

30. Der Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale

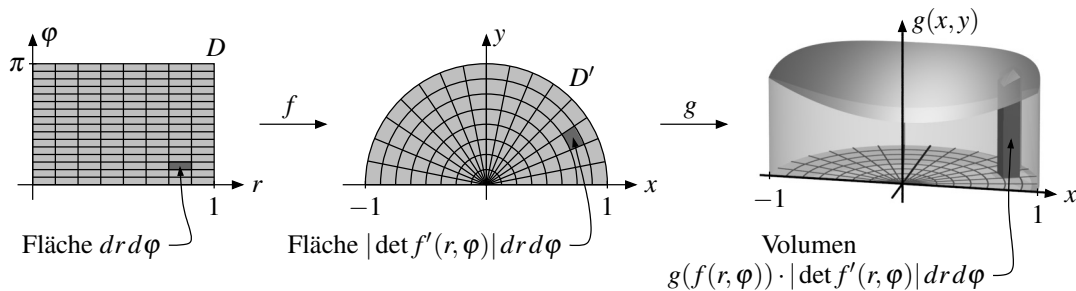
In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, wie man mehrdimensionale Integrale über gewisse Funktionen auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^n definieren und mit Hilfe des Satzes von Fubini auf n -dimensionale Integrale zurückführen kann. Ein wesentliches Phänomen dabei ist, dass die Integrationsgrenzen der zuerst ausgeführten Integrale dabei wie in Beispiel 29.34 oder Folgerung 29.38 von den späteren Integrationsvariablen abhängen, wenn der Integrationsbereich nicht gerade ein Quader ist. So würde z. B. wie im Bild unten rechts das Integral über eine Funktion $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ auf der oberen Hälfte des Einheitskreises

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

zu einem Doppelintegral der Form

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} g(x, y) dy \right) dx$$

mit variabler Grenze für y führen. Dieses Einsetzen der variablen Grenzen im y -Integral kann natürlich schnell zur Folge haben, dass der Integrand für das äußere x -Integral zu kompliziert wird, um seine Stammfunktion explizit zu bestimmen.



Es wäre daher schön, wenn wir für die Berechnung des Integrals andere Koordinaten verwenden könnten. So würden sich z. B. für die gerade betrachtete obere Hälfte des Einheitskreises Polarkoordinaten r, φ wie in Satz 9.27 und Beispiel 27.4 anbieten, denn in diesen Koordinaten lässt sich diese Menge D' gerade durch den Quader D mit den Grenzen $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$ wie im Bild oben links beschreiben – formal ist also $D' = f(D)$ mit der Polarkoordinatenabbildung $f: (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Könnten wir das Integral auch in diesen Koordinaten berechnen, so ergäbe sich ein Doppelintegral

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi \dots d\varphi \right) dr,$$

in dem die Integrationsgrenzen nun konstant sind und die zu integrierende Funktion durch das Einsetzen der inneren Grenzen damit nicht unnötig verkompliziert wird. Wir wollen daher jetzt untersuchen, wie sich mehrdimensionale Integrale unter derartigen Variablentransformationen verhalten, also wie die Integrale über g und $g \circ f$ miteinander zusammenhängen, wenn f eine Koordinatentransformation wie oben ist. Mit anderen Worten wollen wir eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel aus Satz 12.31 finden.

Aus dem Bild oben lässt sich bereits ablesen, wie eine solche Transformationsformel für Integrale aussehen sollte: Wollen wir das Integral $\int_{D'} g(x, y) d(x, y)$, also das Volumen unter dem Graphen von g über D' berechnen, so können wir uns dieses Volumen wie gewohnt als Summe der Volumina von kleinen Säulen wie im Bild oben rechts vorstellen, deren Grundflächen nun aber aufgrund der Variablentransformation keine Quader mehr sind, sondern aus kleinen Quadern mit Seitenlängen dr

und $d\varphi$ wie im linken Bild durch Abbilden mit f entstehen. Wir müssen also herausfinden, wie sich Flächeninhalte (oder in höheren Dimensionen Volumina) unter solchen Koordinatentransformationen ändern – in der Tat ist dies der wesentliche Teil in der Herleitung unserer gewünschten Formel. Dazu werden wir zunächst in Satz ?? zeigen, dass sich Volumina von Quadern unter einer *linearen* Abbildung mit dem Betrag der Determinante der zugehörigen Abbildungsmatrix multiplizieren. Ist f keine lineare Abbildung, so müssen wir für einen kleinen Quader stattdessen die entsprechende lineare Approximation nehmen, also die Ableitung $f'(r, \varphi)$ an diesem Punkt. Im Bild oben rechts hat die dunkel eingezeichnete Säule also die Höhe $g(f(r, \varphi))$ (nämlich den Funktionswert von g am betrachteten Punkt) und die Grundfläche $|\det f'(r, \varphi)| \cdot dr d\varphi$. Summiert man dies nun auf, so würde man also erwarten, dass sich das Integral über g als

$$\int_{D'} g(x, y) d(x, y) = \int_D g(f(r, \varphi)) \cdot |\det f'(r, \varphi)| d(r, \varphi)$$

mit $D = [0, 1] \times [0, \pi]$ in den neuen Koordinaten berechnen lässt. In der Tat ist dies bereits die gesuchte Transformationsformel (im Fall der obigen Koordinaten (x, y) bzw. (r, φ)).

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese anschaulichen Argumente zu einem exakten Beweis zu machen. Der daraus resultierende wichtige Satz ?? ist ohne Zweifel die am aufwendigsten zu zeigende Aussage in diesem Skript, und daher ist es beim ersten Durchlesen dieses Kapitels vermutlich sinnvoll, seinen Beweis und seine ganzen Vorbereitungen im folgenden Abschnitt 30.A zunächst einmal zu überspringen und direkt bei der Aussage bzw. den anschließenden Beispielen von Satz ?? in Abschnitt ?? weiterzulesen.

30.A Transformation von Volumina

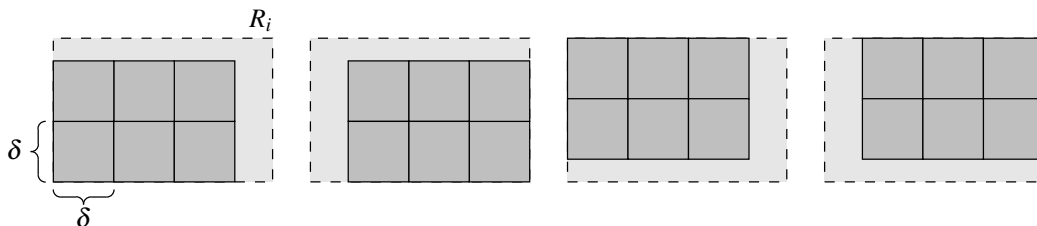
Auf dem Weg zum Beweis des Transformationssatzes beginnen wir mit der ersten oben erwähnten Frage, wie sich Volumina unter Koordinatentransformationen verändern. Leider haben wir dabei gleich noch ein weiteres technisches Problem, da wir ja in Kapitel 29 gesehen haben, dass wir gar nicht jeder beliebigen Menge sinnvoll ein Volumen zuordnen können. Wir müssen daher zunächst erst einmal überprüfen, ob messbare Mengen durch Koordinatentransformationen überhaupt wieder in ebenfalls messbare Mengen umgewandelt werden. Aufgrund unseres Messbarkeitskriteriums aus Folgerung 29.28 können wir dies durch die Untersuchung des Randes auf die Frage zurückführen, ob Nullmengen durch geeignete Koordinatentransformationen wieder in Nullmengen überführt werden. Mit diesem Problem werden wir daher nun unsere Arbeit an dem letztlich gesuchten Transformationssatz für Integrale beginnen. Als Erstes benötigen wir dazu ein weiteres Nullmengenkriterium analog zu Lemma 29.15.

Lemma 30.1. *Eine beschränkte Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Nullmenge, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ endlich viele Würfel Q_1, \dots, Q_k (also Quader, deren Seitenlängen alle gleich sind) gibt mit*

$$N \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

Beweis. Gibt es stets solche Würfel, so ist N nach Lemma 29.15 natürlich eine Nullmenge.

Für die umgekehrte Richtung sei nun N eine Nullmenge. Nach Lemma 29.15 gibt es dann endlich viele Quader R_1, \dots, R_l mit $\sum_{i=1}^l \text{vol}(R_i) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, die N überdecken. Wir wählen ein δ kleiner als die minimale Seitenlänge aller dieser Quader, und füllen jeden Quader R_i wie im Bild unten von jeder seiner 2^n Ecken kommend mit Würfeln der Kantenlänge δ auf.



Da die in R_i von einer Ecke kommenden Würfel ein Gesamtvolumen von höchstens $\text{vol}(R_i)$ haben, haben alle diese Würfel zusammen nun ein Gesamtvolumen von höchstens $\sum_{i=1}^l 2^n \text{vol}(R_i) < \varepsilon$. Außerdem überdecken die von einer Ecke kommenden Würfel den Quader R_i mindestens bis zu seinem Mittelpunkt. Daher überdecken alle Würfel zusammen genommen alle Quader R_i , und damit auch N . \square