Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 1

Abgabe: Montag, 6. Mai

(1) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche dieser Matrizen ist / sind diagonalisierbar? Im Fall der Diagonalisierbarkeit bestimme man jeweils eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ bzw. $T^{-1}BT$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sind A und B ähnlich zueinander?

(d) Wie kann man mit Hilfe von (a) und (b) auf einfache Art eine allgemeine Formel für die Potenzen A^n mit $n \in \mathbb{N}$ bestimmen? (Ihr braucht die Rechnung nicht explizit durchzuführen.)

(2) Es seien V ein K-Vektorraum mit Basis $(x_1,\dots,x_n)$ und $f\colon V \to V$ der Endomorphismus mit

$$f(x_i) = x_{i+1} \quad \text{für } i = 1,\dots,n-1 \quad \text{und} \quad f(x_n) = x_1,$$

der also die Basisvektoren zyklisch permutiert.

Untersuche f in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ in Abhängigkeit von n auf Diagonalisierbarkeit, und gib ggfs. an, welche Diagonalmatrix bei geeigneter Basiswahl die Abbildungsmatrix von f sein kann.

(3) Es seien $A,B \in K^{n\times n}$. Zeige, dass die Matrizen AB und BA das gleiche charakteristische Polynom haben.

(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst, wenn eine der Matrizen invertierbar ist, dann wenn eine der Matrizen von der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist, und schließlich im allgemeinen Fall.)

(4) (a) Es seien $V = C^0(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

(b) Es seien V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ und $f\colon V \to V$ wieder die lineare Abbildung mit $f(\varphi)(x) = \varphi(x+1)$. Bestimme alle Eigenwerte von f.

Die Abgabe der Lösungen kann allein oder in Zweiergruppen erfolgen. Um den Arbeitsaufwand dabei sowohl für euch als auch für die Übungsleiter beim Korrigieren in Grenzen zu halten, solltet ihr möglichst zu zweit abgeben. Bitte werft eure Lösungen ins Postfach eures Übungsgruppenleiters neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.