Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Sommersemester 2024

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 8

Abgabe: Montag, 24. Juni

(1) Man zeige:

(a) Sind M ein metrischer Raum und $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\max(f,g)\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(f(x),g(x))$ stetig.

(b) Die Abbildung $f\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ ist stetig, und Bilder offener Mengen unter f sind wieder offen.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Menge $\mathrm{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen kompakt in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(2) Es sei M ein metrischer Raum. Man zeige:

(a) Sind $x,y \in M$ und $A \subset M$ mit $x \in A$ und $y \notin A$, so enthält jeder Weg von x nach y einen Punkt in ∂A.

(b) Ist M wegzusammenhängend, so sind $\emptyset$ und M die einzigen Teilmengen von M, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

(3) Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) f ist surjektiv, und es gibt ein $q > 1$ mit $d(f(x),f(y)) \geq q\,d(x,y)$ für alle $x,y \in M$.

(b) M ist kompakt, und es gilt $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ mit $x \neq y$.

(4) Zu einem gegebenen metrischen Raum M sei $\mathscr{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von M. Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad d(a,B) := \min\{d(a,b) : b \in B\}$,

für $A,B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad h(A,B) := \max(\max\{d(a,B) : a \in A\}, \max\{d(b,A) : b \in B\})$.

Man zeige:

(a) Die oben angegebenen Minima und Maxima existieren.

(b) h ist eine Metrik auf $\mathscr{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)

(c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathscr{K}(M)$.