Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Sommersemester 2024

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 13

(keine Abgabe)

(1) (a) Berechne $\operatorname{vol}(D)$ für das Tetraeder D, das von den drei Koordinatenebenen und der durch die Gleichung $x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2$ beschriebenen Ebene in $\mathbb{R}^3$ begrenzt wird.

(b) Berechne das Integral $\int_D |y| \cdot \cos x \, d(x,y)$, wobei D die durch die Gleichung $4x^2 + y^2 \leq 4$ gegebene Ellipse in $\mathbb{R}^2$ ist.

(2) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_2} \, dx$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ konvergiert.

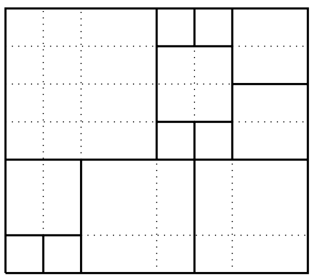
(3) (a) Zeige, dass $A \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ für eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.

(b) Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte stetige Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in D,\ f(x) \leq y \leq g(x)\} \quad \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von f und g messbar ist mit $\operatorname{vol}(M) = \int_D (g(x) - f(x))\, dx$.

(4) Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass das Seitenverhältnis $\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ rational ist, wenn sich das Rechteck in Quadrate unterteilen lässt, wie unten durch die dicken Linien dargestellt.



Formal sind dabei Quadrate $Q_1, \ldots Q_k$ eine Unterteilung von $[a,b]$, wenn sie $[a,b]$ überdecken und $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt.

(a) Wir beginnen mit einem Spezialfall: Zeige, dass das Seitenverhältnis von $[a,b]$ rational ist, wenn eine Zerlegung Z von $[a,b]$ existiert, so dass $\operatorname{TQ}(Z)$ nur aus Quadraten besteht.

(b) Nun die allgemeine Aussage: Zeige, dass das Seitenverhältnis von $[a,b]$ rational ist, wenn $[a,b]$ eine Unterteilung in Quadrate $Q_1, \ldots, Q_k$ besitzt.
(Hinweis: Hierzu kann die (im Bild gepunktet angedeutete) durch die Quadrate induzierte Zerlegung von $[a,b]$ nützlich sein.)