Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Sommersemester 2024

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 12

Abgabe: Montag, 22. Juli

(1) (a) Es sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \|x\|_2 = r_n\}$$

eine Nullmenge ist.

(b) Es seien $A \subset B \subset C$ beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Man zeige: Sind A und C messbar mit $\operatorname{vol}(A) = \operatorname{vol}(C)$, so ist auch B messbar mit $\operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A)$.

(2) (a) Berechne das Integral $\displaystyle\int_{[1,2]\times[1,2]} \frac{1}{x+y}\, d(x,y)$.

(b) Es sei $f\colon Q \to \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion auf einem Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, dass

$$\int_Q f(x)\,dx \cdot \int_Q \frac{1}{f(x)}\,dx \geq (\operatorname{vol}(Q))^2.$$

(Hinweis: Beweise und verwende die Ungleichung $\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \geq 2$ für alle $x, y \in Q$.)

(3) (a) Wir wissen bereits, dass die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ abzählbar ist. Es sei nun also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Abzählung. Zeige, dass die Menge

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(q_n - \frac{1}{2^{n+3}}, q_n + \frac{1}{2^{n+3}} \right) \quad \subset \mathbb{R}$$

dann offen und nicht messbar ist.

(b) Finde eine kompakte (und damit auch abgeschlossene) Teilmenge von $\mathbb{R}$, die nicht messbar ist.

(Hinweis: Da die obigen Intervalle nur eine Gesamtlänge von $\frac{1}{2}$ haben, kann M ja wohl nicht das ganze Einheitsintervall $[0,1]$ überdecken. Andererseits enthält M aber um jede rationale Zahl in $[0,1]$ noch ein offenes Intervall und muss damit doch eigentlich auch alle irrationalen Zahlen in $[0,1]$ enthalten, also doch das ganze Intervall $[0,1]$ überdecken? Wo ist der Denkfehler?)

(4) Es sei $Q = [0,1] \times [0,1]$. Man zeige:

(a) Es gibt eine Menge $D \subset Q$, für die gilt:
- Für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$ gilt $x_1 \neq y_1$ und $x_2 \neq y_2$.
- Für alle $a \in Q$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ enthält $U_\varepsilon(a)$ einen Punkt aus D.

(b) Für eine Menge D wie in (a) sei

$$f\colon Q \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in D, \\ 0 & \text{falls } x \notin D. \end{cases}$$

Dann existieren die Doppelintegrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x)\,dx_1 \right) dx_2 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x)\,dx_2 \right) dx_1$$

und haben den gleichen Wert, aber f ist trotzdem nicht integrierbar auf Q.