Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 7

Abgabe: Montag, 17. Juni

(1) (a) Untersuche, ob die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden können:

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto {x_1}^{x_2}.$$

(b) Es seien A und B zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Zeige die Inklusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, und dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(2) Es seien A und K zwei Teilmengen eines metrischen Raumes M. Man zeige:

(a) Ist A abgeschlossen und K folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.

(b) Ist A abgeschlossen und K überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

(Die in der Vorlesung angegebene, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit in metrischen Räumen darf hierbei natürlich nicht verwendet werden.)

(3) In einem metrischen Raum M betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$. Man zeige:

(a) Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

(4) (a) Es seien K eine überdeckungskompakte Teilmenge eines metrischen Raumes M und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K in M. Man zeige:

$$\text{Es gibt ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ so dass zu jedem } a \in K \text{ ein } i \in I \text{ existiert mit } U_\varepsilon(a) \subset U_i. \qquad (*)$$

(b) Finde ein Beispiel einer *endlichen* offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von $K = M = \mathbb{R}^n$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so dass die Aussage $(*)$ falsch ist.