Grundlagen der Mathematik 2: Lineare Algebra

19. Endomorphismen

In Kapitel 16 hatten wir ausführlich untersucht, wie man lineare Abbildungen $f: V \to W$ zwischen zwei (endlich-dimensionalen) K-Vektorräumen V und W beschreiben kann. Wir haben gesehen, dass sich solche Morphismen nach Wahl von Basen von V und W immer durch Matrizen darstellen lassen, und dass man bei geeigneter Wahl dieser Basen auch immer erreichen kann, dass diese Matrizen eine sehr einfache Form haben (siehe Satz 17.29).

Wir wollen uns jetzt den sehr häufig vorkommenden Spezialfall der sogenannten *Endomorphismen* ansehen, bei denen der Startraum V derselbe ist wie der Zielraum W, so dass wir einen Vektor $x \in V$ direkt mit seinem Bildvektor $f(x) \in W$ vergleichen können. Um dies auch anhand der Koordinaten von x und $f(x)$ bezüglich der gewählten Basen machen zu können, werden wir bei der Untersuchung von Endomorphismen in der Regel voraussetzen, dass wir in V und W die gleiche Basis gewählt haben.

Schon ohne irgendeine Rechnung sollte klar sein, dass wir in diesem Fall wohl keine so einfache Abbildungsmatrix wie in Satz 17.29 erhalten können, da wir jetzt ja nur noch *eine* Basis frei wählen dürfen und damit viel weniger Möglichkeiten haben, das Resultat zu manipulieren. In der Tat wird dieses Problem einer möglichst einfachen Abbildungsmatrix durch die verringerten Wahlmöglichkeiten so kompliziert, dass wir es erst am Ende des nächsten Kapitels vollständig lösen können.

19.A Ähnliche Matrizen

Um den Unterschied zwischen linearen Abbildungen mit verschiedenem und gleichem Start- und Zielraum deutlich zu sehen, erinnern wir uns zunächst noch einmal kurz an unsere Resultate über Abbildungsmatrizen aus Abschnitt 16.C.

Bemerkung 19.1 (Abbildungsmatrizen linearer Abbildungen)**.** Es seien V und W endlich erzeugte Vektorräume der Dimensionen n bzw. m mit gewählten Basen $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$. Weiterhin sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann wissen wir bereits:

(a) Wir können f durch die Abbildungsmatrix

$$A_f^{B,C} = (\Phi_C(f(x_1)) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_C(f(x_n)))$$

beschreiben (siehe Definition 16.26), wobei $\Phi_C: W \to K^m$ die Koordinatenabbildung aus Konstruktion 16.18 ist. Die Spalten dieser Matrix sind also genau die Koordinatenvektoren bzgl. C der Bilder der Basisvektoren von B. Diese Zuordnung einer Matrix $A_f^{B,C}$ zu einem Morphismus f liefert einen Isomorphismus zwischen dem Raum $\mathrm{Hom}(V,W)$ aller derartigen Morphismen und dem Raum $K^{m\times n}$ aller Matrizen der passenden Größe.

(b) Sind B' und C' weitere Basen von V bzw. W, so ändert sich die zugehörige Abbildungsmatrix nach Satz 16.42 (a) gemäß

$$A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B},$$

wobei $A^{C,C'} \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $A^{B',B} \in \mathrm{GL}(n,K)$ die Basiswechselmatrizen aus Definition 16.38 sind, es ist also z. B. $A^{C,C'} = (\Phi_{C'}(y_1) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_{C'}(y_m))$.

(c) Umgekehrt sind invertierbare Matrizen auch immer Basiswechselmatrizen. Zwei Matrizen $A, A' \in K^{m\times n}$ beschreiben damit genau dann dieselbe lineare Abbildung (nur bezüglich evtl. verschiedener Basen), wenn es invertierbare Matrizen S und T gibt mit $A' = SAT$ (siehe Satz

16.42). Wir haben A und A' in diesem Fall *äquivalent* zueinander genannt (siehe Definition 16.44).

(d) Nach Satz 17.29 kann man die Basen B und C stets so wählen, dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ von f die besonders einfache „Normalform" (bezüglich der Äquivalenz von Matrizen)

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

mit $r = \operatorname{rk} f$ besitzt. In der Sprechweise von (c) bedeutet dies einfach, dass jede Matrix äquivalent zu einer Matrix in einer solchen Normalform ist.

Wie schon angekündigt wollen wir nun untersuchen, was sich an diesen Eigenschaften ändert, wenn Start- und Zielraum der betrachteten Morphismen übereinstimmen und wir in beiden Räumen auch die gleiche Basis wählen.

Definition 19.2 (Endomorphismen)**.** Es sei V ein K-Vektorraum. Ein Morphismus $f\colon V \to V$ von V in sich heißt **Endomorphismus** von V. Der Vektorraum aller Endomorphismen von V wird mit $\operatorname{End}(V) = \operatorname{Hom}(V,V)$ bezeichnet.

Bemerkung 19.3 (Abbildungsmatrizen von Endomorphismen)**.** Wir betrachten einen endlich-dimensionalen Vektorraum V mit einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$. Die Eigenschaften aus Bemerkung 19.1 ändern sich dann für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ wie folgt:

(a) Die *Abbildungsmatrix* von f wie in Bemerkung 19.1 (a) mit Start- und Zielbasis B bezeichnen wir kurz mit

$$A_f^B := A_f^{B,B} = (\Phi_B(f(x_1)) \,|\, \cdots \,|\, \Phi_B(f(x_n))),$$

so dass die Zuordnung $f \mapsto A_f^B$ nun also einen Isomorphismus von $\operatorname{End}(V)$ in den Raum $K^{n\times n}$ der quadratischen $n \times n$-Matrizen liefert.

(b) Die Transformationsformel aus Bemerkung 19.1 (b) wird dementsprechend zu

$$A_f^{B'} = A^{B,B'} \cdot A_f^B \cdot A^{B',B}$$

für eine zweite Basis B' von V. Weil nach Lemma 16.41 (a) aber $A^{B,B'} = (A^{B',B})^{-1}$ gilt, können wir dies schreiben als

$$A_f^{B'} = T^{-1} A_f^B T \quad \text{mit} \quad T = A^{B',B}.$$

(c) Da invertierbare Matrizen immer Basiswechselmatrizen sind, beschreiben zwei quadratische Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ genau dann denselben Endomorphismus (nur bezüglich evtl. einer anderen Basis), wenn es eine invertierbare Matrix T gibt mit $A' = T^{-1}AT$. Wir definieren daher:

Definition 19.4 (Ähnliche Matrizen)**.** Zwei quadratische Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ derselben Größe heißen **ähnlich** zueinander, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \operatorname{GL}(n,K)$ gibt, so dass $A' = T^{-1}AT$.

Nach Bemerkung 19.3 (c) sind A und A' also genau dann ähnlich zueinander, wenn sie denselben Endomorphismus bezüglich einer evtl. anderen Basis beschreiben.

Bemerkung 19.5.

(a) Wie im Fall der Äquivalenz von Matrizen (siehe Bemerkung 16.45 (a)) prüft man auch hier leicht nach, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist (siehe Definition 2.31).

(b) Zwei ähnliche Matrizen sind offensichtlich auch immer äquivalent zueinander. Beachte, dass die Wahl der Begriffe hier etwas ungeschickt ist, denn im normalen Sprachgebrauch klingt „Äquivalenz" ja wie eine stärkere Bedingung als „Ähnlichkeit" – in Wirklichkeit ist es aber genau umgekehrt.

Die Übertragung von Teil (d) der Bemerkung 19.1, also die Frage nach einer „Normalform von Matrizen bezüglich Ähnlichkeit“, führt auf die sogenannte Jordansche Normalform, die wir im nächsten Kapitel ausführlich untersuchen werden. In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst einmal damit begnügen, ein paar Eigenschaften quadratischer Matrizen anzugeben, die bei ähnlichen Matrizen gleich sind. Neben dem Rang (der bei ähnlichen Matrizen aufgrund von Folgerung 16.46 natürlich übereinstimmt) sind dies die uns schon bekannte Determinante sowie die sogenannte Spur, die wir jetzt kurz einführen und untersuchen wollen.

Definition 19.6 (Spur einer Matrix)**.** Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, so heißt die Summe ihrer Einträge auf der Diagonale von links oben nach rechts unten

$$\operatorname{Spur} A := a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} \quad \in K$$

die **Spur** von A.

Lemma 19.7. *Für alle $A, B \in K^{n\times n}$ gilt* $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

Beweis. Es seien $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$. Dann gilt nach Definition 15.5 des Matrixprodukts

$$\operatorname{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \quad \text{und} \quad \operatorname{Spur}(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} a_{j,i}.$$

Dies ist aber derselbe Ausdruck (unter Vertauschung der Bezeichnung der Summationsvariablen $i \leftrightarrow j$). □

Lemma 19.8 (Invarianz von Determinante und Spur unter Ähnlichkeit)**.** *Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ zwei zueinander ähnliche Matrizen, so gilt*

(a) $\det A' = \det A$;

(b) $\operatorname{Spur} A' = \operatorname{Spur} A$.

Beweis. Es sei $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $A' = T^{-1}AT$.

(a) Mit Satz 18.6 folgt

$$\det A' = \det(T^{-1}AT) = (\det T)^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A.$$

(b) Es gilt

$$\operatorname{Spur} A' = \operatorname{Spur}(T^{-1}A \cdot T) \overset{19.7}{=} \operatorname{Spur}(T \cdot T^{-1}A) = \operatorname{Spur}(EA) = \operatorname{Spur} A.$$ □

Beispiel 19.9. Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt $\det A = 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = -3$ und $\operatorname{Spur} A = 4 - 2 = 2$. Betrachten wir nun die invertierbare Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{so berechnet man leicht} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A' := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist in Übereinstimmung mit Lemma 19.8 auch hier $\det A' = -3$ und $\operatorname{Spur} A' = 2$. Diese Invarianz von Determinante und Spur bedeutet auch bereits, dass A sicher nicht zu einer Matrix in einer Normalform wie in Bemerkung 19.1 (d) ähnlich sein kann, da alle diese Matrizen ja Determinante 0 oder 1 haben.

Die Invarianz der Determinante und Spur einer Matrix hat auch noch eine weitere wichtige Konsequenz: Genau wie beim Rang bedeutet sie, dass wir diese Konzepte nicht nur für Matrizen, sondern auch für Endomorphismen definieren können.

Konstruktion 19.10 (Determinante und Spur von Endomorphismen)**.** Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann definieren wir die **Determinante** und **Spur** von f als

$$\det f := \det A_f^B \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Spur} f := \operatorname{Spur} A_f^B$$

für eine beliebige Basis B von V. Beachte, dass dies wohldefiniert ist, weil eine andere Basiswahl nach Bemerkung 19.3 (b) zu einer ähnlichen Abbildungsmatrix und somit nach Lemma 19.8 zur gleichen Determinante und Spur führen würde.

19.B Eigenwerte

Wir wollen nun ein weiteres sehr wichtiges Konzept einführen, das für quadratische Matrizen genauso wie für Endomorphismen definiert werden kann und auf der Idee basiert, dass wir bei gleichem Start- und Zielraum einen Vektor in der Startmenge mit seinem Bildvektor vergleichen können.

Definition 19.11 (Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume)**.**

(a) Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $x \in K^n \backslash \{0\}$ gibt mit $Ax = \lambda x$. In diesem Fall heißt x ein zum Eigenwert λ gehöriger **Eigenvektor**. Die Menge

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda) := \{x \in K^n : Ax = \lambda x\}$$

wird der **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ genannt.

(b) Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V. In diesem Fall heißt $\lambda \in K$ ein **Eigenwert** und $x \in V\backslash\{0\}$ ein zugehöriger **Eigenvektor** von f, wenn $f(x) = \lambda x$. Auch hier ist der **Eigenraum** von f zu λ die Menge

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda) := \{x \in V : f(x) = \lambda x\}.$$

Bemerkung 19.12.

(a) Der Eigenraum (einer Matrix oder Endomorphismus) ist also einfach die Menge aller Eigenvektoren – mit Ausnahme des Nullvektors, der nach Definition 19.11 *nie* ein Eigenvektor ist, aber in *jedem* Eigenraum enthalten ist. Ein Vorteil dieser Konvention ist zum Beispiel, dass der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda)$ einer Matrix A stets ein Untervektorraum von K^n ist, denn er lässt sich wegen

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \{x \in K^n : Ax = \lambda x\} = \{x \in K^n : (\lambda E - A)x = 0\} = \operatorname{Ker}(\lambda E - A)$$

als Kern einer Matrix schreiben, wobei E wie üblich die Einheitsmatrix (der Größe $n \times n$) bezeichnet. Diese alternative Beschreibung $\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda E - A)$ werden wir im Folgenden oft benutzen. Natürlich können wir auch genauso gut $\operatorname{Eig}(A,\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ schreiben, da eine Matrix und ihr Negatives stets denselben Kern haben. Ein wichtiger Spezialfall hiervon ist der des Eigenwerts 0: Hier ist $\operatorname{Eig}(A,0) = \operatorname{Ker} A$ einfach der Kern der gegebenen Matrix.

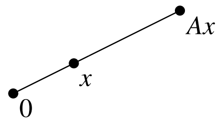
(b) Analog zu (a) ist $\operatorname{Eig}(f,\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id}_V - f) \le V$ für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$.

(c) Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, so hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus $f\colon V \to V$ wie erwartet mit denen der Abbildungsmatrix A_f^B von f bezüglich einer Basis B von V zusammen: Nach Satz 16.26 ist $\Phi_B(f(x)) = A_f^B \cdot \Phi_B(x)$ für alle $x \in V$, und damit

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda x \;&\Leftrightarrow\; \Phi_B(f(x)) = \lambda \Phi_B(x) \\ &\Leftrightarrow\; A_f^B \cdot \Phi_B(x) = \lambda\, \Phi_B(x). \end{aligned}$$

Also ist $x \in V$ genau dann ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von f, wenn der zugehörige Koordinatenvektor $\Phi_B(x)$ ein Eigenvektor zum selben Eigenwert λ der Abbildungsmatrix A_f^B ist. Insbesondere haben f und A_f^B damit die gleichen Eigenwerte.

Beispiel 19.13 (Geometrische Deutung von Eigenvektoren)**.** Nach Definition ist ein Vektor $x \neq 0$ genau dann ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A zum Eigenwert λ, wenn x durch die zu A gehörige lineare Abbildung wie im Bild rechts nur um einen Faktor λ gestreckt wird. Besonders einfach zu sehen ist dies im Fall von Drehungen in der Ebene: Für einen gegebenen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ beschreibt die Abbildung



$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{i\alpha} x,$$

also in Polarkoordinaten $f(r e^{i\varphi}) = r e^{i(\varphi+\alpha)}$, nach Satz 9.27 gerade die Drehung der komplexen Zahlenebene um den Ursprung um den Winkel α. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ gemäß $x = x_1 + ix_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ in Real- und Imaginärteil aufteilen, so können wir f auch schreiben als

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x_1 + ix_2 \mapsto (\cos\alpha + i\sin\alpha)(x_1 + ix_2) = (\cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot x_2) + i(\sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2),$$

bzw. in Vektorschreibweise als die lineare Abbildung $f = f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zur sogenannten *Drehmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Für eine solche Drehung sehen wir nun auch ohne Rechnung:

(a) Für $\alpha = 0$ ist $A = E$, also $x \mapsto f(x) = Ax = x$ die Identität. Damit ist 1 der einzige Eigenwert von f bzw. A, und $\mathrm{Eig}(f,1) = \mathrm{Eig}(A,1) = \mathbb{R}^2$.

(b) Für $\alpha = \pi$ ist $A = -E$, die Abbildung $x \mapsto f(x) = Ax = -x$ spiegelt alle Vektoren am Ursprung. Also ist in diesem Fall -1 der einzige Eigenwert von f bzw. A, und $\mathrm{Eig}(f,-1) = \mathrm{Eig}(A,-1) = \mathbb{R}^2$.

(c) Für alle anderen Drehwinkel wird kein Vektor $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ auf ein Vielfaches von sich abgebildet. Die Abbildung f bzw. die Matrix A hat dann also keine Eigenvektoren und damit auch keine Eigenwerte. 42

Beispiel 19.14 (Eigenvektoren in Funktionenräumen)**.** Ein wichtiges Beispiel von (unendlich-dimensionalen) Vektorräumen, die wir bisher noch nicht untersucht haben, erhalten wir, wenn wir die lineare Algebra mit der Analysis kombinieren und Räume stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen betrachten. So ist z. B. für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ (ohne isolierte Punkte) und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die in Definition 11.7 bereits eingeführte Menge $C^n(D)$ aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$, da mit $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ auch $f+g$ und λf für $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder n-mal stetig differenzierbar sind.

Betrachten wir nun z. B. die Ableitungsabbildung

$$f\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ \varphi \mapsto \varphi'$$

(die nach den Rechenregeln für Ableitungen aus Satz 10.8 linear ist), so können wir auch für diesen Endomorphismus nach Eigenwerten und Eigenvektoren suchen. In der Tat sehen wir hier auch schnell, dass jede reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f ist, denn für die Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{\lambda x}$ gilt ja $\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit $f(\varphi) = \lambda \varphi$.

Wir wollen nun aber wieder zum endlich-dimensionalen Fall zurückkehren und als Erstes untersuchen, wie man im Allgemeinen von einer gegebenen Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann. Dazu beginnt man mit den Eigenwerten:

Satz 19.15 (Berechnung von Eigenwerten)**.** *Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Eine Zahl $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn* $\det(\lambda E - A) = 0$.

Beweis. Für $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \text{ es gibt ein } x \in K^n \backslash \{0\} \text{ mit } (\lambda E - A)x = 0 \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker}(\lambda E - A) > 0 \\
&\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(\lambda E - A) < n && \text{(Satz 15.33 (a))} \\
&\Leftrightarrow \lambda E - A \text{ nicht invertierbar} && \text{(Definition 15.17)} \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0. && \text{(Satz 18.6 (b))}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 19.16. Die Eigenwerte der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 19.9 sind nach Satz 19.15 die Lösungen der Gleichung

$$0 = \det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 2) + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3),$$

also $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$.

Die Eigenräume bzw. Eigenvektoren ergeben sich nun für jeden dieser Eigenwerte λ als Lösung des linearen Gleichungssystems $(\lambda E - A)x = 0$, also indem man in die oben bereits berechnete Matrix $\lambda E - A$ den entsprechenden Eigenwert einsetzt und mit dem Gauß-Verfahren wie in Satz 15.33 den Kern dieser Matrix bestimmt. So erhalten wir z. B.

$$\operatorname{Eig}(A, -1) = \operatorname{Ker}(-1E - A) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Genauso ergibt sich

$$\operatorname{Eig}(A, 3) = \operatorname{Ker}(3E - A)x = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren sind jeweils die Vektoren dieser Eigenräume mit Ausnahme des Nullvektors.

Beachte, dass wir hier bei der Rechnung eine gute Kontrolle haben: Wenn wir mit Satz 19.15 einen Eigenwert λ berechnet haben und nach Einsetzen dieses Wertes in das lineare Gleichungssystem $(\lambda E - A)x = 0$ als Lösung aber nur den Nullvektor, also keinen Eigenvektor herausbekommen, dann müssen wir irgendwo einen Rechenfehler gemacht haben.

Im Beispiel dieser reellen 2×2-Matrix A haben wir für den Ausdruck $\det(\lambda E - A)$ eine normierte quadratische Polynomfunktion (siehe Definition 3.18) herausbekommen. Wir wollen nun sehen, dass dies ein allgemeines Resultat ist und wir für eine $n \times n$-Matrix die Nullstellen einer Polynomfunktion vom Grad n berechnen müssen. Damit wir diesen Nullstellen dann auch Vielfachheiten zuordnen können, sollten wir jedoch zunächst voraussetzen, dass der Grundkörper K unendlich viele Elemente hat und wir damit Polynomfunktionen mit Polynomen gleichsetzen können, d. h. einen Koeffizientenvergleich zur Verfügung haben (siehe Lemma 3.22, Notation 3.23 und Satz 3.25). Wir vereinbaren also:

Im Folgenden (in Kapitel 19 und 20) sei K stets ein Körper mit unendlich vielen Elementen.

Satz und Definition 19.17 (Charakteristisches Polynom)**.** *Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist*

$$\chi_A(t) := \det(tE - A)$$

ein normiertes Polynom vom Grad n. Man nennt es das ***charakteristische Polynom*** *von A.*

Die Eigenwerte von A sind nach Satz 19.15 also genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A.

Beweis. Wir zeigen zunächst mit Induktion über $k = 1, \dots, n$, dass die Determinante jeder $k \times k$-Teilmatrix $B(t) = (b_{i,j}(t))_{i,j}$ von $tE - A$, die durch Auswahl von k Zeilen und Spalten entsteht, ein Polynom vom Grad höchstens k ist.

$k = 1$: In diesem Fall ist die Behauptung offensichtlich, da alle Einträge von $tE - A$ Polynome vom Grad höchstens 1 sind.

$k \to k+1$: Die Matrix $B(t)$ habe nun die Größe $(k+1) \times (k+1)$. Nach der Laplace-Entwicklung aus Satz 18.15 gilt

$$\det B(t) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} b_{i,1}(t) \det B'_{i,1}(t),$$

wobei $B'_{i,1}(t)$ die $k \times k$-Streichungsmatrix aus Definition 18.11 bezeichnet, bei der aus $B(t)$ die Zeile i und Spalte 1 herausgestrichen wurde. Da hier $b_{i,1}(t)$ als Eintrag von $tE - A$ ein Polynom vom Grad höchstens 1 ist und $\det B'_{i,1}(t)$ nach Induktionsvoraussetzung maximal Grad k hat, ist $\det B(t)$ wie behauptet ein Polynom vom Grad höchstens $k+1$.

Für $k = n$ erhalten wir also, dass $\chi_A(t) = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0$ (mit $c_0, \ldots, c_n \in K$) ein Polynom vom Grad höchstens n ist. Um hierbei noch den Koeffizienten c_n zu bestimmen, betrachten wir zunächst für $t \neq 0$ den Ausdruck

$$t^n \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = t^n (c_n t^{-n} + c_{n-1} t^{-n+1} + \cdots + c_1 t^{-1} + c_0) = c_n + c_{n-1} t + \cdots + c_1 t^{n-1} + c_0 t^n. \quad (1)$$

Nach Definition des charakteristischen Polynoms können wir ihn auch berechnen durch

$$t^n \chi_A\left(\frac{1}{t}\right) = t^n \det\left(\frac{1}{t} E - A\right) \overset{(*)}{=} \det(E - tA), \quad (2)$$

wobei sich $(*)$ aus der Multilinearität der Determinante gemäß Definition 18.2 (a) ergibt: Multipliziert man jede Zeile der $n \times n$-Matrix $\frac{1}{t} E - A$ mit t, um daraus $E - tA$ zu erhalten, so multipliziert sich die Determinante dadurch mit t^n.

Die Ausdrücke (1) und (2) stimmen also für alle $t \neq 0$ überein. Da es sich hierbei um ein Polynom handelt, müssen sie damit aber auch für $t = 0$ übereinstimmen; Einsetzen von $t = 0$ liefert damit wie behauptet

$$c_n = \det(E - 0 \cdot A) = \det E = 1. \qquad \square$$

Wir wollen den Eigenwerten einer quadratischen Matrix jetzt Vielfachheiten zuordnen. Hierfür gibt es zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten.

Definition 19.18 (Vielfachheiten von Eigenwerten)**.** Es seien $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix und $\lambda \in K$.

(a) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle im charakteristischen Polynom χ_A (siehe Satz 3.25) heißt die **algebraische** oder **arithmetische Vielfachheit** (oder auch **Multiplizität**) $\mu_a(A, \lambda) \in \mathbb{N}$ von λ in A.

(b) Die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ heißt die **geometrische Vielfachheit** (oder auch **Multiplizität**) $\mu_g(A, \lambda) \in \mathbb{N}$ von λ in A.

Bemerkung 19.19. Für alle $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$ gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \mu_a(A, \lambda) > 0 &\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A \quad \text{(Satz 19.15)} \\ &\Leftrightarrow \mu_g(A, \lambda) > 0. \end{aligned}$$

Man kann also sowohl an der algebraischen als auch an der geometrischen Vielfachheit von λ erkennen, ob λ ein Eigenwert von A ist. Wir werden in Beispiel 19.37 (b) aber noch sehen, dass die beiden Vielfachheiten nicht übereinstimmen müssen. Dieses Phänomen und seine Konsequenzen werden wir ausführlich im nächsten Abschnitt sowie in Kapitel 20 untersuchen.

Beispiel 19.20. Beide Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

aus Beispiel 19.16 haben algebraische Vielfachheit 1 (da sie einfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(t) = (t-3)^1(t+1)^1$ sind) und geometrische Vielfachheit 1 (da wir ihre Eigenräume dort als eindimensional erkannt haben).

Wir wollen nun zeigen, dass das charakteristische Polynom und die Vielfachheiten von Eigenwerten invariant unter Ähnlichkeit von Matrizen sind, und sich diese Konzepte daher analog zu Konstruktion 19.10 auch für Endomorphismen einführen lassen.

Lemma 19.21 (Invarianz von χ, μ_a und μ_g unter Ähnlichkeit)**.** *Sind $A, A' \in K^{n\times n}$ zwei ähnliche Matrizen, so gilt:*

(a) $\chi_{A'} = \chi_A$;

(b) $\mu_\mathrm{a}(A',\lambda) = \mu_\mathrm{a}(A,\lambda)$ *für alle* $\lambda \in K$;

(c) $\mu_\mathrm{g}(A',\lambda) = \mu_\mathrm{g}(A,\lambda)$ *für alle* $\lambda \in K$.

Beweis. Es sei $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $A' = T^{-1}AT$.

(a) Nach dem Produktsatz 18.6 für Determinanten gilt für alle $t \in K$

$$\chi_{A'}(t) = \det(tE - T^{-1}AT) = \det(T^{-1}(tE-A)T) = \frac{1}{\det T} \cdot \det(tE-A) \cdot \det T = \chi_A(t).$$

(b) Da sich die algebraische Vielfachheit aus dem charakteristischen Polynom ergibt, folgt dies unmittelbar aus (a).

(c) Für alle $x \in K^n$ gilt

$$x \in \mathrm{Eig}(A',\lambda) \quad\Leftrightarrow\quad T^{-1}ATx = \lambda x \quad\Leftrightarrow\quad ATx = \lambda Tx \quad\Leftrightarrow\quad Tx \in \mathrm{Eig}(A,\lambda).$$

Die Abbildung $\mathrm{Eig}(A',\lambda) \to \mathrm{Eig}(A,\lambda),\ x \mapsto Tx$ ist also ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $x \mapsto T^{-1}x$). Da isomorphe Vektorräume nach Lemma 16.17 (c) die gleiche Dimension haben, folgt also wie behauptet $\mu_\mathrm{g}(A',\lambda) = \mu_\mathrm{g}(A,\lambda)$. □

Konstruktion 19.22 (χ, μ_a und μ_g für Endomorphismen)**.** Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und $\lambda \in K$ definieren wir

das **charakteristische Polynom** als $\quad \chi_f := \chi_{A_f^B}$,

die **algebraische** oder **arithmetische Vielfachheit** von λ als $\quad \mu_\mathrm{a}(f,\lambda) := \mu_\mathrm{a}(A_f^B,\lambda)$,

und die **geometrische Vielfachheit** von λ als $\quad \mu_\mathrm{g}(f,\lambda) := \mu_\mathrm{g}(A_f^B,\lambda)$

für eine beliebige Basis B von V. Da verschiedene Basiswahlen zu ähnlichen Abbildungsmatrizen führen, ist dies nach Lemma 19.21 wohldefiniert. Weil ein $\lambda \in K$ nach Bemerkung 19.12 (c) genau dann ein Eigenwert von f ist, wenn λ ein Eigenwert von A_f^B ist, folgt aus Bemerkung 19.19 außerdem

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } f \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \mu_\mathrm{a}(f,\lambda) > 0 \Leftrightarrow \mu_\mathrm{g}(f,\lambda) > 0,$$

und der zugehörige Eigenraum $\mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_V - f)$ kann wie in Bemerkung 16.29 berechnet werden.

Auch die weiteren Konzepte und Ergebnisse in diesem und dem folgenden Kapitel werden auf ähnliche Art jeweils eine Version für quadratische Matrizen und eine für Endomorphismen haben, die letztlich äquivalent zueinander sind. Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir in vielen Fällen jedoch jeweils nur die Matrixversion angeben.

Bemerkung 19.23 (Charakteristisches Polynom für Hörer der „Algebraischen Strukturen")**.** Falls ihr die Vorlesung „Algebraische Strukturen" bereits gehört habt und damit den dort eingeführten Polynomring $K[t]$ kennt [G, Kapitel 9], könnt ihr das charakteristische Polynom χ_A einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ in der Tat auch ohne unsere oben gemachte Voraussetzung $|K| = \infty$ als Polynom (und nicht nur als Polynomfunktion) definieren und damit auch in diesem Fall Eigenwerten algebraische Vielfachheiten zuordnen. Dazu müsst ihr $tE - A$ als Matrix mit Einträgen in $K[t]$, also als Element von $K[t]^{n\times n}$ auffassen und die Determinante auch über diesem Polynomring als Abbildung

$\det\colon K[t]^{n\times n} \to K[t]$ konstruieren (was problemlos möglich ist, da hierfür keine Divisionen benötigt werden). Damit wird dann $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ wie gewünscht ein Element des Polynomrings $K[t]$.

Verwendet man diese Konstruktion des charakteristischen Polynoms und damit auch der algebraischen Vielfachheiten von Eigenwerten, so sind alle Resultate in diesem und dem nächsten Kapitel ohne irgendwelche Änderungen auch ohne unsere Voraussetzung $|K| = \infty$, also für beliebige Grundkörper gültig.

Aufgabe 19.24. Zeige für jede quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$:

(a) Ist A invertierbar und λ ein Eigenwert von A, so ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}, und es gilt $\mu_\mathrm{g}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) = \mu_\mathrm{g}(A, \lambda)$ und $\mu_\mathrm{a}(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}) = \mu_\mathrm{a}(A, \lambda)$.

(b) Ist jeder Vektor in $K^n\backslash\{0\}$ ein Eigenvektor von A, so ist A ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Aufgabe 19.25. Es seien $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und U ein Unterraum mit $f(U) \subset U$. Nach Aufgabe 17.24 (b) gibt es dann zugehörige lineare Abbildungen $g\colon U \to U$, $x \mapsto f(x)$ und $h\colon V/U \to V/U$, $\overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$. Man zeige:

(a) Ergänzen wir eine Basis $B' = (x_1, \dots, x_k)$ von U zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V, so dass $B'' = (\overline{x_{k+1}}, \dots, \overline{x_n})$ nach Bemerkung 17.21 also eine Basis von V/U ist, so ist die Abbildungsmatrix von f bezüglich B von der Form
$$A_f^B = \left(\begin{array}{c|c} A_g^{B'} & * \\ \hline 0 & A_h^{B''} \end{array}\right).$$

(b) Es gilt $\chi_f = \chi_g \cdot \chi_h$.

Aufgabe 19.26. Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeige, dass die Matrizen AB und BA das gleiche charakteristische Polynom haben.

(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst, wenn eine der Matrizen invertierbar ist, dann wenn eine der Matrizen von der Form
$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
ist, und schließlich im allgemeinen Fall.)

19.C Diagonalisierbarkeit

Nach den Vorarbeiten im letzten Abschnitt wollen wir uns nun wieder unserem ursprünglichen Problem widmen, zu einer gegebenen Matrix eine möglichst einfache ähnliche Matrix bzw. zu einem gegebenen Endomorphismus eine möglichst einfache Abbildungsmatrix zu finden. Das folgende einfache aber zentrale Lemma zeigt dabei deutlich, warum diese Frage unmittelbar mit Eigenwerten und Eigenvektoren zusammenhängt. Da es so wichtig ist, formulieren wir es sowohl in der Sprache der ähnlichen Matrizen als auch in der Sprache der Endomorphismen, obwohl diese beiden Versionen eigentlich dieselbe Aussage darstellen.

Lemma 19.27 (Abbildungsmatrizen und Eigenvektoren)**.**

(a) *Es seien $A \in K^{n\times n}$, $T \in \mathrm{GL}(n, K)$, sowie $A' = T^{-1}AT$, so dass A und A' also ähnlich zueinander sind. Ferner seien $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in K$.*

Dann ist die k-te Spalte von A' genau dann gleich λe_k (hat also in der k-ten Zeile den Eintrag λ und sonst nur Nullen), wenn die k-te Spalte der Transformationsmatrix T ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(b) *Es sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$. Ferner seien wieder $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in K$.*

Dann ist die k-te Spalte der Abbildungsmatrix A_f^B genau dann gleich λe_k, wenn der k-te Basisvektor x_k ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ ist.

Beweis.

(a) Die k-te Spalte von A' ist gleich $A'e_k = T^{-1}ATe_k$. Diese ist also genau dann gleich λe_k, wenn

$$T^{-1}ATe_k = \lambda e_k \overset{T\cdot}{\Longleftrightarrow} A(Te_k) = \lambda(Te_k)$$

gilt, also wenn die k-te Spalte Te_k von T ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist.

(b) Nach Bemerkung 19.1 (a) ist die k-te Spalte von A_f^B gleich $\Phi_B(f(x_k))$. Da Φ_B ein Isomorphismus ist, ist dieser Ausdruck genau dann gleich $\lambda e_k = \Phi_B(\lambda x_k)$, wenn $f(x_k) = \lambda x_k$ gilt, also x_k ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ ist. □

Beispiel 19.28. Es sei noch einmal

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Matrix aus Beispiel 19.16. Wir hatten dort bereits gesehen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten -1 bzw. 3 sind. Offensichtlich sind diese beiden Vektoren linear unabhängig. Schreiben wir sie also als Spalten in eine Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

so ist diese Matrix invertierbar, und Lemma 19.27 (a) sagt uns ohne weitere Rechnung, dass die beiden Spalten der transformierten Matrix $T^{-1}AT$ genau $-1\,e_1$ und $3\,e_2$ sind, d. h. dass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt. Natürlich könnte man dies nun durch explizite Berechnung der inversen Matrix T^{-1} und des Matrixprodukts $T^{-1}AT$ auch direkt überprüfen.

Da in diesem Beispiel in jeder Spalte von T ein Eigenvektor steht, haben wir also gemäß Lemma 19.27 (a) eine transformierte Matrix erhalten, deren k-te Spalte für alle k ein Vielfaches von e_k ist, die also nur auf der Diagonale Einträge ungleich 0 hat. Dieses Prinzip wollen wir nun allgemein festhalten.

Definition 19.29 (Diagonalmatrizen und Diagonalisierbarkeit)**.**

(a) Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ heißt **Diagonalmatrix**, wenn $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, also wenn A höchstens auf der Diagonale Einträge ungleich Null hat. Um Platz zu sparen, schreiben wir eine solche Diagonalmatrix oft als $\operatorname{diag}(a_{1,1},\dots,a_{n,n})$.

(b) Eine quadratische Matrix heißt **diagonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten Vektorraums V heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis B von V gibt, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix A_f^B eine Diagonalmatrix ist.

43

Folgerung 19.30 (Diagonalisierbarkeit = Basis aus Eigenvektoren)**.** *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von K^n aus Eigenvektoren von A gibt.*

Sind in diesem Fall $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte von $x_1,\dots,x_n$, so gilt

$$T^{-1}A\,T = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

mit $T := (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n) \in \mathrm{GL}(n,K)$.

Beweis. Beachte, dass die Matrix T nach Definition 15.17 genau dann invertierbar ist, wenn sie Rang n hat, also wenn ihre Spalten linear unabhängig sind und damit eine Basis von K^n bilden. Da die Matrix $T^{-1}AT$ genau dann eine Diagonalmatrix ist, wenn ihre k-te Spalte für alle $k = 1,\dots,n$ ein Vielfaches von e_k ist, ergibt sich die Aussage der Folgerung damit unmittelbar aus Lemma 19.27 (a), angewendet auf jede Spalte von T. □

Bemerkung 19.31. Natürlich erhalten wir auch hier wieder eine analoge Aussage für Endomorphismen mit Lemma 19.27 (b): Ein Endomorphismus $f: V \to V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ aus Eigenvektoren von V gibt, und in diesem Fall ist dann $A_f^B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zu $x_1, \dots, x_n$ gehörigen Eigenwerte sind.

Beispiel 19.32.

(a) Die Matrix aus Beispiel 19.28 ist diagonalisierbar.

(b) Eine allgemeine Drehmatrix wie in Beispiel 19.13 (c) ist dagegen nicht diagonalisierbar, da sie keine Eigenvektoren (und damit insbesondere keine Basis aus Eigenvektoren) besitzt.

Als Erstes wollen wir nun zeigen, dass für diagonalisierbare Matrizen eine Diagonalmatrix mit beliebigen Einträgen auf der Diagonale wirklich die einfachste mögliche ähnliche Matrix ist, also dass keine zwei solchen Diagonalmatrizen mehr ähnlich zueinander sein können. Wir können eine solche Diagonalform in diesem Fall also als Normalform bezüglich Ähnlichkeit auffassen.

Lemma 19.33. *Zwei Diagonalmatrizen sind genau dann ähnlich zueinander, wenn ihre Diagonaleinträge bis auf die Reihenfolge übereinstimmen.*

Beweis. Wir betrachten zwei Diagonalmatrizen $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $B = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

„$\Rightarrow$“: Es sei A ähnlich zu B. Beachte, dass

$$\chi_A(t) = \det \operatorname{diag}(t - \lambda_1, \dots, t - \lambda_n) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

und analog $\chi_B(t) = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n)$. Nach Lemma 19.21 (a) gilt nun aber $\chi_A = \chi_B$, und wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von Polynomen in Faktoren aus Satz 3.25 bedeutet dies gerade, dass die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bis auf die Reihenfolge mit $\mu_1, \dots, \mu_n$ übereinstimmen.

„$\Leftarrow$“: Es seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bis auf die Reihenfolge gleich $\mu_1, \dots, \mu_n$. Wegen der Diagonalform von A sind die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ offensichtlich Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es seien nun $x_1, \dots, x_n$ diese Einheitsvektoren so durchnummeriert, dass $Ax_i = \mu_i x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Mit $T = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n)$ ist dann $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = B$ nach Lemma 19.27 (a), d. h. A und B sind ähnlich zueinander. □

Folgerung 19.34. *Zwei diagonalisierbare Matrizen sind genau dann ähnlich zueinander, wenn ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen.*

Beweis. Es seien $A, B \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar, mit A ähnlich zu $A' = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und B ähnlich zu $B' = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

„$\Rightarrow$“: Sind A und B ähnlich, so gilt $\chi_A = \chi_B$ nach Lemma 19.21 (a).

„$\Leftarrow$“: Es sei nun $\chi_A = \chi_B$, nach Lemma 19.21 (a) also auch

$$(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n) = \chi_{A'}(t) = \chi_A(t) = \chi_B(t) = \chi_{B'}(t) = (t - \mu_1) \cdots (t - \mu_n).$$

Also stimmen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $\mu_1, \dots, \mu_n$ nach Satz 3.25 bis auf die Reihenfolge überein. Damit ist A' nach Lemma 19.33 ähnlich zu B', und folglich auch A zu B. □

Im Rest dieses Kapitels wollen wir nun noch einfache Kriterien für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ herleiten. Nach Folgerung 19.30 müssen wir ja herausfinden, ob es eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A gibt. Um eine solche Basis zu finden, werden wir offensichtlich zunächst einmal aus jedem Eigenraum $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ maximal viele linear unabhängige Vektoren wählen, also $\mu_g(A, \lambda)$ Stück. Wir müssen uns nun fragen:

(A) Wie viele Vektoren bekommen wir auf diese Art insgesamt? (Wir bräuchten n, um eine Basis von K^n erhalten zu können.)

(B) Sind *alle diese Vektoren zusammen* wirklich linear unabhängig? (Wir wissen zunächst nur, dass die ausgewählten Vektoren innerhalb eines Eigenraums linear unabhängig sind.)

Wir werden im Folgenden sehen, dass (A) wirklich eine Bedingung an die Matrix A stellt (siehe Folgerung 19.36), während (B) für jede Matrix erfüllt ist (siehe Folgerung 19.39).

Um die Bedingung (A) genauer zu untersuchen, benötigen wir zunächst einmal einen wichtigen Zusammenhang zwischen der geometrischen und algebraischen Vielfachheit eines Eigenwerts.

Satz 19.35. *Für jede Matrix $A \in K^{n\times n}$ und alle $\lambda \in K$ gilt $\mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda) \le \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$.*

Beweis. Es sei $k = \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda)$. Wir wählen eine Basis $(x_1,\dots,x_k)$ von $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$, ergänzen diese zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von K^n, und schreiben diese Vektoren als Spalten in eine Matrix $T = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n)$.

Nach Lemma 19.27 (a) ist die i-te Spalte von $A' := T^{-1}AT$ dann gleich λe_i für alle $i = 1,\dots,k$, d. h. es ist

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_k & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

für eine Matrix $B \in K^{(n-k)\times(n-k)}$. Damit folgt nach Lemma 19.21 (a) und Aufgabe 18.20

$$\chi_A(t) = \chi_{A'}(t) = \det\left(\begin{array}{c|c} (t-\lambda)E_k & * \\ \hline 0 & tE-B \end{array}\right) = (t-\lambda)^k\,\chi_B(t),$$

d. h. die Vielfachheit $\mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$ von λ als Nullstelle in χ_A ist mindestens gleich $k = \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda)$. □

Hieraus ergeben sich nun die folgenden notwendigen Kriterien für Diagonalisierbarkeit (von denen wir in der Tat in Folgerung 19.40 noch sehen werden, dass sie sogar äquivalent zur Diagonalisierbarkeit sind).

Folgerung 19.36 (Notwendige Kriterien für Diagonalisierbarkeit)**.** *Ist eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar, so muss gelten:*

(a) *Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren.*

(b) *Für alle Eigenwerte λ von A gilt $\mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda) = \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda)$.*

Beweis. Nach Satz 3.25 können wir das charakteristische Polynom von A schreiben als

$$\chi_A(t) = g(t)\cdot(t-\lambda_1)^{\mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_1)}\cdots(t-\lambda_k)^{\mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_k)}, \tag{1}$$

wobei g ein Polynom ohne Nullstellen ist und $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A sind. Da χ_A nach Satz 19.17 Grad n hat, folgt daraus insbesondere

$$\mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_1) + \cdots + \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_k) \le n. \tag{2}$$

Um nun gemäß Folgerung 19.30 eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A zu finden, können wir aus jedem Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,\lambda_i)$ für $i = 1,\dots,k$ maximal $\mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda_i) = \dim \mathrm{Eig}(A,\lambda_i)$ Vektoren wählen. Die Anzahl der so insgesamt gefundenen Vektoren ist also

$$\sum_{i=1}^k \mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda_i) \overset{19.35}{\le} \sum_{i=1}^k \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_i) \overset{(2)}{\le} n.$$

Da wir für eine Basis von K^n aber n Vektoren benötigen, muss hier im Fall einer diagonalisierbaren Matrix an beiden Stellen die Gleichheit gelten. An der ersten Stelle ergibt dies genau die Bedingung $\mu_{\mathrm{g}}(A,\lambda_i) = \mu_{\mathrm{a}}(A,\lambda_i)$ für alle i; an der zweiten erhalten wir, dass das Polynom g in (1) Grad 0 haben und χ_A damit in Linearfaktoren zerfallen muss. □

Beispiel 19.37.

(a) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2+1,$$

das über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Also ist A nach Folgerung 19.36 (a) nicht diagonalisierbar. In der Tat ist A auch genau die Drehmatrix um den Winkel $\frac{\pi}{2}$, von der wir in Beispiel 19.32 (b) bereits gesehen haben, dass sie nicht diagonalisierbar ist.

(b) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{pmatrix} = t^2$$

mit doppelter Nullstelle 0. Also ist 0 ein Eigenwert von A mit $\mu_\mathrm{a}(A,0) = 2$. Der zugehörige Eigenraum

$$\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Lin}(e_1)$$

ist aber nur eindimensional. Es ist also $\mu_\mathrm{g}(A,0) = 1 < \mu_\mathrm{a}(A,0)$, und damit ist A nach Folgerung 19.36 (b) nicht diagonalisierbar.

Beachte, dass dieses Beispiel auch zeigt, dass Folgerung 19.34 für beliebige Matrizen falsch ist: Auch die Nullmatrix hat das charakteristische Polynom $\chi_0(t) = \det(tE) = t^2$, aber A ist sicher nicht zur Nullmatrix ähnlich, da es kein $T \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ geben kann mit $T^{-1} \cdot 0 \cdot T = A$.

Wenn die Bedingungen aus Folgerung 19.36 erfüllt sind, haben wir jetzt gesehen, dass wir insgesamt wirklich n Vektoren erhalten, wenn wir Basen aller Eigenräume einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ berechnen. Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass diese Vektoren wirklich auch zusammen genommen linear unabhängig sind, damit sie dann eine Basis von K^n bilden.

Satz 19.38 (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)**.** *Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix und $x_1,\dots,x_k$ Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten. Dann sind $x_1,\dots,x_k$ linear unabhängig.*

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über k. Für $k = 1$ ist die Aussage klar, denn ein Eigenvektor ist nach Definition immer ungleich dem Nullvektor und damit linear unabhängig.

Für den Induktionsschritt $k \to k+1$ nehmen wir nun an, dass wir die Aussage des Satzes für k Vektoren schon gezeigt haben. Es seien nun $x_1,\dots,x_{k+1}$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$ von A. Angenommen, wir haben eine Linearkombination des Nullvektors

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_{k+1} x_{k+1} = 0 \qquad (*)$$

für gewisse $\mu_1,\dots,\mu_{k+1} \in K$. Multiplizieren wir diese Gleichung von links mit der Matrix A, so erhalten wir wegen $Ax_i = \lambda_i x_i$ für alle i

$$\mu_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \mu_{k+1}\lambda_{k+1} x_{k+1} = 0.$$

Multiplizieren wir dieselbe Gleichung stattdessen mit dem Skalar λ_{k+1}, so ergibt sich hingegen

$$\mu_1\lambda_{k+1} x_1 + \cdots + \mu_{k+1}\lambda_{k+1} x_{k+1} = 0.$$

Wir subtrahieren nun die letzten beiden Gleichungen voneinander und erhalten so

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k = 0.$$

Dies ist eine Linearkombination des Nullvektors von k Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten. Nach Induktionsvoraussetzung müssen also alle Vorfaktoren Null sein, d. h. es ist

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Da aber alle Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_{k+1}$ verschieden sind, folgt daraus $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$, und damit eingesetzt in $(*)$ natürlich auch $\mu_{k+1} = 0$. Also sind $x_1,\dots,x_{k+1}$ linear unabhängig. □

Folgerung 19.39 (Die Summe von Eigenräumen ist direkt). *Es seien $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A. Dann ist die Summe*

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)+\cdots+\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)$$

direkt (siehe Definition 17.2).

Beweis. Dies ist letztlich nur eine Umformulierung von Satz 19.38. Haben wir nämlich zwei Darstellungen eines Vektors in der gegebenen Summe

$$x_1+\cdots+x_k = y_1+\cdots+y_k$$

mit $x_i,y_i \in \operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ für alle $i=1,\dots,k$, so bedeutet dies ja

$$\underbrace{x_1-y_1}_{\in \operatorname{Eig}(A,\lambda_1)} +\cdots+ \underbrace{x_k-y_k}_{\in \operatorname{Eig}(A,\lambda_k)} = 0.$$

Nun ist der Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda_i)$ für alle $i=1,\dots,k$ nach Definition 19.11 (b) aber gerade der Nullvektor zusammen mit allen Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i. Wäre in der obigen Gleichung also einer der Vektoren x_i-y_i nicht gleich dem Nullvektor, so wäre er ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i, und wir hätten somit eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors aus Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten – im Widerspruch zu Satz 19.38. Also gilt $x_i=y_i$ für alle $i=1,\dots,k$, d. h. die Summe der Eigenräume ist direkt. □

Wir können nun unsere Ergebnisse zur Diagonalisierbarkeit zusammenfassen:

Folgerung 19.40 (Diagonalisierbarkeit). *Für eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(a) *A ist diagonalisierbar.*

(b) *Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren, und es gilt $\mu_g(A,\lambda)=\mu_a(A,\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A.*

(c) *Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von A, so ist* $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)=K^n$.

Bestimmt man in diesem Fall eine Basis jedes Eigenraums und nimmt alle diese Vektoren zusammen, so erhält man eine Basis von K^n. Schreibt man diese Vektoren als Spalten in eine Matrix T, so ist $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix mit den zugehörigen Eigenwerten auf der Diagonale.

Beweis.

„(a) ⇒ (b)“: Dies ist genau Folgerung 19.36.

„(b) ⇒ (c)“: Nach Folgerung 19.39 ist die Summe der Eigenräume direkt. Also folgt aus der Voraussetzung mit Lemma 17.3

$$\dim(\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)) = \sum_{i=1}^k \dim\operatorname{Eig}(A,\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \mu_g(A,\lambda_i) = \sum_{i=1}^k \mu_a(A,\lambda_i) = n,$$

und damit $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)=K^n$.

„(c) ⇒ (a)“: Ist $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(A,\lambda_k)=K^n$, so erhalten wir nach Aufgabe 17.7 eine Basis von K^n, indem wir Basen der einzelnen Eigenräume zusammen nehmen. Da diese Basis dann natürlich aus Eigenvektoren zu den zugehörigen Eigenwerten besteht, folgt die zu zeigende Aussage damit aus Folgerung 19.30. □

Bemerkung 19.41.

(a) Ist ein Eigenwert λ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A einer quadratischen Matrix A, ist also $\mu_a(A,\lambda)=1$, so folgt aus Satz 19.35 für diesen Eigenwert auch unmittelbar $\mu_g(A,\lambda)=1$. Im Kriterium (b) von Folgerung 19.40 muss man die Bedingung $\mu_g(A,\lambda)=\mu_a(A,\lambda)$ für diesen Eigenwert also nicht mehr überprüfen. Zerfällt χ_A also z. B. in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist A damit stets diagonalisierbar.

Im Fall des Körpers $K=\mathbb{C}$ zerfällt außerdem *jedes* Polynom nach dem Fundamentalsatz der Algebra (siehe Satz 6.11) in Linearfaktoren. Hat ein solches Polynom „zufällig gewählte Koeffizienten“, so können wir erwarten, dass diese Linearfaktoren auch alle verschieden sind.

Ohne dass wir dies hier zu einer mathematisch exakten Aussage machen wollen, können wir anschaulich also sagen, dass eine „zufällig gewählte komplexe Matrix“ diagonalisierbar ist.

(b) Wie bei unseren vorherigen Ergebnissen in diesem Kapitel gibt es natürlich auch zu Folgerung 19.40 eine analoge Version für Endomorphismen, deren Formulierung (und Beweis) offensichtlich sein sollte.

Beispiel 19.42. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Das charakteristische Polynom von A berechnet sich als Determinante einer unteren Dreiecksmatrix nach Folgerung 18.18 zu

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} = (t-1)^2\, t.$$

Es zerfällt also in Linearfaktoren und hat als Nullstellen die beiden Eigenwerte 1 (mit $\mu_a(A,1) = 2$) und 0 (mit $\mu_a(A,0) = 1$). Um herauszufinden, ob A diagonalisierbar ist, müssen wir nach Folgerung 19.40 und Bemerkung 19.41 also nur noch überprüfen, ob $\mu_g(A,1) = 2$ gilt. Dazu berechnen wir den Eigenraum

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Ker}(E-A) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Da dieser Raum zweidimensional ist, ist $\mu_g(A,1) = 2 = \mu_a(A,1)$, und A ist nach Folgerung 19.40 diagonalisierbar.

Um eine Matrix T zu bestimmen, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist, müssen wir auch vom anderen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,0)$ eine Basis bestimmen: Man sieht hier sofort, dass der dritte Einheitsvektor ein Element von $\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{Ker}\,A$ und somit eine Basis dieses eindimensionalen Eigenraums ist. Wir brauchen nach Folgerung 19.40 also nur noch die drei gefundenen Vektoren als Spalten in die Matrix T zu schreiben, und erhalten somit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(was man natürlich durch direktes Nachrechnen auch überprüfen könnte).

Aufgabe 19.43. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche dieser Matrizen ist / sind diagonalisierbar? Im Fall der Diagonalisierbarkeit bestimme man jeweils eine Matrix $T \in GL(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ bzw. $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sind A und B ähnlich zueinander?

(d) Wie kann man mit Hilfe von (a) auf einfache Art eine allgemeine Formel für die Potenzen A^n für $n \in \mathbb{N}$ bestimmen?

Aufgabe 19.44. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ A \mapsto A^{\mathsf{T}}.$$

Ist f diagonalisierbar? Falls ja, bestimme man eine Basis B von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die zugehörige Abbildungsmatrix A_f^B von f eine Diagonalmatrix ist, und gebe diese Abbildungsmatrix an.

Aufgabe 19.45.

(a) Es seien $V = C^0(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

(b) Es seien $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ wieder die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

Aufgabe 19.46.

(a) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, diagonalisierbar? Falls ja, zu welcher Diagonalmatrix ist A ähnlich?

(b) Es seien V ein K-Vektorraum mit Basis $(x_1,\dots,x_n)$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus mit

$$f(x_i) = x_{i+1} \quad \text{für } i = 1,\dots,n-1 \quad \text{und} \quad f(x_n) = x_1,$$

der also die Basisvektoren zyklisch permutiert.

Untersuche f in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von n auf Diagonalisierbarkeit, und gib ggfs. an, welche Diagonalmatrix bei geeigneter Basiswahl die Abbildungsmatrix von f sein kann.

Aufgabe 19.47. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle quadratische Matrix.

(a) Man zeige: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A^T diagonalisierbar ist.

(b) Es sei $\chi_A(t) = t^3 - 4t^2 + 3t$. Berechne χ_{A^2}.

Aufgabe 19.48. Zu einem Endomorphismus $f\colon V \to V$ eines endlich erzeugten $\mathbb{R}$-Vektorraums gebe es $x, y \in V\backslash\{0\}$ mit $f(x) = y$ und $f(y) = -x$.

Zeige, dass f dann nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 19.49. Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V, so dass $f \circ g = g \circ f$. Wir bezeichnen die (verschiedenen) Eigenwerte von f und g mit $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ bzw. $\mu_1,\dots,\mu_l$. Man zeige:

(a) $g(\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)) \subset \mathrm{Eig}(f,\lambda_i)$ für alle $i = 1,\dots,k$;

(b) $\mathrm{Eig}(g,\mu_j) = (\mathrm{Eig}(f,\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(g,\mu_j)) \oplus \cdots \oplus (\mathrm{Eig}(f,\lambda_k) \cap \mathrm{Eig}(g,\mu_j))$ für alle $j = 1,\dots,l$;

(c) es gibt eine Basis B von V, so dass sowohl A_f^B als auch A_g^B eine Diagonalmatrix ist (d. h. f
44 und g sind mit der gleichen Basis diagonalisierbar).