Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 13

Lösungshinweise

(1) (a) Berechne $\text{vol}(D)$ für das Tetraeder D, das von den drei Koordinatenebenen und der durch die Gleichung $x_3 = 2-2x_1-2x_2$ beschriebenen Ebene in $\mathbb{R}^3$ begrenzt wird.

(b) Berechne das Integral $\int_D |y|\cdot\cos x\,d(x,y)$, wobei D die durch die Gleichung $4x^2+y^2 \le 4$ gegebene Ellipse in $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung: (a) Wir können D als Normalbereich schreiben als

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1-x_1, 0 \le x_3 \le 2-2x_1-2x_2\}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\text{vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{2-2x_1-2x_2} 1\,dx_3\,dx_2\,dx_1 \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (2-2x_1-2x_2)\,dx_2\,dx_1 \\
&= \int_0^1 \left[2x_2-2x_1x_2-x_2^2\right]_{x_2=0}^{1-x_1} dx_1 \\
&= \int_0^1 (x_1^2-2x_1+1)\,dx_1 \\
&= \int_0^1 (x_1-1)^2\,dx_1 \\
&= \left[\frac{1}{3}(x_1-1)^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Wir schreiben D als Normalbereich als

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -2\sqrt{1-x^2} \le y \le 2\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_D |y|\cdot\cos(x)\,d(x,y) &= \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} |y|\cdot\cos(x)\,dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} y\cdot\cos(x)\,dy\,dx \\
&= 2\int_{-1}^1 \frac{1}{2}\cos(x)\cdot 4(1-x^2)\,dx \\
&= 4\int_{-1}^1 \cos(x)\,dx - 4\int_{-1}^1 x^2\cos(x)\,dx \\
&= \left[4\sin(x)\right]_{-1}^1 - 4\left[(x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)\right]_{-1}^1 \\
&= 16(\sin(1)-\cos(1)).
\end{aligned}$$

(2) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_2}\,dx$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ konvergiert.

Lösung: Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $\|x\|_2 \geq a\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^x$ monoton steigend ist, gilt damit $\mathrm{e}^{-\|x\|_2} \leq \mathrm{e}^{-a\|x\|_1} = \mathrm{e}^{-a(|x_1|+\cdots+|x_n|)} =: g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten nun die $\mathbb{R}^n$ ausschöpfende Folge $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $D_k = [-k,k]^n$. Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\int_{D_k} f(x)\,dx &\leq \int_{[-k,k]^n} g(x)\,dx \\
&= \int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-a|x_1|}\,dx_1 \cdot \cdots \int_{-k}^{k} \mathrm{e}^{-a|x_n|}\,dx_n \\
&= \left(2\int_0^k \mathrm{e}^{-ax}\,dx\right)^n \\
&= 2^n \left(\left[\frac{1}{-a}\mathrm{e}^{-ax}\right]_0^k\right)^n \\
&= \left(\frac{2}{a}\right)^n (1-\mathrm{e}^{-k})^n \\
&\leq \left(\frac{2}{a}\right)^n.
\end{aligned}$$

Die Folge der Integrale $\int_{D_k} f(x)\,dx$ ist also beschränkt und damit konvergent. Nach Definition bedeutet dies, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$ konvergiert.

(3) (a) Zeige, dass $A \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ für eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.

(b) Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte stetige Funktionen mit $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in D$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in D,\ f(x) \le y \le g(x)\} \quad \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von f und g messbar ist mit $\operatorname{vol}(M) = \int_D (g(x) - f(x))\,dx$.

Lösung: (a) Da A beschränkt ist, existiert ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^m$ mit $A \subset Q$. Sei $\varepsilon > 0$. Da N eine Nullmenge ist, existieren Quader $P_1, \dots, P_k \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^k P_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \operatorname{vol}(P_i) < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}(Q)}.$$

Dann gilt für die Quader $Q \times P_1, \dots, Q \times P_k \subset \mathbb{R}^{m+n}$

$$A \times N \subset \bigcup_{i=1}^k (Q \times P_i)$$

und

$$\sum_{i=1}^k \operatorname{vol}(Q \times P_i) = \sum_{i=1}^k \operatorname{vol}(Q) \cdot \operatorname{vol}(P_i) = \operatorname{vol}(Q) \cdot \sum_{i=1}^k \operatorname{vol}(P_i) < \varepsilon.$$

(b) Da f beschränkt ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le f(x) \le b$ für alle $x \in D$. Der Rand ∂M von M ist nun enthalten in der Menge $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2$ mit

$$\begin{aligned} N_0 &= \partial D \times [a,b], \\ N_1 &= \{(x, f(x)) : x \in D\}, \\ N_2 &= \{(x, g(x)) : x \in D\}, \end{aligned}$$

denn für jeden Punkt $(x,y) \notin N$ ist einer der folgenden Fälle erfüllt:

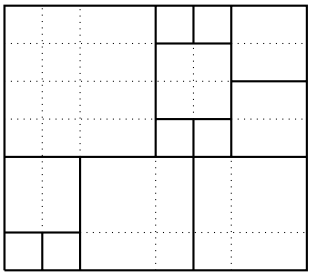
- $y > b$ oder $y < a$: In diesem Fall liegen in einer kleinen Umgebung von (x,y) keine Punkte von M, und damit ist $(x,y) \notin \partial M$.
- $x \in \mathring{D}$ und $f(x) < y < g(x)$: In diesem Fall liegen in einer kleinen Umgebung von (x,y) nur Punkte von M, und damit ist $(x,y) \notin \partial M$.
- $x \in \mathring{D}$, und $y < f(x)$ oder $y > g(x)$: Dann sind in einer kleinen Umgebung von (x,y) wieder keine Punkte von M, also wieder $(x,y) \notin \partial M$.
- $x \in (\mathbb{R}^n \backslash D)^\circ$: Dann gibt es in einer kleinen Umgebung von x keine Punkte von D, und damit in einer kleinen Umgebung von (x,y) keine Punkte von M, d. h. es ist $(x,y) \notin \partial M$.

Da D messbar ist, ist aber ∂D eine Nullmenge, also auch N_0 nach Aufgabenteil (a). Auch N_1 und N_2 sind Nullmengen als Graphen stetiger Funktionen. Damit ist N, also auch ∂M, eine Nullmenge, d. h. M ist messbar.

Die Formel für das Volumen ergibt sich damit aus Fubini:

$$\operatorname{vol} M = \int_M 1\,d(x,y) = \int_D \int_{f(x)}^{g(x)} 1\,dy\,dx = \int_D (g(x) - f(x))\,dx.$$

(4) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass das Seitenverhältnis $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1}$ rational ist, wenn sich das Rechteck in Quadrate unterteilen lässt, wie unten durch die dicken Linien dargestellt.



Formal sind dabei Quadrate $Q_1, \dots Q_k$ eine Unterteilung von $[a,b]$, wenn sie $[a,b]$ überdecken und $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt.

(a) Wir beginnen mit einem Spezialfall: Zeige, dass das Seitenverhältnis von $[a,b]$ rational ist, wenn eine Zerlegung Z von $[a,b]$ existiert, so dass $\mathrm{TQ}(Z)$ nur aus Quadraten besteht.

(b) Nun die allgemeine Aussage: Zeige, dass das Seitenverhältnis von $[a,b]$ rational ist, wenn $[a,b]$ eine Unterteilung in Quadrate $Q_1, \dots, Q_k$ besitzt.
(Hinweis: Hierzu kann die (im Bild gepunktet angedeutete) durch die Quadrate induzierte Zerlegung von $[a,b]$ nützlich sein.)

Lösung: (a) Sei $Z = (Z_1, Z_2)$ und $Z_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,k_i}\}$ mit $a_i = x_{i,0} < \dots < x_{i,k_i} = b_i$ für $i \in \{1,2\}$.
Für $j \in \{1, \dots k_2\}$ betrachten wir das Quadrat $[x_{1,0}, x_{1,1}] \times [x_{2,j-1}, x_{2,j}]$, an dem wir ablesen können, dass $x_{2,j} - x_{2,j-1} = x_{1,1} - x_{1,0} =: \Delta$ gleich ist für alle j. Genauso gilt für $j \in \{1, \dots k_1\}$, dass $x_{1,j} - x_{1,j-1} = x_{2,1} - x_{2,0} = \Delta$. Insbesondere ist $\frac{b_2-a_2}{b_1-a_1} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$.

(b) Durch Skalieren können wir annehmen, dass $b_1 - a_1 = 1$ gilt, und müssen nun zeigen, dass $b_2 - a_2 \in \mathbb{Q}$. Angenommen, dies ist nicht der Fall.
Seien $Q_1, \dots, Q_k$ die Quadrate aus der Voraussetzung und Z die dadurch induzierte Zerlegung von $[a,b]$. Sei weiterhin $Z_i = \{x_{i,0}, \dots, x_{i,k_i}\}$ mit $a_i = x_{i,0} < \dots < x_{i,k_i} = b_i$ und $\Delta x_j^i = x_{i,j} - x_{i,j-1}$ für $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1, \dots, k_i\}$.
Wir definieren V als den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathrm{Lin}(1, b_2 - a_2, \Delta x_1^1, \dots \Delta x_{k_1}^1, \Delta x_1^2, \dots \Delta x_{k_2}^2)$. Da die zweite Seitenlänge $b_2 - a_2$ irrational ist, können wir die Vektoren 1 und $b_2 - a_2$ in V zu einer Basis $B = (1, b_2 - a_2, v_3, \dots, v_s)$ von V ergänzen und eine lineare Abbildung $f \colon V \to \mathbb{Q}$ konstruieren mit $f(1) = 1$, $f(b_2 - a_2) = -1$ und $f(v_i) = 0$ für alle $i > 2$.
Wir definieren eine Abbildung g wie folgt: Sei Q ein Rechteck mit Seitenlängen $(\Delta_1, \Delta_2) \in V^2$, dann sei $g(Q) = f(\Delta_1) \cdot f(\Delta_2)$. Da alle Seitenlängen von Rechtecken $Q \in \mathrm{TQ}(Z)$ in V enthalten sind, ist g auf $\mathrm{TQ}(Z)$ definiert.
Außerdem ist g additiv im folgendem Sinne: Seien Q, Q' und Q'' drei Rechtecke mit Seitenlängen (Δ_1, Δ_2), (Δ_1', Δ_2) und (Δ_1, Δ_2') in V^2. Dann sind $Q \cup Q'$ und $Q \cup Q''$ ebenfalls Rechtecke mit Seitenlängen in V^2, und es gilt $g(Q \cup Q') = f(\Delta_1 + \Delta_1') f(\Delta_2) = g(Q) + g(Q')$ und $g(Q \cup Q'') = f(\Delta_1) f(\Delta_2 + \Delta_2') = g(Q) + g(Q'')$, da f linear ist.
Sei Δ_i die Seitenlänge des Quadrats Q_i. Aus der Additivität folgt nun

$$g([a,b]) = \sum_{Q \in TQ(Z)} g(Q) = \sum_{i=1}^{k} g(Q_i)$$

(indem man erst spaltenweise aufaddiert für feste Breite und dann zeilenweise für feste Höhe), und damit

$$-1 = f(1) \cdot f(b_2 - a_2) = g([a,b]) = \sum_{i=1}^{k} g(Q_i) = \sum_{i=1}^{k} f(\Delta_i)^2 \geq 0,$$

was ein Widerspruch ist.