Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Sommersemester 2024

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 2

Abgabe: Montag, 13. Mai

(1) (a) Für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $\chi_A(t) = t^5 - 2t^4$.

Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Jordanbasis für A.

(b) Es sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 4. Berechne die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis für die lineare Abbildung $f\colon V \to V$, $\varphi \mapsto \varphi''$, die jedem Polynom seine zweite Ableitung zuordnet.

(2) In dieser Aufgabe wollen wir ein Beispiel für die Anwendung der Jordanform betrachten, und zwar auf sogenannte Systeme von Differentialgleichungen (die in der Praxis an vielen Stellen vorkommen). Die Aufgabe soll es sein, alle Möglichkeiten für differenzierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} f_1' &= f_2 + 2f_3, \\ f_2' &= f_1 + f_2 + 3f_3, \\ f_3' &= -f_1 - f_3 \end{aligned}$$

gilt, wobei f_i' wie üblich die Ableitung von f_i bezeichnet.

Zur Lösung schreibe man die gegebenen Gleichungen in Matrixform $f' = A \cdot f$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und bringe A in Jordanform, d. h. bestimme eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT = J$ eine Jordanmatrix ist. Wenn ihr die Gleichungen dann umschreibt in Gleichungen für $g = T^{-1}f$, sollte sich dieses neue Differentialgleichungssystem leicht lösen lassen.

(3) Man zeige:

(a) Sind A und B zwei ähnliche Matrizen, so gilt $\dim H_k(A,\lambda) = \dim H_k(B,\lambda)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

(b) Ist A eine Matrix in Jordanscher Normalform, λ ein Eigenwert von A und $k \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist die Anzahl der Jordanblöcke der Größe k zum Eigenwert λ in A genau

$$2\dim H_k(A,\lambda) - \dim H_{k-1}(A,\lambda) - \dim H_{k+1}(A,\lambda).$$

(c) Zwei Matrizen in Jordanscher Normalform sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie aus den gleichen Jordanblöcken, nur evtl. in anderer Reihenfolge bestehen.

(4) (a) Es sei $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mit $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Im}\, A$. Bestimme das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von A.

(b) Man zeige: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix, so dass A^m für ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ diagonalisierbar ist, so ist auch A diagonalisierbar.

(Hinweis: Die Betrachtung von Minimalpolynomen ist hier nützlich.)