Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 14

(keine Abgabe)

(1) (a) Berechne das Integral $\int_D (2x-y)\,d(x,y)$, wobei D das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ ist.

(Hinweis: Betrachte dazu den Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x+y\\2x-y\end{pmatrix}$.)

(b) Berechne das Integral $\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,d(x,y)$, wobei D das Gebiet ist, das von den vier Kurven $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$, $y=x$ und $y=2x$ im Bereich $x\geq 0$ begrenzt wird.

(2) Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus und $K_r(a)$ die abgeschlossene Kugel in der Maximumsnorm um $a\in\mathbb{R}^3$ mit Radius $r\in\mathbb{R}_{>0}$. Zeige, dass

$$\lim_{r\to 0}\frac{\operatorname{vol}(f(K_r(a)))}{8r^3} = |\det f'(a)|.$$

(3) Es seien $A\subset\mathbb{R}$ eine kompakte messbare Menge und

$$M_A := \{((1-t^2)x,t) : x\in A \text{ und } t\in[0,1]\} \quad \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) Skizziere M_A für den Fall $A=[1,2]$.

(b) Zeige, dass M_A messbar ist.

(c) Berechne $\operatorname{vol}(M_A)$ in Abhängigkeit von $\operatorname{vol}(A)$.