Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 3

Abgabe: Montag, 20. Mai

(1) Überprüfe, für welche $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die folgenden Abbildungen b Skalarprodukte auf dem reellen Vektorraum V sind:

(a) $V = \mathbb{R}^n$, $b(x,y) = x^\mathsf{T} A y$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $b(A,B) = \operatorname{Spur}(AB)$.

(2) Eine Bilinearform $b\colon V \times V \to K$ auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V heißt *nicht ausgeartet*, wenn gilt:

Ist $x \in V$ mit $b(x,y) = 0$ für alle $y \in V$, so ist $x = 0$.

(a) Man zeige: Ist B eine Basis von V, so ist b genau dann nicht ausgeartet, wenn $\operatorname{rk} A_b^B = \dim V$ gilt.

(b) Man beweise oder widerlege: Ist U ein Unterraum von V, und ist b nicht ausgeartet auf V, so ist auch die Einschränkung $b|_{U\times U}$ nicht ausgeartet auf U.

(3) Zu einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ definiert man die *duale Abbildung* f^* zwischen den Dualräumen W^* und V^* durch

$$f^*\colon W^* \to V^*,\ \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

Man zeige:

(a) Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist $f^*\colon W^* \to V^*$ ebenfalls linear, und auch die Abbildung $\operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(W^*,V^*),\ f \mapsto f^*$ ist linear.

(b) Sind V und W endlich-dimensional mit Basen B bzw. C, so gilt für die Abbildungsmatrix von f^* bezüglich der dualen Basen B^* und C^*

$$A_{f^*}^{C^*,B^*} = \left(A_f^{B,C}\right)^\mathsf{T}.$$

(c) Sind V und W endlich-dimensionale euklidische Vektorräume, so wissen wir aus der Vorlesung, dass die beiden Skalarprodukte Isomorphismen $\Gamma_V\colon V \to V^*$ und $\Gamma_W\colon W \to W^*$ (mit $\Gamma_V(x)(x') = \langle x,x'\rangle$ für alle $x,x' \in V$ und $\Gamma_W(y)(y') = \langle y,y'\rangle$ für alle $y,y' \in W$) induzieren. Konstruieren wir mit diesen Isomorphismen aus f^* die Abbildung $g^* := \Gamma_V^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_W\colon W \to V$, so gilt

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle g^*(x), y\rangle \quad \text{für alle } x \in V \text{ und } y \in W.$$

(4) Zu einer symmetrischen Bilinearform b auf einem reellen Vektorraum V sei $U_b = \{x \in V : b(x,x) = 0\}$. Man zeige:

(a) U_b ist im Allgemeinen kein Unterraum von V.

(b) Ist b jedoch positiv semidefinit, so ist U_b ein Unterraum, und $\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) := b(x,y)$ ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf V/U_b.
(Hinweis: Zeige zunächst, dass $U_b = \{x \in V : b(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$.)