Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Sommersemester 2024

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 9

Abgabe: Montag, 1. Juli

(1) Es seien $f,g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2+x_2^2)\,\sin\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \left(1-\cos\frac{x_1^2}{x_2}\right)\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2} & \text{für } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{für } x_2 = 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(a) Die Funktion f ist differenzierbar, die partiellen Ableitungen von f sind aber nicht stetig. Berechne auch die Ableitung f'.

(b) Alle Richtungsableitungen $\partial_v g(0)$ von g im Nullpunkt (mit $v \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$) existieren und sind gleich 0, aber g ist dort trotzdem nicht differenzierbar.

(2) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $n \geq 2$ eine differenzierbare Funktion. Man zeige:

(a) Hängt f nur von $\|x\|_2$ ab, ist also $f(x) = g(\|x\|_2)$ für eine differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ (man sagt auch: f ist *kugelsymmetrisch*), so ist

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{g'(\|x\|_2)}{\|x\|_2}\cdot x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

(b) Gibt es umgekehrt eine Funktion $h\colon \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} f(x) = h(x)\cdot x$ für alle x, so ist f kugelsymmetrisch.
(Hinweis: Zeige, dass f entlang eines beliebigen Weges auf einer Kugeloberfläche konstant ist.)

(3) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Nullpunkt differenzierbar ist.
Man zeige: Gilt $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so ist f bereits eine lineare Abbildung.

(4) Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ sowie $[a,b]\times[c,d]$ ein in D enthaltenes Rechteck. Man zeige:

(a) Die Integralfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ x_1 \mapsto \int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2$ ist stetig.

(b) Ist f stetig partiell nach x_1 differenzierbar, so ist F auf (a,b) differenzierbar mit Ableitung $F'(x_1) = \int_c^d \partial_1 f(x_1,x_2)\,dx_2$ (d. h. Differentiation und Integration nach verschiedenen Variablen können vertauscht werden).

(c) $\int_a^b \int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 = \int_c^d \int_a^b f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$.