Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 5

Abgabe: Montag, 3. Juni

(1) Die symmetrische reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 3 und 12.

(a) Berechne eine orthogonale Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Finde mit einer Hauptachsentransformation die Punkte des Ellipsoids $\{x \in \mathbb{R}^3 : x^\mathsf{T} Ax = 3\}$, die vom Ursprung (bezüglich des Standardskalarprodukts) den kleinsten Abstand haben.

(2) (a) Es seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(i) $f^* = -f$.

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, und der Realteil jedes Eigenwerts ist 0.

(iii) Für alle $x \in V$ gilt $\langle x, f(x) \rangle \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

(b) Man zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^\mathsf{T} + A = 0$ ist $E - A$ invertierbar und $(E-A)^{-1}(E+A) \in \mathrm{O}(n)$.

(3) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Man zeige:

(a) Ist A positiv semidefinit, so gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$. Man nennt sie die *Wurzel* aus A.

(b) Ist A nicht positiv semidefinit, so kann es zwar eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B^2 = A$ geben, aber keine symmetrische.

(4) Zu einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $A \neq 0$ bezeichne $\sigma_A \in \mathbb{R}_{>0}$ ihren größten Singulärwert. Man zeige bezüglich der Normen zu den Standardskalarprodukten auf $\mathbb{K}^m$, $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^{m\times n}$:

(a) $\sigma_A = \max \left\{ \frac{||Ax||}{||x||} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \right\}$;

(b) $\sigma_A \leq ||A||$.
Für welche Matrizen gilt hierbei die Gleichheit?