18. Determinanten

Zum Ende des ersten Teils der linearen Algebra wollen wir jetzt noch die sogenannten Determinanten einführen, die beim Rechnen mit Matrizen ein unverzichtbares Hilfsmittel sind. Determinanten haben sehr viele schöne Eigenschaften und können demzufolge auch auf viele verschiedene Arten motiviert werden. Eine mögliche Herangehensweise ist, dass man nach einem einfachen Kriterium für die Invertierbarkeit quadratischer Matrizen sucht, so wie in dem folgenden einfachen Lemma für 2×2-Matrizen:

Lemma 18.1. *Eine 2×2-Matrix*

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

über einem Körper K ist genau dann invertierbar, wenn $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}\neq 0$ gilt.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Ist $a_{1,1}=0$, so ist A genau dann invertierbar, wenn $a_{1,2}\neq 0$ und $a_{2,1}\neq 0$ gilt – denn wenn diese beiden Einträge ungleich Null sind, sind die beiden Spalten von A offensichtlich linear unabhängig (so dass dann $\operatorname{rk} A=2$ ist), während A andernfalls eine Nullzeile oder Nullspalte enthält und somit höchstens Rang 1 haben kann. Im Fall $a_{1,1}=0$ sind die Bedingungen $a_{1,2}\neq 0$ und $a_{2,1}\neq 0$ aber äquivalent zu $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}\neq 0$.

Fall 2: Ist $a_{1,1}\neq 0$, so wenden wir den Gauß-Algorithmus aus Satz 15.26 an, um $\operatorname{rk} A$ zu berechnen:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a_{1,1}}Z1\to Z1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2-a_{2,1}Z1\to Z2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} \\ 0 & a_{2,2}-\frac{a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann Rang 2, ist also genau dann invertierbar, wenn $a_{2,2}-\frac{a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}}\neq 0$, d. h. wenn $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}\neq 0$ gilt. □

Die Zahl $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}$ werden wir später die *Determinante* $\det A$ von A nennen (weil sie „determiniert“, ob A invertierbar ist oder nicht).

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, Lemma 18.1 auf größere quadratische Matrizen zu verallgemeinern, also zu jeder Matrix $A\in K^{n\times n}$ eine Zahl $\det A\in K$ zu definieren, die ein Polynom in den Einträgen von A ist und (neben vielen anderen schönen Eigenschaften) genau dann ungleich Null ist, wenn A invertierbar ist.

18.A Die Konstruktion der Determinante

Leider ist eine direkte Angabe der Determinante einer quadratischen Matrix $A\in K^{n\times n}$ als polynomialer Ausdruck in den Einträgen von A so wie in Lemma 18.1 für allgemeines n zwar möglich (siehe Bemerkung 18.14), aber auch recht kompliziert. Wir wollen daher hier den für euch wahrscheinlich etwas ungewohnten Zugang wählen, die Determinante über ihre Eigenschaften zu definieren, d. h. als eine Funktion $A\mapsto \det A$ auf den $n\times n$-Matrizen, die eine gewisse „Wunschliste“ elementarer Eigenschaften erfüllt. Im Anschluss werden wir dann zeigen, dass unsere Wunschliste wirklich erfüllbar ist und die Determinante in der Tat auch eindeutig bestimmt.

Hier ist nun unsere Wunschliste:

Definition 18.2 (Determinante)**.** Es seien K ein Körper und $n\in\mathbb{N}_{>0}$ gegeben. Eine Abbildung $\det\colon K^{n\times n}\to K$ heißt **Determinante** (von $n\times n$-Matrizen), wenn gilt:

(a) („det ist multilinear") Die Funktion det ist *linear in jeder Zeile*, d. h. für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k + a'_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a'_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda\, a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

wobei $a_1, \dots, a_k, a'_k, \dots, a_n \in K^{1 \times n}$ die Zeilen der jeweiligen (quadratischen) Matrizen bezeichnen. (Halten wir also alle Zeilen bis auf die k-te fest, so haben wir genau eine lineare Abbildung in der k-ten Zeile im Sinne von Definition 16.1.)

(b) („det ist alternierend") Stimmen zwei Zeilen von $A \in K^{n \times n}$ überein, so ist $\det A = 0$.

(c) („det ist normiert") Es gilt $\det(E_n) = 1$.

Beispiel 18.3. Die Funktion

$$\det\colon K^{2 \times 2} \to K,\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mapsto a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

aus Lemma 18.1 ist eine Determinante:

(a) det ist multilinear: Die Additivität in der ersten Zeile ergibt sich z. B. aus der Rechnung

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{1,1} + a'_{1,1} & a_{1,2} + a'_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} &= (a_{1,1} + a'_{1,1})\, a_{2,2} - (a_{1,2} + a'_{1,2})\, a_{2,1} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} + a'_{1,1}a_{2,2} - a'_{1,2}a_{2,1} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

die anderen Linearitätseigenschaften folgen natürlich genauso.

(b) det ist alternierend: Sind die beiden Zeilen der Matrix gleich, so ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}a_{1,2} - a_{1,2}a_{1,1} = 0.$$

(c) det ist normiert, denn natürlich ist $\det(E_2) = 1$.

Bemerkung 18.4.

(a) Wir werden in Folgerung 18.8 und Satz 18.12 noch sehen, dass es zu jedem Körper K und jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ in der Tat genau eine Determinante $\det\colon K^{n \times n} \to K$ gibt, dass Definition 18.2 die Determinante also widerspruchsfrei und eindeutig festlegt. Solange wir dies noch nicht gezeigt haben, sollten wir aber korrekterweise immer von *einer* Determinante (und nicht von *der* Determinante) sprechen.

(b) Enthält A eine Nullzeile, so können wir aus dieser Zeile den Faktor 0 herausziehen und erhalten aus der Linearitätseigenschaft in dieser Zeile sofort, dass dann $\det A = 0$ sein muss.

(c) Aus Eigenschaft (b) der Definition 18.2 einer Determinante folgt, dass sich $\det A$ beim Vertauschen zweier Zeilen mit -1 multipliziert, also genau das Vorzeichen ändert (daher kommt auch der Name „alternierend" für diese Eigenschaft): Für alle $k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $k \neq l$ ergibt sich zusammen mit der Multilinearität nämlich

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\a_k+a_l\\\vdots\\a_k+a_l\\\vdots\end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\a_k\\\vdots\\a_k+a_l\\\vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\a_l\\\vdots\\a_k+a_l\\\vdots\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\a_k\\\vdots\\a_k\\\vdots\end{pmatrix}}_{=0} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\a_k\\\vdots\\a_l\\\vdots\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\vdots\\a_l\\\vdots\\a_k\\\vdots\end{pmatrix} + \underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\a_l\\\vdots\\a_l\\\vdots\end{pmatrix}}_{=0},$$

und damit

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\a_k\\\vdots\\a_l\\\vdots\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\vdots\\a_l\\\vdots\\a_k\\\vdots\end{pmatrix}.$$

(d) Analog zu (c) wollen wir jetzt untersuchen, was mit einer Determinante passiert, wenn wir in einer Matrix A für gegebenes $k \in \{1,\dots,n\}$ die k-te Zeile unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Zeilen ganz nach oben schieben. Wir können dies wie folgt durch $k-1$ Vertauschungen zweier benachbarter Zeilen erreichen:

$$A = \begin{pmatrix}\vdots\\a_{k-2}\\a_{k-1}\\a_k\\a_{k+1}\\\vdots\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\vdots\\a_{k-2}\\a_k\\a_{k-1}\\a_{k+1}\\\vdots\end{pmatrix} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{pmatrix}a_k\\a_1\\\vdots\\a_{k-1}\\a_{k+1}\\\vdots\end{pmatrix}.$$

Da sich bei jeder dieser Vertauschungen nach (c) das Vorzeichen der Determinante ändert, ändert das gesamte Verschieben der k-ten Zeile ganz nach oben die Determinante von A also um einen Faktor $(-1)^{k-1}$.

Um die weiteren Eigenschaften von Determinanten zu untersuchen, beginnen wir zunächst mit den Elementarmatrizen.

Lemma 18.5 (Determinanten von Elementarmatrizen)**.** *Es sei* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *eine Determinante. Dann gilt für alle* $A \in K^{n\times n}$ *sowie für alle* $n\times n$*-Elementarmatrizen* $F_k(\lambda)$ *und* $F_{k,l}(\lambda)$ *aus Konstruktion 15.23:*

(a) $\det(F_k(\lambda)\cdot A) = \lambda \det A$.

(b) $\det(F_{k,l}(\lambda)\cdot A) = \det A$.

Insbesondere gilt also $\det F_k(\lambda) = \lambda$ *und* $\det F_{k,l}(\lambda) = 1$*, und damit* $\det(FA) = \det F \cdot \det A$ *für jede Elementarmatrix* F *und jede beliebige quadratische Matrix* A*.*

Beweis. Es seien $a_1,\dots,a_n \in K^{1\times n}$ die Zeilen von A. Nach Konstruktion 15.23 entspricht eine Multiplikation von A mit einer Elementarmatrix von links genau einer elementaren Zeilenumformung.

Damit erhalten wir mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 18.2

$$\det(F_k(\lambda)\cdot A) = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda\, a_k\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\,\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\,\det A$$

und

$$\det(F_{k,l}(\lambda)\cdot A) = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k+\lambda\, a_l\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} + \lambda\,\underbrace{\det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_l\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix}}_{=0} = \det\begin{pmatrix}\vdots\\ a_k\\ \vdots\\ a_l\\ \vdots\end{pmatrix} = \det A,$$

was die beiden Teile des Lemmas zeigt. Die Determinanten der Elementarmatrizen erhält man daraus für $A = E_n$. □

Aus diesem einfachen Lemma folgt nun bereits die wahrscheinlich wichtigste Eigenschaft von Determinanten:

Satz 18.6 (**Produktsatz** für Determinanten)**.** *Es sei* $\det\colon K^{n\times n}\to K$ *eine Determinante. Dann gilt für alle* $A,B\in K^{n\times n}$*:*

(a) $\det(AB) = \det A\cdot\det B$.

(b) *A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$. *In diesem Fall ist* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Beweis. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: A ist invertierbar. Dann ist $A = F_1\cdot\cdots\cdot F_k$ nach Folgerung 15.35 ein Produkt von Elementarmatrizen. Durch k-fache Anwendung von Lemma 18.5 erhält man also

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(F_1\cdot\cdots\cdot F_k\cdot B) &&= \det F_1\cdot\cdots\cdot\det F_k\cdot\det B\\ \text{sowie}\qquad \det A &= \det(F_1\cdot\cdots\cdot F_k) &&= \det F_1\cdot\cdots\cdot\det F_k, \end{aligned}$$

und damit wie behauptet $\det(AB) = \det A\cdot\det B$. Setzt man hier $B = A^{-1}$ ein, so ergibt sich insbesondere $\det A\cdot\det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$, d. h. es gilt auch $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Fall 2: A ist nicht invertierbar, also $\operatorname{rk} A < n$. Bringen wir A dann mit einem Produkt F von Elementarmatrizen auf Zeilenstufenform FA, so hat FA weniger als n Stufen und damit am Ende (mindestens) eine Nullzeile. Also ist $\det(FA) = 0$ nach Bemerkung 18.4 (b). Da F als Produkt von Elementarmatrizen invertierbar ist, bedeutet dies nach dem bereits gezeigten Fall 1 auch $\det F\cdot\det A = 0$; wegen $\det F\neq 0$ also $\det A = 0$.

Mit FA hat aber auch FAB eine Nullzeile. Damit folgt genauso wie oben auch $\det(AB) = 0$, also insbesondere $\det(AB) = \det A\cdot\det B$. □

Bemerkung 18.7. Im Gegensatz zu Produkten gibt es *keine* Formel für die Determinante $\det(A+B)$ einer Summe von zwei Matrizen – insbesondere ist im Allgemeinen $\det(A+B)\neq\det A+\det B$!

Als Folgerung aus dem Produktsatz können wir nun bereits beweisen, dass die Eigenschaften aus Definition 18.2 eine Determinante eindeutig festlegen.

Folgerung 18.8 (Eindeutigkeit der Determinante)**.** *Zu jedem Körper K und* $n\in\mathbb{N}_{>0}$ *gibt es höchstens eine Determinante* $\det\colon K^{n\times n}\to K$.

Beweis. Es sei $A \in K^{n\times n}$. Ist A nicht invertierbar, so ist nach Satz 18.6 notwendigerweise $\det A = 0$. Andernfalls ist $A = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ nach Folgerung 15.35 ein Produkt von Elementarmatrizen, und damit ist nach Satz 18.6 (a)

$$\det A = \det F_1 \cdot \dots \cdot \det F_k.$$

Da die Determinante der Elementarmatrizen nach Lemma 18.5 aber durch Definition 18.2 eindeutig bestimmt ist, ist damit auch $\det A$ durch diese Definition eindeutig festgelegt. □

Auf ganz ähnliche Art wollen wir nun zeigen, dass sich eine Determinante beim Transponieren der Matrizen nicht ändert.

Folgerung 18.9. *Ist $A \in K^{n\times n}$ und $\det\colon K^{n\times n} \to K$ eine Determinante, so gilt $\det(A^\mathsf{T}) = \det A$.*

Beweis. Ist A nicht invertierbar, also $\operatorname{rk} A < n$, so ist nach Bemerkung 15.39 auch A^T nicht invertierbar, und damit ist $\det(A^\mathsf{T}) = 0 = \det A$ nach Satz 18.6 (b).

Andernfalls ist $A = F_1 \cdot \dots \cdot F_k$ nach Folgerung 15.35 wieder ein Produkt von Elementarmatrizen. Da die zu zeigende Aussage für Elementarmatrizen aus Lemma 18.5 offensichtlich ist (es ist nämlich $(F_k(\lambda))^\mathsf{T} = F_k(\lambda)$ und $(F_{k,l}(\lambda))^\mathsf{T} = F_{l,k}(\lambda)$), folgt somit nach Lemma 15.7 (d) und Satz 18.6 (a)

$$\det(A^\mathsf{T}) = \det((F_1 \cdots F_k)^\mathsf{T}) = \det(F_k^\mathsf{T} \cdots F_1^\mathsf{T}) = \det(F_k^\mathsf{T}) \cdots \det(F_1^\mathsf{T}) = \det F_1 \cdots \det F_k = \det A. \qquad \square$$

Bemerkung 18.10. Folgerung 18.9 besagt anschaulich, dass alle Eigenschaften, die für die Zeilen einer Determinante gelten, analog auch für die Spalten gelten. So ist eine Determinante z. B. auch linear in jeder Spalte (vgl. Definition 18.2 (a)) und ändert ihr Vorzeichen beim Vertauschen zweier Spalten (vgl. Bemerkung 18.4 (c)).

Um sicherzustellen, dass wir mit Definition 18.2 keine in sich widersprüchliche Wunschliste aufgeschrieben haben, kommen wir nun aber endlich zum bereits angekündigten Resultat, dass eine Determinante mit den geforderten Eigenschaften auch wirklich existiert. Wir werden die Funktionen $\det\colon K^{n\times n} \to K$ rekursiv über n definieren und verwenden dazu die folgende Konstruktion, um Matrizen der Größe n auf solche der Größe $n-1$ zurückzuführen.

Definition 18.11 (Streichungsmatrix)**.** Zu $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ sowie $k, l \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$A'_{k,l} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$$

die Matrix, die man erhält, wenn man aus A die k-te Zeile und l-te Spalte herausstreicht. Wir bezeichnen diese Matrizen als **Streichungsmatrizen** zu A.

Satz 18.12 (Existenz der Determinante)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir $\det\colon K^{n\times n} \to K$ rekursiv über n durch die folgende Vorschrift:*

- *Für $n = 1$ setzen wir $\det(a_{1,1}) := a_{1,1}$.*
- *Für $n > 1$ setzen wir*

  $$\det A := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det A'_{k,1},$$

  wobei wie üblich $a_{k,1}$ die Einträge der ersten Spalte von A und $A'_{k,1}$ die zu diesen Einträgen gehörigen Streichungsmatrizen sind.

41 *Dann ist* det *eine (und damit nach Folgerung 18.8 „die“) Determinante für alle n.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns ein paar Beispiele anschauen, um die angegebene rekursive Formel besser zu verstehen.

Beispiel 18.13 (Determinante von 2×2- und 3×3-Matrizen)**.**

(a) Für $n=2$ besagt die Formel aus Satz 18.12

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{1,1}\det(a_{2,2}) + (-1)^{2+1}a_{2,1}\det(a_{1,2}) \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}\end{aligned}$$

und reproduziert damit die Formel aus Lemma 18.1.

(b) Für $n=3$ ergibt sich unter Benutzung des Ergebnisses aus (a)

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{1,1}\det\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} + (-1)^{2+1}a_{2,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3}\end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+1}a_{3,1}\det\begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3}\end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{1,3}a_{3,2} \\ &\quad + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{1,3}a_{2,2}.\end{aligned}$$

Am einfachsten kann man sich diese Formel nach der sogenannten **Regel von Sarrus** merken: Bilden wir die 3×5-Matrix, in der wir neben der Matrix A die beiden ersten Spalten noch einmal wiederholen, so ergeben sich die 6 Terme der Determinante mit ihren Vorzeichen aus dem folgenden Schema:

$$\begin{array}{ccc:cc} & & - & - & - \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \\ & & + & + & + \end{array}$$

Beachte aber, dass diese einfache Merkregel *nur für* $n=3$ gilt – für größere n ist der komplett ausmultiplizierte Ausdruck für $\det A$ deutlich komplizierter (und für konkrete numerische Berechnungen in der Tat auch nicht mehr geeignet).

Bemerkung 18.14. Diejenigen von euch, die aus der Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen" die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von $\{1,\dots,n\}$ kennen [G, Kapitel 2], können die Formel für die Determinante einer Matrix $A=(a_{i,j})_{i,j}\in K^{n\times n}$ auch nicht-rekursiv als

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1,\sigma(1)}\cdot\dots\cdot a_{n,\sigma(n)} \qquad (*)$$

hinschreiben. Man sieht an dieser Darstellung also, dass die Determinante aus einer Summe von $n!$ Termen besteht. Dabei ist jeder Term ein Produkt von genau n Einträgen von A, und zwar aus jeder Zeile und jeder Spalte genau einem. Aufsummiert wird über alle Möglichkeiten, n Einträge von A eben gerade so auszuwählen, dass man aus jeder Zeile und Spalte einen Eintrag genommen hat. Die Vorzeichen der einzelnen Terme sind immer genau das Vorzeichen der entsprechenden Permutation.

Wir werden die Formel $(*)$ in dieser Vorlesung aber nicht benötigen und daher auch nicht beweisen, dass sie wirklich mit der rekursiven Definition aus Satz 18.12 übereinstimmt bzw. die Eigenschaften von Definition 18.2 erfüllt.

Wir kommen nun aber endlich zum Beweis des Existenzsatzes 18.12.

Beweis von Satz 18.12. Wir überprüfen die drei Eigenschaften aus Definition 18.2 mit Induktion über n. Für $n=1$ sind alle Aussagen klar. Wir können also annehmen, dass $n>1$ ist und wir die Eigenschaften von Definition 18.2 für Matrizen der Größe $n-1$ bereits gezeigt haben; wir müssen sie nun für Matrizen der Größe n zeigen.

det ist multilinear: Der Ausdruck $a_{1,1} \det A'_{1,1}$ ist linear in der ersten Zeile, da $a_{1,1}$ natürlich linear in der ersten Zeile ist und $A'_{1,1}$ nicht von der ersten Zeile abhängt. Die Ausdrücke $a_{k,1} \det A'_{k,1}$ für $k > 1$ sind ebenfalls linear in der ersten Zeile, da $a_{k,1}$ nicht von der ersten Zeile abhängt und $\det A'_{k,1}$ nach Induktionsvoraussetzung linear in der ersten Zeile ist. Damit ist auch $\det A$ als Linearkombination dieser Ausdrücke linear in der ersten Zeile. Die Linearität in den anderen Zeilen folgt natürlich analog.

det ist alternierend: Wir bezeichnen die Zeilen von A mit $a_1, \dots, a_n \in K^{1\times n}$. Weiterhin seien $a'_1, \dots, a'_n \in K^{1\times(n-1)}$ die Zeilen von A, bei denen man jeweils den ersten Eintrag herausgestrichen hat. Wir nehmen nun an, dass zwei Zeilen a_i und a_j von A übereinstimmen, und müssen zeigen, dass $\det A = 0$ folgt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dazu $i > j$.

Beachte, dass dann auch in den Streichungsmatrizen $A'_{k,1}$ mit $k \neq i$ und $k \neq j$, bei denen wir also weder die i-te noch die j-te Zeile herausgestrichen haben, jeweils zwei Zeilen übereinstimmen. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Determinante aller dieser Streichungsmatrizen gleich 0, und damit bleibt in der rekursiven Formel für $\det A$ nur der Ausdruck

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A'_{i,1} + (-1)^{j+1} a_{j,1} \det A'_{j,1} \qquad (*)$$

übrig. Nun können wir wegen $a'_i = a'_j$

$$\text{sowohl} \quad A'_{i,1} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_j \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{als auch} \quad A'_{j,1} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_i \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{auf die Form} \quad A' := \begin{pmatrix} a'_i \\ a'_1 \\ \vdots \\ a'_{j-1} \\ a'_{j+1} \\ \vdots \\ a'_{i-1} \\ a'_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

bringen, indem wir die Zeile a'_j bzw. a'_i unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Zeilen ganz nach oben schieben. Da det für Matrizen der Größe $n-1$ nach Induktionsvoraussetzung eine Determinante ist, ändern sich dadurch die Vorzeichen von $\det A'_{i,1}$ und $\det A'_{j,1}$ wie in Bemerkung 18.4 (d): Da wir in $A'_{i,1}$ die Zeile mit der Nummer j, in $A'_{j,1}$ jedoch die Zeile mit der Nummer $i-1$ nach oben schieben (im letzteren Fall fehlt ja die Zeile a'_j oberhalb von a'_i), ist also

$$\det A'_{i,1} = (-1)^{j-1} \det A' \quad \text{und} \quad \det A'_{j,1} = (-1)^{i-2} \det A'$$

und damit nach $(*)$

$$\det A = (-1)^{i+j} a_{i,1} \det A' + (-1)^{i+j-1} a_{j,1} \det A' = 0$$

wegen $a_{i,1} = a_{j,1}$.

det ist normiert: In der ersten Spalte der Einheitsmatrix sind natürlich der erste Eintrag gleich 1 und alle anderen gleich 0. Weiterhin ist die Streichungsmatrix des Eintrags links oben gerade E_{n-1}. Also folgt sofort

$$\det E_n = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det E_{n-1} = 1.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Insgesamt haben wir jetzt also gesehen, dass es für alle Körper K und $n \in \mathbb{N}$ genau eine Determinante $\det\colon K^{n\times n} \to K$ gibt. In Zukunft werden wir daher immer von *der* Determinante quadratischer Matrizen sprechen.

18.B Eigenschaften der Determinante

Im letzten Abschnitt haben wir die Determinante quadratischer Matrizen definiert und auch bereits ihre ersten wichtigen Eigenschaften gesehen. Wir wollen diese Untersuchung der Determinante jetzt fortsetzen und uns dabei als Erstes um ihre praktische Berechnung kümmern. In der Tat ist hierfür die rekursive Formel aus Satz 18.12 bereits sehr nützlich. Wir können sie allerdings noch etwas erweitern, denn dort ist ja momentan die erste Spalte der Matrix ausgezeichnet – obwohl aufgrund von Definition 18.2 natürlich klar sein sollte, dass die erste Spalte der Matrix keine besondere Rolle spielt. Wir sollten eine ähnliche Rekursionsformel also auch für die anderen Spalten (und aufgrund von Folgerung 18.9 in der Tat auch für die Zeilen) erwarten können. Dies besagt der folgende Satz.

Satz 18.15 (Laplacescher Entwicklungssatz). *Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$.*

(a) *Für alle $l \in \{1,\dots,n\}$ gilt $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{k,l} \cdot \det A'_{k,l}$.*

(b) *Für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ gilt $\det A = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{k+l} \cdot a_{k,l} \cdot \det A'_{k,l}$.*

Benutzt man diese Formeln, so sagt man auch, dass man die Determinante von A nach der l-ten Spalte bzw. k-ten Zeile entwickelt.

Beweis.

(a) Es sei $B = (b_{i,j})_{i,j}$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man die Spalte l unter Beibehaltung der Reihenfolge der anderen Spalten ganz nach links schiebt. Nach den Bemerkungen 18.4 (d) und 18.10 ist dann $\det A = (-1)^{l-1} \det B$. Andererseits ist natürlich $b_{k,1} = a_{k,l}$ und $B'_{k,1} = A'_{k,l}$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$. Damit folgt wie behauptet nach Satz 18.12 angewendet auf B

$$\det A = (-1)^{l-1} \det B = (-1)^{l-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{k,1} \det B'_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{k,l} \det A'_{k,l}.$$

(b) Dies ergibt sich mit Bemerkung 18.10 sofort aus (a). □

Beispiel 18.16 (Berechnung von Determinanten)**.** Die Entwicklung nach Laplace ist oft die geschickteste Art, die Determinante einer Matrix A konkret zu berechnen – insbesondere wenn man nach einer Spalte oder Zeile entwickeln kann, in der bereits viele Einträge gleich 0 sind, so dass die entsprechenden Terme in der Summe wegfallen. In der Praxis empfiehlt es sich daher, zunächst mit elementaren Spalten- oder Zeilenumformungen eine Spalte oder Zeile zu erzeugen, in der nur ein Eintrag ungleich Null ist, und dann nach dieser Spalte bzw. Zeile zu entwickeln. Beachte, dass die Determinante dabei nach Lemma 18.5 …

- mit λ multipliziert wird, wenn wir eine Spalte oder Zeile mit λ multiplizieren; und
- unverändert bleibt, wenn wir ein Vielfaches einer Spalte bzw. Zeile zu einer anderen addieren.

Hier ist ein Beispiel, bei dem wir der Reihe nach die erste von der dritten Spalte subtrahieren, nach der dritten Spalte entwickeln, und noch einmal nach der zweiten Zeile entwickeln: Es ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&2&0\\ 0&1&0&3 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&2&0\\ 0&1&0&3 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&0&0\\ 0&1&3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1&1\\ 1&3 \end{pmatrix} \\ &= -4. \end{aligned}$$

Ein besonders einfacher Fall – der aber dennoch häufig vorkommt – sind die sogenannten Dreiecksmatrizen, bei denen oberhalb oder unterhalb der Diagonale nur Nullen stehen.

Definition 18.17 (Dreiecksmatrizen)**.** Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$ gilt, und **untere Dreiecksmatrix**, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i < j$ gilt. Obere bzw. untere Dreiecksmatrizen haben also die Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Sind zusätzlich noch alle Einträge $a_{i,i}$ auf der Diagonale gleich Null, so heißt A **echte (obere bzw. untere) Dreiecksmatrix**.

Folgerung 18.18 (Determinante von Dreiecksmatrizen)**.** *Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$ eine (obere oder untere) Dreiecksmatrix, so ist ihre Determinante gleich dem Produkt ihrer Einträge auf der Diagonale*

$$\det A = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}.$$

Beweis. Da untere Dreiecksmatrizen beim Transponieren in obere übergehen, reicht es nach Folgerung 18.9, die Aussage für obere Dreiecksmatrizen zu zeigen. Wir beweisen die Aussage in diesem Fall mit Induktion über n; der Fall $n = 1$ ist dabei trivial. Für $n > 1$ entwickeln wir $\det A$ gemäß Satz 18.15 nach der 1. Spalte: Da hier nur der erste Eintrag ungleich Null ist, ergibt sich sofort nach Induktionsvoraussetzung

$$\det A = (-1)^{1+1}\, a_{1,1} \, \det A'_{1,1} = a_{1,1} \cdot (a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}),$$

da auch $A'_{1,1} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ eine obere Dreiecksmatrix (mit Diagonaleinträgen $a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$) ist. □

Aufgabe 18.19.

(a) Berechne $\det(A^5)$ und $\det(5A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

(b) Für $a_1, \dots, a_n \in K \backslash \{0\}$ zeige man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

Aufgabe 18.20. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix, die eine Blockgestalt der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

hat, wobei $B \in K^{m \times m}$ und $C \in K^{(n-m)\times(n-m)}$ selbst quadratische Matrizen sind. Zeige, dass dann $\det A = \det B \cdot \det C$ gilt.

(Hinweis: Es hilft, zunächst die Fälle zu betrachten, in denen eine der Matrizen B und C nicht invertierbar oder die Einheitsmatrix ist.)

Wir wollen nun noch zwei Ergebnisse zu Determinanten beweisen, die mehr aus theoretischer als aus rechnerischer Sicht interessant sind. Das erste betrifft inverse Matrizen: Ist A eine invertierbare Matrix, so haben wir in Satz 15.34 ja bereits gesehen, wie man A^{-1} konkret berechnen kann. Mit Hilfe von Determinanten können wir nun auch eine explizite Formel für A^{-1} angeben – die allerdings den Nachteil hat, dass sie bei konkreten Berechnungen relativ aufwendig ist, weil für jeden Eintrag von A^{-1} eine eigene Determinante berechnet werden muss.

Satz 18.21 (Explizite Formel für die inverse Matrix)**.** *Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$.*

(a) *Ist $C = (c_{i,j})_{i,j} \in K^{n\times n}$ die Matrix mit Einträgen*

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A'_{j,i}$$

(beachte die Vertauschung von Spalten- und Zeilenindizes bei der Streichungsmatrix!), so ist $CA = AC = (\det A) \cdot E_n$.

(b) *Ist A invertierbar, so ist die inverse Matrix von A gegeben durch*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C = \left((-1)^{i+j} \frac{\det A'_{j,i}}{\det A} \right)_{i,j}$$

mit C wie in (a).

Beweis. Für alle $i,k = 1,\dots,n$ überprüfen wir den (i,k)-Eintrag des Matrixprodukts CA: Nach Definition 15.5 ist dies

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j}a_{j,k} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{j,k} \det A'_{j,i} \overset{18.15}{=} \det \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{Spalte } i & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array},$$

wobei die zweite Gleichung genau die Entwicklung nach Spalte i ist, und die Matrix auf der rechten Seite aus A entsteht, indem die Einträge aus Spalte k auch in Spalte i geschrieben werden. Die Determinante dieser Matrix ist aber 0 für $i \neq k$ (da dann zwei gleiche Spalten existieren) und $\det A$ für $i = k$ (denn dann ist diese Matrix gleich A). Damit ist $CA = (\det A)\,E_n$.

Analog zeigt man auch $AC = (\det A)\,E_n$ und damit Teil (a). Die Formel in (b) folgt daraus natürlich sofort mit Division durch $\det A$. □

Beispiel 18.22. Für eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

hat die Matrix C aus Satz 18.21 die Einträge

$$c_{1,1} = (-1)^{1+1} \det(a_{2,2}) = a_{2,2}, \qquad c_{1,2} = (-1)^{1+2} \det(a_{1,2}) = -a_{1,2},$$

und genauso $c_{2,1} = -a_{2,1}$ und $c_{2,2} = a_{1,1}$. Damit ist nach Satz 18.21 (b) im Fall einer invertierbaren Matrix also

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Eine konkrete Anwendung von Satz 18.21 ergibt sich bei der Lösung linearer Gleichungssysteme: Sind $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine invertierbare Matrix und $b \in K^n$, so wissen wir bereits, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ für x die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$ hat. Da wir gerade mit Hilfe von Determinanten eine explizite Formel für die inverse Matrix A^{-1} gefunden haben, überrascht es nicht, dass wir auch für die Koordinaten dieses Lösungsvektors $x = A^{-1}b$ eine ähnliche explizite Formel herleiten können:

Satz 18.23 (Cramersche Regel). *Es seien $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ und $b \in K^n$. Wir bezeichnen die Spalten von A mit $a_1,\dots,a_n \in K^n$. Dann ist die (nach Algorithmus 15.40 (a) eindeutige) Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ der Vektor $x \in K^n$ mit den Komponenten*

$$x_i = \frac{\det(a_1\,|\cdots|\,a_{i-1}\,|\,b\,|\,a_{i+1}\,|\cdots|\,a_n)}{\det A}$$

für $i = 1,\dots,n$.

Beweis. Nach Satz 18.21 (b) und Definition 15.5 der Matrixmultiplikation ist x_i, also die i-te Komponente des Matrixprodukts $A^{-1}b$, gleich

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\det A'_{j,i}}{\det A} \cdot b_j \overset{18.15}{=} \frac{1}{\det A} \det(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{i-1} \,|\, b \,|\, a_{i+1} \,|\, \cdots \,|\, a_n),$$

wobei die zweite Gleichheit die Entwicklung nach der i-ten Spalte ist. □

Beispiel 18.24. Wir wollen mit der Cramerschen Regel das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &= \ \ 2 \\ x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned} \quad \text{lösen, also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist sehr einfach: Es ist

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

Beachte jedoch, dass es für konkrete Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen sehr rechenaufwendig ist, die Cramersche Regel zu verwenden. Man wird diese Regel daher meistens nur für theoretische Überlegungen verwenden, in denen man eine konkrete Formel für die Lösung (und nicht nur ein Lösungsverfahren) braucht. Für numerische Berechnungen ist der Gauß-Algorithmus in Satz 15.32 wesentlich effizienter.

Aufgabe 18.25. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen.

42 Zeige, dass A^{-1} genau dann ebenfalls nur ganzzahlige Einträge hat, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.