Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 11

Abgabe: Montag, 15. Juli

(1) In dieser Aufgabe bezeichnen wir die Koordinaten von $\mathbb{R}^3$ mit x, y, z.

(a) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$e^{xz} - x^2 + y^2 = xy^3 + x^2z + yz^2 = 1$$

in einer Umgebung von $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ und $z_0 = 0$ nach den Variablen y und z aufgelöst, also als $(y,z)^\mathsf{T} = \varphi(x)$ für eine stetig differenzierbare Funktion φ geschrieben werden kann. Berechne auch die Ableitung $\varphi'(1)$ an diesem Punkt.

(b) Es seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit $f(a) = 0$, an dem alle drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ ungleich 0 sind.

Nach dem Satz über implizite Funktionen bestimmt die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ dann in einer Umgebung von a jede der drei Variablen aus den beiden anderen. Wir können diese Gleichung dort also z. B. als $x = \varphi(y,z)$ für eine stetig differenzierbare Funktion φ schreiben. Gemäß der bekannten Differentialschreibweise bezeichnen wir die partielle Ableitung dieser Auflösungsfunktion φ nach y mit $\frac{\partial x}{\partial y}$, analog für die anderen Variablenkombinationen.

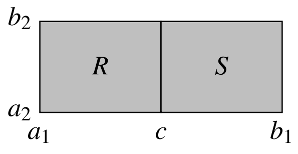
Zeige, dass dann die (etwas merkwürdig erscheinende) Gleichung $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$ gilt.

(2) Es sei $f\colon Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion auf einem Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Zeige mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium:

(a) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathring{Q}$, so ist f integrierbar mit $\int_Q f(x)\,dx = 0$.

(b) Ist wie im Bild rechts $R = [a_1, c] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ und $S = [c, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ für ein $c \in (a_1, b_1)$, und ist f integrierbar auf R und S, so ist f auch integrierbar auf Q, und es gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \int_R f(x)\,dx + \int_S f(x)\,dx.$$



(3) Es sei $M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^3 = x_2^2\}$.

(a) Zeige, dass $M \backslash \{0\}$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist, M jedoch nicht.

(b) Berechne alle lokalen Extrema der Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1 + x_2$.

Skizziere auch die Menge M. Könnt ihr die Ergebnisse der beiden Aufgabenteile auch in dieser Skizze erkennen?

(4) Es seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen auf einem Quader $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige:

(a) Die Funktion $f \cdot g$ ist integrierbar auf $[a,b]$.
(Hinweis: Man kann sich etwas Arbeit sparen, indem man die Aussage zunächst nur im Fall $g = f$ zeigt und sich dann überlegt, warum daraus bereits der allgemeine Fall folgt.)

(b) Ist f sogar stetig und $g \geq 0$, so gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $\int_{[a,b]} f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_{[a,b]} g(x)\,dx$.