norm die dazu äquivalente Maximumsnorm verwenden.

Es sei nun $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{K}^n , d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\|a^{(k)} - a^{(l)}\|_\infty < \varepsilon$, und damit auch $|a_i^{(k)} - a_i^{(l)}| < \varepsilon$ für alle $k, l \geq k_0$ und $i = 1, \dots, n$ gilt. Also sind die Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ für alle i Cauchyfolgen in \mathbb{K} und damit nach Satz 6.25 konvergent gegen gewisse $a_i \in \mathbb{K}$. Nach Lemma 23.19 konvergiert dann aber auch die ursprüngliche Folge $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen den Vektor a mit Koordinaten a_1, \dots, a_n . \square

Aufgabe 23.30. Zeige die folgenden Eigenschaften der Frobenius-Norm:

- (a) Für alle $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.
- (b) Für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ in $\mathbb{K}^{n \times n}$.
- (c) Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|A\| < 1$, so ist $E - A$ invertierbar, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1}$.

Aufgabe 23.31 (Beispiel für einen nicht-vollständigen normierten Raum). Es sei $V = C^0([0, 1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0, 1]$. Man zeige:

- (a) $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.
- (b) $(V, \|\cdot\|_2)$ ist kein Banachraum.

57

23.C Offene und abgeschlossene Mengen

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun noch einige wichtige topologische Eigenschaften einführen (die also nur vom Umgebungsbegriff in einem metrischen Raum abhängen). Die ersten von ihnen sind die einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge, die eine direkte Verallgemeinerung der offenen und abgeschlossenen Intervalle bzw. Kugeln aus Notation 4.17 und Definition 23.13 (a) sind und anschaulich ausdrücken, ob eine Menge ihre Randpunkte mit enthält (siehe auch Bemerkung 23.41).

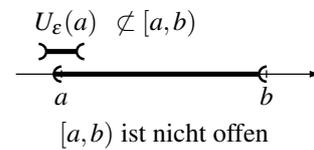
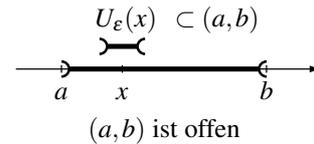
Definition 23.32 (Offene und abgeschlossene Mengen). Es sei M ein metrischer Raum.

- (a) Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt **offen**, wenn sie eine Umgebung von jedem ihrer Punkte ist, also wenn es zu jedem $a \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$.

- (b) Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **abgeschlossen**, wenn $M \setminus A$ offen ist, also wenn es zu jedem $a \in M \setminus A$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset M \setminus A$. Man bezeichnet die Menge $M \setminus A$ oft als das **Komplement** von A in M – muss dabei aber aufpassen, dass dies natürlich nicht mit der Definition 17.8 eines Komplements von Unterräumen übereinstimmt.

Beispiel 23.33.

- (a) In \mathbb{R} (mit der gewöhnlichen Metrik) sind offene Intervalle (a, b) offen im Sinne von Definition 23.32: Um jeden Punkt x eines solchen Intervalls finden wir eine ε -Umgebung (nämlich für ein beliebiges $\varepsilon \leq \min(x - a, b - x)$), die ganz in (a, b) liegt. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b)$ und (a, ∞) offen – in der Literatur werden sie daher im Gegensatz zu unserer Konvention in Notation 4.17 (a) manchmal auch zu den offenen Intervallen gezählt. Vereinigungen solcher Intervalle wie z. B. $(0, 1) \cup (2, \infty)$ sind aus dem gleichen Grund ebenfalls offen. Dagegen sind die Intervalle $[a, b)$, $(a, b]$ und $[a, b]$ aufgrund der enthaltenen Randpunkte nicht offen, da es hier um die Punkte $x = a$ bzw. $x = b$, die innerhalb des Intervalls liegen, keine solche ε -Umgebung innerhalb des Intervalls mehr gibt.



- (b) Wiederum in \mathbb{R} sind abgeschlossene Intervalle $[a, b]$ abgeschlossen, da ihre Komplemente $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ nach (a) offen sind. Ebenso sind die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ abgeschlossen, nicht aber die anderen Intervalltypen wie z. B. (a, b) , $(a, b]$ oder (a, ∞) . Wie bei den offenen Intervallen werden die uneigentlichen Intervalle $(-\infty, b]$ und $[a, \infty)$ in manchen Büchern daher auch zu den abgeschlossenen Intervallen gezählt – für die beschränkten abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ ist dann der Name „kompaktes Intervall“ üblich (siehe Beispiel 23.52).

Insbesondere sehen wir an diesem Beispiel schon, dass „abgeschlossen“ nicht das Gegenteil von „offen“ ist: Das Intervall $[a, b]$ ist z. B. weder offen noch abgeschlossen, da es einen Randpunkt a enthält und den anderen b nicht.

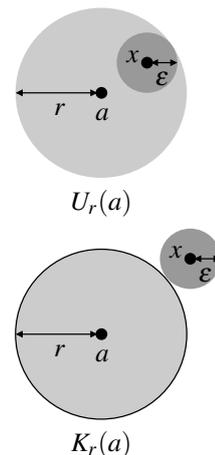
- (c) In jedem metrischen Raum M sind die leere Menge \emptyset und der ganze Raum M trivialerweise offen, und damit gleichzeitig auch abgeschlossen.
- (d) In jedem metrischen Raum sind die offenen Kugeln $U_r(a)$ aus Definition 23.13 (a) offen: Ist $x \in U_r(a)$ beliebig, also $d(x, a) < r$, so ist wie im Bild rechts $U_\varepsilon(x) \subset U_r(a)$ mit $\varepsilon := r - d(x, a)$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \varepsilon + d(x, a) = r.$$

Also ist $U_r(a)$ offen. Analog sieht man, dass jede abgeschlossene Kugel $K_r(a)$ abgeschlossen ist: Ist $x \in M \setminus K_r(a)$, also $d(x, a) > r$, so ist $U_\varepsilon(x) \subset M \setminus K_r(a)$ mit $\varepsilon := d(x, a) - r > 0$, denn für alle $y \in U_\varepsilon(x)$ gilt nun

$$d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) > d(x, a) - \varepsilon = r,$$

d. h. $K_r(a)$ ist abgeschlossen. Insbesondere sind also einpunktige Mengen $\{a\} = K_0(a)$ als abgeschlossene Kugeln vom Radius 0 stets abgeschlossen.



- (e) Da in jeder ε -Umgebung eines beliebigen Punktes von \mathbb{R} sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, ist weder die Menge der rationalen noch die der irrationalen Zahlen offen in \mathbb{R} . Mit anderen Worten ist \mathbb{Q} in \mathbb{R} weder offen noch abgeschlossen.

Die wichtigsten Eigenschaften offener und abgeschlossener Mengen sind die folgenden:

Lemma 23.34 (Durchschnitte und Vereinigungen offener und abgeschlossener Mengen). *In jedem metrischen Raum gilt:*

- (a) *Durchschnitte endlich vieler offener Mengen sind offen.*
- (b) *Vereinigungen beliebig vieler (also auch unendlich vieler) offener Mengen sind offen.*
- (c) *Vereinigungen endlich vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
- (d) *Durchschnitte beliebig vieler abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. Es sei M ein metrischer Raum.

- (a) Es seien $U_1, \dots, U_n \subset M$ offen und $a \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. Dann ist $a \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Da U_i offen ist, gibt es zu jedem i ein $\varepsilon_i > 0$ mit $U_{\varepsilon_i}(a) \subset U_i$. Mit $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ ist dann also $U_\varepsilon(a) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$ eine Umgebung von a , die ganz in $U_1 \cap \dots \cap U_n$ liegt. Also ist $U_1 \cap \dots \cap U_n$ offen.
- (b) Es seien I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ für alle $i \in I$ offen. Ist nun $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$, so ist also $a \in U_j$ für ein $j \in I$. Da U_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.
- (c) Dies folgt nun durch Komplementbildung aus (a): Sind $A_1, \dots, A_n \subset M$ abgeschlossen, also $M \setminus A_1, \dots, M \setminus A_n$ offen, so ist nach (a) auch

$$(M \setminus A_1) \cap \dots \cap (M \setminus A_n) = M \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

offen, und $A_1 \cup \dots \cup A_n$ damit abgeschlossen.

- (d) ergibt sich analog aus (b): Sind $A_i \subset M$ abgeschlossen für alle i in einer Indexmenge I , also $M \setminus A_i$ offen, so ist nach (b) auch

$$\bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i) = M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i$$

offen, d. h. $\bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen. □

Bemerkung 23.35. Die Beschränkung auf endlich viele Mengen in Lemma 23.34 (a) und (c) ist wesentlich: Nach Beispiel 23.33 (d) ist in einem metrischen Raum M ja jede einpunktige Menge $\{a\}$ mit $a \in M$ abgeschlossen. Wären nun beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen, so müsste dann ja jede Teilmenge $A \subset M$ (die ja immer Vereinigung aller ihrer Punkte ist) abgeschlossen sein – was im Allgemeinen offensichtlich falsch ist.

Aufgabe 23.36.

- (a) Es sei $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\} \subset \mathbb{R}$, aufgefasst als metrischer Raum mit der euklidischen Metrik. Gib alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen dieses metrischen Raumes M an.
- (b) Es sei $X \subset M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes M . Nach Bemerkung 23.11 ist dann auch X ein metrischer Raum mit der eingeschränkten Metrik.
Zeige, dass eine Menge $U \subset X$ genau dann offen in diesem metrischen Raum X ist, wenn es eine im metrischen Raum M offene Teilmenge $V \subset M$ gibt mit $U = V \cap X$.

Zum besseren Verständnis offener und abgeschlossener Mengen wollen wir jetzt noch das Konzept von Randpunkten exakt einführen, das wir oben ja schon zur Veranschaulichung dieser Begriffe verwendet haben. Auch andere verwandte Notationen haben wir bereits in Spezialfällen kennengelernt, wie z. B. dichte Teilmengen in Folgerung 4.35, den Abschluss einer Menge in Definition 8.1 und isolierte Punkte in Definition 10.1. Häufungspunkte haben wir bereits von Folgen in Definition 5.18 (c) gesehen; ihren Zusammenhang mit den nun betrachteten Häufungspunkten von Mengen werden wir in Aufgabe 23.47 untersuchen.

Definition 23.37 (Besondere Punkte in metrischen Räumen). Es seien M ein metrischer Raum, $a \in M$ ein Punkt und $X \subset M$ eine Teilmenge von M .

- (a) Der Punkt a heißt **innerer Punkt** von X , wenn X wie in Definition 23.13 (b) eine Umgebung von a ist. Die Menge aller inneren Punkte von X wird mit $\overset{\circ}{X}$ bezeichnet und das **Innere** von X genannt.
- (b) Der Punkt a heißt **Berührungspunkt** von X , wenn jede Umgebung von a einen Punkt aus X enthält. Die Menge \bar{X} aller Berührungspunkte von X wird der **Abschluss** von X genannt. Ist $\bar{X} = M$, so heißt X **dicht** in M .
- (c) Der Punkt a heißt **Randpunkt** von X , wenn jede Umgebung von a sowohl einen Punkt aus X als auch einen aus dem Komplement $M \setminus X$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von X wird mit ∂X bezeichnet und der **Rand** von X genannt.
- (d) Der Punkt a heißt **Häufungspunkt** von X , wenn jede Umgebung von a einen Punkt aus $X \setminus \{a\}$ enthält. Man nennt a einen **isolierten Punkt** von X , wenn es eine Umgebung von a gibt, die a als einzigen Punkt von X enthält.

Bemerkung 23.38. Nach der Definition 23.16 (b) einer Umgebung bedeutet Definition 23.37 (a), dass ein Punkt $a \in M$ genau dann ein innerer Punkt einer Teilmenge X eines metrischen Raumes M ist, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset X$. Mit der Definition 23.32 (a) einer offenen Menge ist dies auch äquivalent dazu, dass es eine offene Menge U gibt mit $a \in U \subset X$ (also eine offene Umgebung von a).

Analog können wir auch in den Teilen (b), (c) und (d) von Definition 23.37 den Begriff „Umgebung von a “ durch „ ε -Umgebung von a “ oder „offene Umgebung von a “ ersetzen, da jede Umgebung von a eine offene ε -Umgebung von a enthält.

Beispiel 23.39. Wir betrachten den metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Metrik).

- (a) Für ein halboffenes Intervall $X = [a, b)$ mit $a < b$ ist wie erwartet das Innere $\overset{\circ}{X} = (a, b)$, der Abschluss $\bar{X} = [a, b]$ und der Rand $\partial X = \{a, b\}$. Jeder Punkt in $[a, b]$ ist ein Häufungspunkt von X ; es gibt keine isolierten Punkte in X .
- (b) Für die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen gilt $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$ und $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Der Rand ist $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, und jeder dieser Randpunkte ist auch ein isolierter Punkt von \mathbb{Z} . Es gibt keine Häufungspunkte von \mathbb{Z} .
- (c) Mit der gleichen Begründung wie in Beispiel 23.33 (e) ist $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, sowie $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Also liegt \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} (wie wir auch schon in Folgerung 4.35 gesagt hatten), und jede reelle Zahl ist ein Häufungspunkt von \mathbb{Q} .

Die gerade definierten Mengen $\overset{\circ}{X}$, \bar{X} und ∂X erfüllen einige einfache anschauliche Eigenschaften, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen und oft zu ihrer Berechnung benutzt werden können:

Lemma 23.40. Für jede Teilmenge X eines metrischen Raumes M gilt:

- (a) $\overset{\circ}{X}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in X enthalten sind, also

$$\overset{\circ}{X} = \bigcup_{U \subset X \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\overset{\circ}{X}$ also die größte offene Menge, die in X enthalten ist; und X ist genau dann offen, wenn $\overset{\circ}{X} = X$.

- (b) \bar{X} ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die X enthalten, also

$$\bar{X} = \bigcap_{A \supset X \text{ abgeschlossen}} A.$$

Insbesondere ist \bar{X} also die kleinste abgeschlossene Menge, die X enthält; und X ist genau dann abgeschlossen, wenn $\bar{X} = X$.

- (c) $\overset{\circ}{X} = X \setminus \partial X$.
- (d) $\bar{X} = X \cup \partial X$.
- (e) $\partial X = \bar{X} \setminus \overset{\circ}{X}$. Insbesondere ist ∂X abgeschlossen.

Beweis.

- (a) Nach Definition 23.37 (a) bzw. Bemerkung 23.38 folgt für alle $a \in M$ sofort

$$a \in \overset{\circ}{X} \Leftrightarrow \text{es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \subset X \Leftrightarrow a \in \bigcup_{U \subset X \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\overset{\circ}{X}$ als Vereinigung offener Mengen nach Lemma 23.34 (b) also offen, und damit als Vereinigung *aller* offenen Teilmengen von X auch die größte offene Teilmenge von X . Ist weiterhin X offen, so ist X selbst eine der Mengen, über die wir hier die Vereinigung bilden, und damit ist die Vereinigung $\overset{\circ}{X}$ dieser Mengen dann gleich X .

- (b) zeigt man analog zu (a) durch Übergang zum Komplement: Für alle $a \in M$ gilt

$$\begin{aligned} a \in \bar{X} &\Leftrightarrow \text{es gibt kein } U \text{ offen mit } a \in U \subset M \setminus X \\ &\Leftrightarrow a \notin \bigcup_{U \subset M \setminus X \text{ offen}} U \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{U \subset M \setminus X \text{ offen}} (M \setminus U) \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{A \supset X \text{ abgeschlossen}} A \quad (\text{mit } A = M \setminus U). \end{aligned}$$

Insbesondere ist \bar{X} damit nach Lemma 23.34 (d) die kleinste abgeschlossene Teilmenge, die X enthält. Ist weiterhin X selbst abgeschlossen, so ist X eine der Mengen, über die hier der Durchschnitt gebildet wird, und somit ist dieser Durchschnitt (also \bar{X}) gleich X .

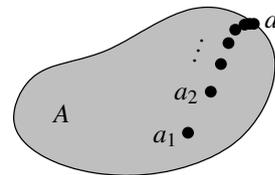
- (c) Die Bedingung $a \notin \partial X$ bedeutet genau, dass es eine offene Menge U mit $a \in U$ gibt, für die entweder $U \subset X$ oder $U \subset M \setminus X$ ist. Falls $a \in X$ gilt, kann hierbei wegen $a \in U$ natürlich nur die Alternative $U \subset X$ auftreten. Also ist $a \in X \setminus \partial X$ genau dann, wenn es eine offene Menge U mit $a \in U \subset X$ gibt, also wenn $a \in \overset{\circ}{X}$ gilt.
- (d) „ \subset “: Ist $a \in \bar{X}$ und $a \notin X$, so enthält jede offene Menge U mit $a \in U$ nicht nur einen Punkt aus X , sondern auch den Punkt $a \in M \setminus X$. Also ist dann $a \in \partial X$.

Die Inklusionen $X \subset \bar{X}$ und $\partial X \subset \bar{X}$ für die Rückrichtung „ \supset “ folgen sofort aus den Definitionen.

- (e) Die Gleichung folgt sofort aus (c) und (d); der Rand ∂X ist dann als Durchschnitt der nach (a) und (b) abgeschlossenen Mengen \bar{X} und $M \setminus \overset{\circ}{X}$ abgeschlossen. \square

Bemerkung 23.41. Insbesondere besagen die Teile (a) und (c) des Lemmas, dass eine Menge X genau dann offen ist (also $\overset{\circ}{X} = X$ gilt), wenn $X = X \setminus \partial X$ ist, also sie keinen ihrer Randpunkt enthält – was am Anfang dieses Abschnitts ja gerade unsere anschauliche Vorstellung von offenen Mengen war. Analog besagen (b) und (d), dass die Menge X genau dann abgeschlossen ist (also $\bar{X} = X$ gilt), wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Diese Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch ihre Randpunkte lässt sich auch gut mit Hilfe von Grenzwerten von Folgen interpretieren. Haben wir nämlich eine konvergente Folge $(a_n)_n$, deren Glieder in einer Teilmenge A eines metrischen Raumes liegen, so kann der Grenzwert dieser Folge anschaulich nur in A oder wie im Bild rechts auf dem Rand von A , also letztlich in \bar{A} liegen. Damit sollte A also genau dann abgeschlossen sein, wenn dieser Grenzwert in jedem Fall wieder in A liegt. Dies besagt der folgende Satz.



Satz 23.42 (Folgenkriterium für Abgeschlossenheit). *Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M ist genau dann abgeschlossen, wenn zu jeder konvergenten Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in A$ für (fast) alle n ihr Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ebenfalls in A liegt. (Man sagt in diesem Fall auch, dass A „abgeschlossen unter Grenzwertbildung“ ist.)*

Beweis.

„ \Rightarrow “: Es seien $A \subset M$ abgeschlossen und $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, deren Glieder fast alle in A liegen. Angenommen, der Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ läge in der offenen Menge $M \setminus A$. Dann wäre $M \setminus A$ nach Definition 23.32 (a) eine Umgebung von a , und damit müssten nach Bemerkung 23.14 fast alle a_n in $M \setminus A$ liegen – im Widerspruch dazu, dass bereits fast alle a_n in A liegen. Also war unsere Annahme falsch, und es gilt $a \in A$.

„ \Leftarrow “: Die Menge A sei nun abgeschlossen unter Grenzwertbildung. Angenommen, A wäre nicht abgeschlossen, also $M \setminus A$ nicht offen. Dann gäbe es einen Punkt $a \in M \setminus A$, um den keine ε -Umgebung vollständig in $M \setminus A$ liegt. Wir können also für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einen Punkt a_n in der $\frac{1}{n}$ -Umgebung von a wählen, der in A liegt. Wegen

$$d(a_n, a) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

ist $(a_n)_n$ dann im Widerspruch zur Annahme aber nach Bemerkung 23.14 eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $a \notin A$. Also ist A abgeschlossen. \square

Folgerung 23.43 (Vollständigkeit von Teilmengen). *Eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist genau dann selbst wieder vollständig, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei A eine Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes M . Nach Definition 23.28 (a) ist A genau dann vollständig, wenn jede Cauchyfolge in A einen Grenzwert in A hat. Da M vollständig ist, konvergiert jede solche Cauchyfolge aber in jedem Fall mit einem Grenzwert in M . Also ist A genau dann vollständig, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge mit Folgengliedern in A ebenfalls in A liegt, nach Satz 23.42 also genau dann, wenn A abgeschlossen ist. \square

Aufgabe 23.44. Man zeige:

- Die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 + 1\}$ ist offen in \mathbb{R}^2 .
- Sind $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ abgeschlossen in \mathbb{R}^n .
- In $\mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Menge aller diagonalisierbaren Matrizen für $n \geq 2$ weder offen noch abgeschlossen.

Aufgabe 23.45. Es seien A und B zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Man zeige:

- Ist $A \subset B$, so auch $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ und $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- Es ist stets $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Gilt hier im Allgemeinen auch die Gleichheit?

Aufgabe 23.46. In einem metrischen Raum M betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x, a) < r\}$. Man zeige:

- Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x, a) = r\}$.
- In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 23.47 (Häufungspunkte von Folgen und Mengen). Es seien M ein metrischer Raum, $a \in M$ und $X \subset M$. Wie in Definition 5.18 (c) nennt man a einen *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_n$ in M , wenn eine Teilfolge von $(a_n)_n$ gegen a konvergiert. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- a ist ein Häufungspunkt von X .
- Es gibt eine Folge in X , die nirgends den Wert a annimmt, und die a als Häufungspunkt hat.
- Es gibt eine Folge in X , die nirgends den Wert a annimmt, und die gegen a konvergiert.
- $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$.

Die Äquivalenz „(a) \Leftrightarrow (b)“ stellt also insbesondere eine Beziehung zwischen den Begriffen des Häufungspunktes einer Folge und einer Menge her.

Aufgabe 23.48 (Ein topologisches Spiel). Wir starten mit einer gegebenen Teilmenge X eines metrischen Raumes M . Ausgehend von dieser Teilmenge dürfen wir jetzt neue Teilmengen von M bilden, indem wir von X oder bereits vorher konstruierten Mengen entweder den Abschluss oder das Innere bilden. Starten wir z. B. im metrischen Raum $M = \mathbb{R}$ mit der Teilmenge $X = \{0\} \cup (1, 2]$, so ist deren Inneres gleich $(1, 2)$, und davon wieder der Abschluss gleich $[1, 2]$. Außerdem ist der Abschluss von X gleich $\{0\} \cup [1, 2]$. Man überprüft schnell, dass die Abschluss- oder Innerenbildung bei keiner dieser Mengen zu neuen Mengen führt. Ausgehend von der einen gewählten Menge X konnten wir hier also insgesamt vier verschiedene Mengen erzeugen.

Wie viele verschiedene Mengen kann man so bei geschickter Wahl von M und X maximal erzeugen?

(Hinweis: Zeige zuerst, dass

- (a) $AIX \subset AX$ und $IAIX \supset IX$,
- (b) $AIAIX = AIX$ und $IAIAX = IAX$,

wobei wir zur Übersichtlichkeit der Notation AX für den Abschluss und IX für das Innere von X geschrieben haben. Die gesuchte Maximalzahl von Mengen lässt sich bereits in $M = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Metrik für ein geeignetes $X \subset \mathbb{R}$ erreichen.)

Falls ihr noch weiter über diese Aufgabe nachdenken wollt: Wie viele Mengen kann man maximal aus einer gegebenen Menge X durch Abschluss- und Komplementbildung erzeugen?

23.D Kompaktheit

In Kapitel 8 haben wir einige wichtige Eigenschaften reeller stetiger Funktionen kennengelernt, die auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ definiert sind: Sie sind z. B. nach Satz 8.23 beschränkt, nehmen nach Satz 8.25 sogar ein Maximum und Minimum an, und sind nach Satz 8.50 auch gleichmäßig stetig. Alle diese Aussagen wären falsch, wenn wir den Definitionsbereich nur als beschränkt oder nur als abgeschlossen voraussetzen würden – wie die Beispiele der Funktionen $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ zeigen, die keine der drei genannten Eigenschaften erfüllen.

Für eine Teilmenge D von \mathbb{R} ist diese Kombination von Beschränktheit und Abgeschlossenheit in der Praxis also sehr wichtig. Der Grund dafür ist aus den Beweisen der obigen Sätze ersichtlich: Sie alle benötigen zu einer gegebenen Folge in D die Existenz einer konvergenten Teilfolge mit Grenzwert in D . Ist nun D beschränkt, so existiert nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß zunächst einmal eine konvergente Teilfolge, und ist D abgeschlossen, so liegt der Grenzwert dieser Teilfolge nach Satz 23.42 dann auch in D .

Für die Verallgemeinerung dieser Aussagen auf normierte bzw. metrische Räume müssen wir daher die Existenz konvergenter Teilfolgen untersuchen. Wir übertragen dazu zunächst den Satz von Bolzano-Weierstraß ins Mehrdimensionale.

Satz 23.49 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *In \mathbb{K}^n (mit der Standardnorm) besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Nach Bemerkung 23.18 können wir die Maximumsnorm verwenden. Ist dann eine Folge $(a^{(k)})_k$ beschränkt, gilt also $\|a^{(k)}\|_\infty \leq r$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{N}$, so ist damit auch $|a_i^{(k)}| \leq r$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$, d. h. es sind auch alle Koordinatenfolgen $(a_i^{(k)})_k$ beschränkt.

Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß in \mathbb{K} können wir also nach evtl. Auswählen einer Teilfolge annehmen, dass die erste Koordinatenfolge $(a_1^{(k)})_k$ von $(a^{(k)})_k$ konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge aus, so dass auch die zweite Koordinatenfolge konvergiert. Setzen wir dieses Verfahren fort, so haben wir nach n Schritten eine Teilfolge von $(a^{(k)})_k$ gefunden, von der jede Koordinatenfolge konvergiert, die also nach Lemma 23.19 in \mathbb{K}^n konvergent ist. \square

Mit dieser Vorarbeit können wir jetzt den zentralen Begriff dieses Abschnitts untersuchen:

Definition 23.50 (Folgenkompaktheit). Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M heißt **kompakt** bzw. **folgenkompakt**, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A hat.

Satz 23.51. *Es sei A eine Teilmenge eines metrischen Raumes M .*

- (a) *Ist A kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.*
- (b) *Im Fall $M = \mathbb{K}^n$ (mit der Standardnorm) gilt auch die Umkehrung, d. h. A ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis.

- (a) Wäre A nicht beschränkt, dann gäbe es ein $a \in A$ und eine Folge $(a_k)_k$ in A mit $d(a_k, a) \geq k$ für alle k . Dann ist aber jede Teilfolge von $(a_k)_k$ unbeschränkt, also divergent nach Lemma 23.22. Damit kann A nicht kompakt sein.

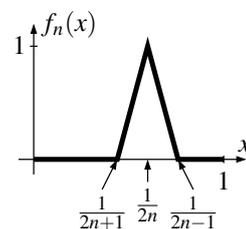
Wäre A hingegen nicht abgeschlossen, so gäbe es nach Satz 23.42 eine konvergente Folge $(a_k)_k$ in A , deren Grenzwert a in $M \setminus A$ liegt. Dann konvergiert aber auch jede Teilfolge von $(a_k)_k$ gegen a , und damit also nicht gegen einen Punkt in A . Auch hier kann A also nicht kompakt sein.

- (b) Die Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen. Jede Folge in A ist also zunächst beschränkt und besitzt damit nach dem Satz 23.49 von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge in \mathbb{K}^n . Der Grenzwert dieser Teilfolge liegt nun wegen der Abgeschlossenheit von A nach Satz 23.42 ebenfalls in A . Also ist A kompakt. \square

Beispiel 23.52.

- (a) Von den Intervallen in \mathbb{R} wie in Notation 4.17 (a) sind nach Satz 23.51 (b) genau die Intervalle der Form $[a, b]$ kompakt. In der Literatur werden sie daher auch oft wie in Notation 4.17 (a) als *kompakte Intervalle* statt als *abgeschlossene Intervalle* bezeichnet.
- (b) Abgeschlossene Kugeln $K_r(a) \subset \mathbb{K}^n$ mit $a \in \mathbb{K}^n$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind nach Definition beschränkt und nach Beispiel 23.33 (d) abgeschlossen, also kompakt. Genauso gilt dies nach Lemma 23.40 (e) auch für die Ränder $\partial K_r(a)$ dieser Kugeln.
- (c) In unendlich-dimensionalen normierten Räumen (und damit erst recht in allgemeinen metrischen Räumen) ist die Aussage aus Satz 23.51 (b) falsch: In $V = C^0([0, 1])$ mit der Maximumnorm sei $A = K_1(0) = \{f \in C^0([0, 1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel, die wie in (b) natürlich auch beschränkt ist.

Sie ist aber nicht kompakt: Dazu betrachten wir für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die „Dreiecksfunktionen“ f_n wie im Bild rechts; wegen $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle n ist $(f_n)_n$ eine Folge in A . Da sich die Dreiecke von f_m und f_n für $m \neq n$ nicht überlappen, besteht $f_m - f_n$ dann immer aus einem Dreieck nach oben und einem nach unten mit Höhe jeweils 1, d. h. es ist auch $\|f_m - f_n\|_\infty = 1$. Damit kann eine Teilfolge von $(f_n)_n$ aber niemals eine Cauchyfolge, und damit auch nicht konvergent sein. Also ist A nicht kompakt.



In der Tat kann man zeigen, dass die (beschränkte) abgeschlossene Einheitskugel im Gegensatz zum Fall von \mathbb{K}^n in *keinem* unendlich-dimensionalen normierten Raum kompakt ist. Das Studium von solchen unendlich-dimensionalen normierten Räumen ist der Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionalanalysis“ des zweiten Studienjahres. Wir haben jetzt in den letzten Kapiteln mehrfach gesehen, dass in solchen allgemeinen Räumen zwar viele Sätze noch genauso gelten wie im endlich-dimensionalen Fall, andererseits aber an entscheidenden Stellen auch große Unterschiede bestehen (siehe z. B. auch Beispiel 21.41 und Beispiel 21.50).

Wie bereits angekündigt werden wir später für stetige Funktionen auf kompakten Mengen ähnliche Eigenschaften zeigen, wie wir sie in Kapitel 8 für stetige Funktionen auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} bewiesen haben (siehe Abschnitt 24.B), z. B. dass solche Funktionen ein Maximum und Minimum annehmen. Das folgende Lemma ist eine kleine Vorbereitung dafür.

Lemma 23.53. *Jede kompakte, nicht-leere Menge in \mathbb{R} besitzt ein Maximum und Minimum.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es offensichtlich, den Fall des Maximums zu betrachten. Ist $A \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist A nach Satz 23.51 (a) beschränkt und besitzt damit wegen $A \neq \emptyset$ nach dem Supremumsaxiom (siehe Definition 4.29) ein Supremum $s := \sup A$. Angenommen, es wäre $s \notin A$. Da A kompakt und damit nach Satz 23.51 (a) abgeschlossen ist, gäbe es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus A$, d. h. $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Dann wäre aber nicht nur s , sondern auch $s - \varepsilon$ eine obere Schranke für A – im Widerspruch zu $s = \sup A$.

Also war unsere Annahme falsch, und es ist $s \in A$, also $s = \max A$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch eine oft benötigte alternative Charakterisierung der Kompaktheit untersuchen. Da sie sich sehr von unserer ursprünglichen Definition 23.50 unterscheidet, geben wir ihr zunächst einen anderen Namen – wir werden aber in Satz 23.58 sehen, dass es sich zumindest für Teilmengen von \mathbb{K}^n um eine zur Folgenkompaktheit äquivalente Eigenschaft handelt.

Definition 23.54 (Überdeckungskompaktheit). Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes M heißt **überdeckungskompakt**, wenn gilt: Sind I eine beliebige Indexmenge und $U_i \subset M$ offene Teilmengen mit $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, so gibt es bereits endlich viele $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$.

Bemerkung 23.55.

- (a) Man sagt auch, dass eine solche Familie offener Mengen, die in ihrer Vereinigung die Menge A enthalten, eine *offene Überdeckung* von A ist. Dementsprechend wird die Bedingung der Überdeckungskompaktheit oft auch so formuliert: Jede offene Überdeckung von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung (also eine Überdeckung aus endlich vielen der gegebenen Mengen).

Natürlich ist dies nur für Überdeckungen aus *unendlich vielen* offenen Mengen eine nicht-triviale Bedingung.

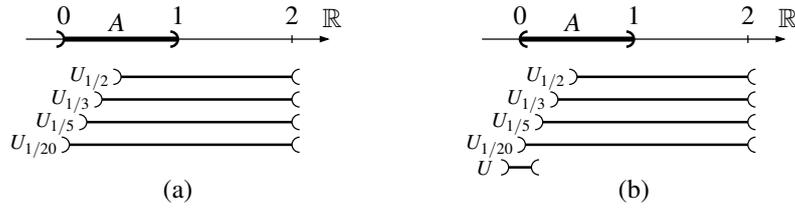
- (b) Sowohl die Folgenkompaktheit aus Definition 23.50 als auch die Überdeckungskompaktheit aus Definition 23.54 sind offensichtlich topologische Eigenschaften im Sinne von Bemerkung 23.18.

Beispiel 23.56. Es sei $M = \mathbb{R}$.

- (a) Betrachten wir das halboffene Intervall $A = (0, 1]$, so bilden die unendlich vielen Intervalle $U_\varepsilon = (\varepsilon, 2)$ für alle $0 < \varepsilon < 1$, von denen wir im Bild unten links exemplarisch vier eingezeichnet haben, eine offene Überdeckung von A : Alle U_ε sind offen, und ihre Vereinigung umfasst die gesamte Menge A , da es zu jedem $x \in A = (0, 1]$ noch ein ε gibt mit $0 < \varepsilon < x$, also mit $x \in U_\varepsilon$.

Treffen wir aus diesen offenen Mengen jedoch eine beliebige *endliche* Auswahl $U_{\varepsilon_1}, \dots, U_{\varepsilon_k}$, so überdecken diese endlich vielen Mengen sicher nicht mehr die ganze Menge A , denn es ist ja $U_{\varepsilon_1} \cup \dots \cup U_{\varepsilon_k} = U_\varepsilon$ mit $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, und diese Vereinigung enthält z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{\varepsilon}{2} \in A$. (Im Bild unten links enthalten die vier dort ausgewählten Intervalle z. B. nicht mehr die Zahl $\frac{1}{40} \in A$).

Wir finden in diesem Fall also keine endliche Teilüberdeckung zu der gegebenen offenen Überdeckung von A . Damit ist A nicht überdeckungskompakt.



(b) Betrachten wir nun stattdessen das abgeschlossene Intervall $A = [0, 1]$, so stellen wir zumindest fest, dass wir die Bedingung der Überdeckungskompaktheit dann nicht mehr so einfach widerlegen können: Die oben gewählten offenen Intervalle U_ε für $0 < \varepsilon < 1$ bilden nun keine Überdeckung von A mehr, da sie den Punkt $0 \in A$ nicht enthalten. Um daraus eine Überdeckung von A zu machen, müssten wir noch eine offene Menge U mit $0 \in U$ mit hinzunehmen – z. B. $U = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ wie im Bild oben rechts, so dass wir die offene Überdeckung $U \cup \bigcup_{0 < \varepsilon < 1} U_\varepsilon$ von A erhalten. In diesem Fall ist es aber einfach, daraus eine endliche Teilüberdeckung von A auszuwählen, nämlich z. B. $A \subset U \cup U_{1/20} = (-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) \cup (\frac{1}{20}, 2)$.

Beachte jedoch, dass wir mit diesem Argument noch nicht gezeigt haben, dass A überdeckungskompakt ist! Dazu hätten wir nämlich zu einer beliebigen offenen Überdeckung die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung beweisen müssen – während wir eben ja nur eine ganz spezielle offene Überdeckung betrachtet haben. In der Tat ist A aber überdeckungskompakt, wie wir gleich in Satz 23.58 sehen werden.

Analog zu Satz 23.51 (a) zeigen wir zunächst:

Lemma 23.57. *Jede überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Es sei A eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M .

A ist beschränkt: Da mit einem fest gewählten Punkt $a \in M$ die offenen Kugeln $U_r(a)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ offensichtlich den ganzen Raum M und damit auch A überdecken, können wir wegen der Überdeckungskompaktheit von A endlich viele $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen mit

$$A \subset U_{r_1}(a) \cup \dots \cup U_{r_n}(a) = U_r(a),$$

wobei $r = \max(r_1, \dots, r_n)$. Nach Definition 23.20 (a) ist A also beschränkt.

A ist abgeschlossen, d. h. $M \setminus A$ ist offen: Es sei $a \in M \setminus A$. Diesmal betrachten wir die offenen Mengen

$$V_r(a) := M \setminus K_r(a) = \{x \in M : d(x, a) > r\}$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$, die natürlich $M \setminus \{a\}$ und damit auch A überdecken. Da A überdeckungskompakt ist, gibt es also wieder endlich viele $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$A \subset V_{r_1}(a) \cup \dots \cup V_{r_n}(a) = V_r(a),$$

wobei $r = \min(r_1, \dots, r_n)$. Durch Komplementbildung erhalten wir daraus $U_r(a) \subset K_r(a) \subset M \setminus A$. Also ist $M \setminus A$ offen. □

59

Satz 23.58 (Satz von Heine-Borel). *Eine Teilmenge von \mathbb{K}^n ist genau dann überdeckungskompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Wir können wieder die zur euklidischen Norm äquivalente Maximumsnorm auf \mathbb{K}^n verwenden. Außerdem können wir ohne Einschränkung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen, da wir im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ den Raum \mathbb{C}^n einfach als \mathbb{R}^{2n} auffassen können.

Wir haben in Lemma 23.57 schon gesehen, dass eine überdeckungskompakte Teilmenge von \mathbb{R}^n beschränkt und abgeschlossen sein muss. Es sei nun also umgekehrt $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Wir zeigen mit einem Widerspruchsbeweis, dass A dann überdeckungskompakt ist.

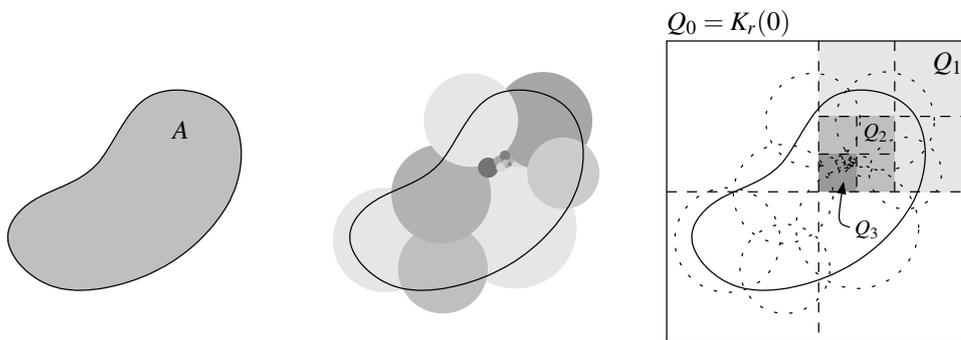
Es sei also $\bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von A ohne endliche Teilüberdeckung. Im Bild unten in der Mitte ist dies dadurch angedeutet, dass die offenen Mengen der Überdeckung an einer Stelle

sehr klein werden und damit evtl. sehr viele (bzw. unendlich viele) von ihnen benötigt werden, um A dort zu überdecken.

Als beschränkte Menge ist A in einer abgeschlossenen Kugel (in der Maximumsnorm), also in einem Würfel

$$Q_0 := K_r(0) = [-r, r]^n$$

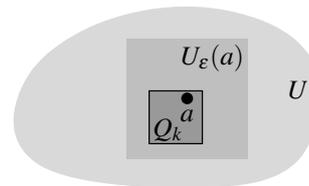
enthalten. Ausgehend von Q_0 konstruieren wir nun rekursiv wie im Bild unten rechts eine Folge $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von ineinander liegenden Würfeln mit Kantenlängen $2r \cdot 2^{-k}$, so dass auch $A \cap Q_k$ nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann: Ist Q_k für ein $k \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, teilen wir diesen Würfel wie im Bild dargestellt an den Seitenmitten in 2^n Teilwürfel mit halber Kantenlänge. Von diesen gibt es nun mindestens einen Teilwürfel, den wir Q_{k+1} nennen, für den der Schnitt mit A nicht durch endlich viele U_i überdeckt werden kann – denn ansonsten könnte ja auch $A \cap Q_k$ durch endlich viele U_i überdeckt werden.



Die Menge A , ... eine offene Überdeckung von A ... und die Würfel Q_k

Da die konstruierten Würfel in jeder Koordinate eine Intervallschachtelung bilden, gibt es nun nach Satz 5.39 genau einen Punkt $a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} Q_k$.

Beachte, dass jede offene Umgebung U von a einen der Würfel Q_k enthält: Als offene Umgebung enthält sie nämlich wie im Bild rechts zunächst eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ (in der Maximumsnorm), und diese dann wiederum für $2r \cdot 2^{-k} < \varepsilon$ den Würfel Q_k . Damit erhalten wir aber in jedem Fall einen Widerspruch, wenn wir nun überprüfen, ob a in A liegt oder nicht:



- Gilt $a \in A$, so liegt a in einer der offenen Mengen U_i der gegebenen Überdeckung von A . Wie wir gerade gesehen haben, enthält dann schon diese eine Menge U_i einen der Würfel Q_k , ist also insbesondere eine Überdeckung von $A \cap Q_k$ – im Widerspruch zur Annahme, dass $A \cap Q_k$ keine endliche Teilüberdeckung durch die gegebenen Mengen besitzt.
- Gilt $a \notin A$, so liegt a in der offenen Menge $\mathbb{R}^n \setminus A$, die nun also einen der Würfel Q_k enthalten muss. Damit ist $A \cap Q_k = \emptyset$ – ebenfalls im Widerspruch dazu, dass $A \cap Q_k$ keine endliche Teilüberdeckung durch die gegebenen Mengen hat.

Dieser Widerspruch zeigt, dass A überdeckungskompakt sein muss. \square

Bemerkung 23.59 (Folgen- und Überdeckungskompaktheit). Nach Satz 23.51 (b) und 23.58 stimmen die Begriffe der Folgenkompaktheit und Überdeckungskompaktheit für Teilmengen von \mathbb{K}^n also überein. In der Tat kann man zeigen, dass diese Äquivalenz sogar in beliebigen metrischen Räumen gilt [M, Satz 39.30] – für alle in dieser Vorlesung betrachteten Räume sind diese beiden Begriffe also völlig gleichwertig. In der Tat wird der Begriff der Kompaktheit in der Literatur meistens über die Überdeckungskompaktheit definiert. Wir haben uns hier für die Definition über die Folgenkompaktheit entschieden, da dies wohl das deutlich anschaulichere Konzept ist.

Aufgabe 23.60. Man zeige: Sind K und L zwei kompakte Teilmengen eines normierten Raumes, so ist auch deren Summe $K + L = \{a + b : a \in K, b \in L\}$ kompakt.

Aufgabe 23.61. Es seien A und K zwei Teilmengen eines metrischen Raumes M . Man zeige:

- (a) Ist A abgeschlossen und K folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.
- (b) Ist A abgeschlossen und K überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

Die in Bemerkung 23.59 erwähnte, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit in allgemeinen metrischen Räumen soll hierbei natürlich nicht benutzt werden.

Aufgabe 23.62.

- (a) Es seien K eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K in M . Man zeige:

Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass zu jedem $a \in K$ ein $i \in I$ existiert mit $U_\varepsilon(a) \subset U_i$. (*)

- (b) Finde ein Beispiel einer *endlichen* offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von $K = M = \mathbb{R}^n$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Aussage (*) falsch ist.