14. Basen und Dimension

Im letzten Kapitel haben wir in Lemma 13.11 viele Beispiele von Vektorräumen konstruiert, indem wir zu einer (endlichen) Familie B in einem gegebenen Vektorraum den davon erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin} B$ gebildet haben. In der Tat haben sehr viele in der Praxis auftretende Vektorräume die Eigenschaft, dass ihre Elemente als Linearkombinationen endlich vieler gegebener Vektoren geschrieben werden können – z. B. alle Unterräume von K^n für beliebige $n \in \mathbb{N}$, wie wir in Bemerkung 14.23 noch sehen werden. Wir wollen uns daher zur Vereinfachung oft auf solche gemäß der folgenden Definition endlich erzeugten Vektorräume beschränken. Wie man auch ohne diese Bedingung auskommen kann, werden wir kurz am Ende dieses Kapitels in Bemerkung 14.27 diskutieren.

Definition 14.1 (Erzeugendensysteme und endlich erzeugte Vektorräume)**.** Es sei V ein Vektorraum.

(a) Eine (endliche) Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in V heißt ein **Erzeugendensystem** von V, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, d. h. wenn es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

(b) Der Vektorraum V heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein solches endliches Erzeugendensystem besitzt.

Beispiel 14.2.

(a) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ bilden die sogenannten **Einheitsvektoren**

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in K^n$$

ein Erzeugendensystem von K^n, denn jedes $x \in K^n$ mit Komponenten $x_1, \dots, x_n \in K$ hat die Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Insbesondere ist K^n damit ein endlich erzeugter Vektorraum.

(b) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist auch die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ein Erzeugendensystem: Um dies zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ mit Komponenten x_1 und x_2 Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{und} & x_2 = \lambda_1 - \lambda_2. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich aber leicht nach λ_1 und λ_2 auflösen; wir erhalten

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Familie $B = (x^0, \dots, x^n)$ aller Potenzfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$ für $i = 0, \dots, n$ (die wir hier kurz als x^i schreiben) ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens n aus Beispiel 13.12 (c), denn jedes solche Polynom ist nach Definition eine Linearkombination dieser Potenzfunktionen.

Insbesondere ist $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ also endlich erzeugt. Der Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome ohne Gradbeschränkung ist dagegen nicht endlich erzeugt: In einer (endlichen) Familie B von Polynomen in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gibt es nämlich zwangsläufig einen größten auftretenden Grad; Polynome in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von höherem Grad können dann also nicht in $\mathrm{Lin}\,B$ liegen.

(d) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V bleibt natürlich ein Erzeugendensystem von V, wenn man beliebige Vektoren von V hinzufügt. So ist z. B. nicht nur wie in (a) die Familie der beiden Einheitsvektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, sondern auch die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Diese Erweiterungsmöglichkeit mit beliebigen Vektoren kann Erzeugendensysteme natürlich unnötig groß machen. Wir sollten daher vor allem nach Erzeugendensystemen suchen, die keine überflüssigen Vektoren mehr beinhalten. In diesem Fall kann man dann anschaulich erwarten, dass die Anzahl der Vektoren in einem Erzeugendensystem als „Dimension" des Vektorraums interpretiert werden kann – so wie in Beispiel 13.12 (a) ein einzelner Vektor eine (eindimensionale) Gerade und in Bemerkung 13.6 (c) zwei Vektoren eine (zweidimensionale) Ebene aufgespannt haben. Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Idee genau zu untersuchen und damit insbesondere auch den sehr wichtigen Dimensionsbegriff mathematisch exakt einzuführen.

14.A Lineare Unabhängigkeit und Basen

In Beispiel 14.2 (d) haben wir schon einen Fall eines Erzeugendensystems B mit überflüssigen Vektoren gesehen, nämlich

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{für den Vektorraum} \quad V = \mathbb{R}^2.$$

Dass hier gar nicht alle drei Vektoren von B benötigt werden, um V zu erzeugen, liegt einfach daran, dass sich einer von ihnen schon als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt: Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass wir diesen Vektor im Erzeugendensystem nicht benötigen. Alternativ könnten wir diese Gleichung auch nach einem der anderen Vektoren auflösen und so sehen, dass man stattdessen auch einen der anderen beiden Vektoren aus B weglassen könnte. Um hier keine Wahl treffen zu müssen, nach welchem Vektor aufgelöst werden soll, schreibt man die obige Gleichung aber in der Regel als

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also als eine Linearkombination des Nullvektors aus den gegebenen Vektoren. Um Erzeugendensysteme ohne überflüssige Vektoren zu finden, sollten wir also fordern, dass sie keine solchen Linearkombinationen des Nullvektors zulassen. Solche Erzeugendensysteme bezeichnet man als *Basen*:

Definition 14.3 (Basen von Vektorräumen)**.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

(a) Die Familie B heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors gibt, in der mindestens ein λ_i ungleich 0 ist (man nennt dies auch eine *nichttriviale Linearkombination des Nullvektors*).

Ist das Gegenteil der Fall, folgt aus einer Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors mit zunächst beliebigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ also bereits, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gelten muss, so heißt B **linear unabhängig**.

(b) Die Familie B heißt eine **Basis** von V, wenn B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Bemerkung 14.4. Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

(a) Enthält B den Nullvektor, d. h. gilt $x_i = 0$ für ein i, so ist B in jedem Fall linear abhängig, denn dann ist ja $1 \cdot x_i = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

(b) Ebenso ist B immer linear abhängig, wenn die Familie einen Vektor mehrfach enthält, also wenn $x_i = x_j$ für gewisse $i \neq j$ gilt, da dann $1 \cdot x_i - 1 \cdot x_j = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors ist.

Beispiel 14.5.

(a) Das Erzeugendensystem $B = (e_1, \dots, e_n)$ der Einheitsvektoren von K^n aus Beispiel 14.2 (a) ist linear unabhängig, denn sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

so folgt daraus natürlich sofort $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Damit ist B also eine Basis von K^n; man nennt sie die **Standardbasis** von K^n.

Als Spezialfall davon für $n = 0$ ist die leere Familie eine Basis des Nullvektorraums (siehe Definition 13.5 (b)).

(b) Auch das Erzeugendensystem

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ aus Beispiel 14.2 (b) ist linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^2$: Sind nämlich $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{und} & \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \end{array}$$

so folgt aus diesem Gleichungssystem natürlich sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Neben der Standardbasis aus (a) haben wir damit also noch eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ gefunden und sehen damit schon, dass Basen von Vektorräumen nicht eindeutig bestimmt sind. Allerdings werden wir in Folgerung 14.14 noch zeigen, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums zumindest gleich viele Elemente haben. Dass unsere gerade gefundene Basis B genau wie die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aus zwei Vektoren besteht, ist also kein Zufall.

(c) Ebenfalls in $\mathbb{R}^2$ ist wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{wegen} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig, und damit auch keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Beachte aber, dass mit einer Rechnung analog zu (b) je zwei der drei Vektoren dieser Familie B stets linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit einer Familie kann also *nicht* überprüft werden, indem man immer nur zwei ihrer Vektoren miteinander vergleicht!

(d) Wir betrachten noch einmal den Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens n mit dem Erzeugendensystem $B = (x^0, \dots, x^n)$ der Potenzfunktionen aus Beispiel 14.2 (c). Da eine nicht-triviale Linearkombination dieser Potenzfunktionen nach dem Koeffizientenvergleich aus Lemma 3.22 nie die Nullfunktion sein kann, ist dieses Erzeugendensystem auch linear unabhängig, und damit eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 14.6. Untersuche die Familie B in den folgenden Fällen auf lineare Unabhängigkeit im Vektorraum V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

(b) V ein beliebiger Vektorraum; $B = (x+y, x+z, y+z)$ für drei linear unabhängige Vektoren x, y, z.

(c) $V = \text{Abb}(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$; $B = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ mit

$$\varphi_1 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x, \quad \varphi_2 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \varphi_3 \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 14.7. Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines Vektorraums V. Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige, dass die Familie $(y_1, \dots, y_n)$ dann ebenfalls eine Basis von V ist.

Oft ist die folgende äquivalente Umformulierung der Basiseigenschaft nützlich:

Lemma und Definition 14.8 (Alternatives Kriterium für Basen)**.** *Eine Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in einem Vektorraum V ist genau dann eine Basis von V, wenn es zu jedem Vektor $x \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.*

*In diesem Fall nennt man $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die **Koordinaten** von x bezüglich B.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen der behaupteten Äquivalenz:

„$\Rightarrow$“: Es sei B eine Basis von V. Da B dann ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Diese Koordinaten sind auch eindeutig bestimmt: Sind nämlich $\mu_1, \dots, \mu_n$ weitere Skalare mit $x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$, so gilt

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0,$$

und damit folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von B sofort $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

„$\Leftarrow$“: Ist jeder Vektor in V eine Linearkombination der Vektoren aus B, so bedeutet dies natürlich $\text{Lin}\, B = V$. Außerdem ist $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ nach Voraussetzung die einzige Möglichkeit, den Nullvektor als Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ zu schreiben. Damit ist B auch linear unabhängig. □

Bemerkung 14.9.

(a) Lemma 14.8 besagt anschaulich, dass wir einen Vektor in einem Vektorraum V bei gegebener Basis B genauso gut auch durch den Vektor in K^n seiner Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezüglich B beschreiben können. Wir werden dies in den Abschnitten 16.B und 16.C noch genau untersuchen.

(b) Um einen Vektor wie in (a) durch seine Koordinaten bezüglich einer Basis B beschreiben zu können, ist es wichtig, dass wir Basen als *Familien* und nicht als *Mengen* definiert haben, da die Elemente einer Menge keine vorgegebene Reihenfolge haben und wir somit bei einer Menge B keine Möglichkeit hätten, die Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eindeutig den Vektoren in B zuzuordnen.

(c) Die Komponenten eines Vektors $x \in K^n$ sind natürlich genau seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis aus Beispiel 14.5 (a). Auch ohne Erwähnung einer Basis werden wir sie daher in Zukunft oft einfach seine Koordinaten nennen.

Analog sind die Koeffizienten eines Polynoms in $\text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gerade seine Koordinaten bezüglich der Basis $(x^0, \dots, x^n)$ aus Beispiel 14.5 (d).

Wie können wir nun eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V finden? Gemäß der Idee in der Einleitung zu diesem Abschnitt sollten wir dazu mit einem Erzeugendensystem von V starten können, in dem wir dann fortlaufend Vektoren weglassen, die in nicht-trivialen Linearkombinationen des Nullvektors auftreten. Wir wollen jetzt zeigen, dass dieses Verfahren in der Tat immer funktioniert.

Satz 14.10 (Basisauswahl). *Aus jedem (endlichen) Erzeugendensystem eines Vektorraums V kann man eine Basis von V auswählen.*

Insbesondere besitzt also jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.

Beweis. Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Ist B bereits linear unabhängig, so sind wir natürlich schon fertig. Andernfalls gibt es nach Definition 14.3 (a) eine nicht-triviale Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors. Nach evtl. Umnummerieren der Vektoren von B können wir dabei annehmen, dass $\lambda_1 \neq 0$ gilt (also dass „x_1 in der Linearkombination vorkommt“). Wir lassen dann x_1 weg, setzen also $B' := (x_2,\dots,x_n)$, und behaupten, dass B' immer noch ein Erzeugendensystem von V ist.

In der Tat ist dies leicht einzusehen: Wegen der vorausgesetzten Linearkombination des Nullvektors und $\lambda_1 \neq 0$ ist ja

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot (-\lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n) \quad \in \operatorname{Lin} B'.$$

Damit enthält der Unterraum $\operatorname{Lin} B'$ alle Vektoren $x_1,\dots,x_n$, nach Lemma 13.11 (b) also auch den von diesen Vektoren erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Lin} B = V$. Es ist daher auch $\operatorname{Lin} B' = V$, d. h. B' ist immer noch ein Erzeugendensystem von V.

Wir wiederholen dieses Verfahren nun einfach rekursiv mit der neuen Familie B'. Da wir am Anfang
31 nur n Vektoren hatten, muss es nach spätestens n Schritten mit einer Basis von V abbrechen. □

Als Nächstes wollen wir verschiedene Basen eines Vektorraums miteinander vergleichen können, um zu sehen, dass sie alle gleich viele Elemente besitzen müssen. Wenn ihr jetzt denkt, dass diese Aussage doch „offensichtlich“ sei, habt ihr vermutlich schon einen anschaulichen Dimensionsbegriff im Kopf und meint, dass eine Basis eines „n-dimensionalen Vektorraums“ aus n Vektoren bestehen müsse, also z. B. eine Basis einer Geraden aus einem Vektor und eine Basis einer Ebene aus zwei Vektoren. Diese Anschauung wird sich natürlich auch gleich in Abschnitt 14.B als richtig herausstellen – aber dieser Dimensionsbegriff ist nicht Teil der Definition 13.1 eines Vektorraums, und daher sind derartige Aussagen in jedem Fall beweisbedürftig! Wir beginnen dazu mit einem Hilfsresultat, in dem wir zwei Basen miteinander vergleichen, die sich in nur einem Element unterscheiden.

Lemma 14.11 (Austauschlemma). *Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis eines Vektorraums V. Weiterhin sei $y \in V$ ein beliebiger Vektor, den wir natürlich als Linearkombination $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ schreiben können.*

Ist dann $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $B' := (x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$ eine Basis von V, d. h. wir können den Vektor x_i in der Basis durch y ersetzen.

Beweis. Nach evtl. Umbenennung der Vektoren können wir ohne Einschränkung wieder $i = 1$ annehmen, also $\lambda_1 \neq 0$ und $B' = (y,x_2,\dots,x_n)$. Wir zeigen, dass B' eine Basis von V ist:

(a) B' ist ein Erzeugendensystem von V: Analog zum Beweis von Satz 14.10 gilt

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \big(y - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n\big) \quad \in \operatorname{Lin} B'.$$

Also enthält $\operatorname{Lin} B'$ alle Vektoren $x_1,\dots,x_n$, und damit nach Lemma 13.11 (b) auch den davon erzeugen Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Lin} B = V$. Dies bedeutet genau, dass B' ein Erzeugendensystem von V ist.

(b) B' ist linear unabhängig: Es seien $\mu_1,\dots,\mu_n \in K$ mit $\mu_1 y + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n \\ &= (\mu_1\lambda_1)x_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)x_2 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)x_n. \end{aligned}$$

Dies ist nun eine Linearkombination des Nullvektors mit Vektoren aus B. Da B linear unabhängig ist, müssen darin alle Vorfaktoren verschwinden, d. h. es gilt $\mu_1\lambda_1 = 0$ (und damit $\mu_1 = 0$ wegen $\lambda_1 \neq 0$) und dann auch $\mu_1\lambda_i + \mu_i = \mu_i = 0$ für alle $i = 2,\dots,n$. Also ist B' linear unabhängig. □

Beispiel 14.12. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ aus Beispiel 14.5 (a). Weiterhin sei

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2.$$

Da in dieser Linearkombination die Vektoren e_1 und e_2 mit Vorfaktoren ungleich Null vorkommen, folgt aus dem Austauschlemma 14.11 also, dass wir einen dieser Vektoren in B durch y ersetzen können, d. h. dass auch (y, e_2, e_3) und (e_1, y, e_3) Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Im Gegensatz dazu ist (e_1, e_2, y) wegen der Linearkombination $e_1 + 2e_2 - y = 0$ linear abhängig, und somit keine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Der folgende Satz ergibt sich nun einfach, indem man Lemma 14.11 mehrmals nacheinander anwendet.

Satz 14.13 (Steinitzscher Austauschsatz). *Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis und $(y_1, \dots, y_r)$ eine linear unabhängige Familie in einem Vektorraum V.*

Dann ist $r \le n$, und $x_1, \dots, x_n$ lassen sich so umnummerieren, dass $B' = (y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ ebenfalls eine Basis von V ist (man kann in B also r der Vektoren $x_1, \dots, x_n$ durch die gegebenen Vektoren $y_1, \dots, y_r$ ersetzen).

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über r; für $r = 0$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschritt $r \to r+1$ sei nun $(y_1, \dots, y_{r+1})$ linear unabhängig. Da dann natürlich auch $(y_1, \dots, y_r)$ linear unabhängig ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung $r \le n$, und nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren in B ist $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ eine Basis von V. Wir können den Vektor y_{r+1} also als Linearkombination

$$y_{r+1} = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} + \cdots + \lambda_n x_n$$

schreiben. Dabei muss mindestens einer der Vorfaktoren $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ ungleich Null sein, denn andernfalls wäre

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r - y_{r+1} = 0$$

im Widerspruch dazu, dass die Familie $(y_1, \dots, y_{r+1})$ linear unabhängig ist. Insbesondere muss also $r + 1 \le n$ gelten, und nach evtl. Umbenennung von $x_{r+1}, \dots, x_n$ können wir annehmen, dass $\lambda_{r+1} \ne 0$ ist. Dann können wir aber nach dem Austauschlemma 14.11 den Vektor x_{r+1} in der Basis $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ durch y_{r+1} ersetzen, d. h. auch $(y_1, \dots, y_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ ist eine Basis von V. Damit ist der Satz mit Induktion bewiesen. □

Der Steinitzsche Austauschsatz hat zwei sehr wichtige Konsequenzen: zum einen die schon angekündigte Tatsache, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Elemente haben, und zum anderen ein „Gegenstück“ zur Basisauswahl in Satz 14.10.

Folgerung 14.14. *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente.*

Beweis. Es seien $(x_1, \dots, x_n)$ und $(y_1, \dots, y_r)$ zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums. Nach Satz 14.13 folgt dann direkt $r \le n$, und durch Vertauschen der Rollen der beiden Basen analog auch $n \le r$. Damit ist also wie behauptet $r = n$. □

Folgerung 14.15 (Basisergänzung). *Jede linear unabhängige Familie in einem endlich erzeugten Vektorraum V kann zu einer Basis ergänzt werden.*

Beweis. Es sei $(y_1, \dots, y_r)$ eine linear unabhängige Familie in V. Nach Satz 14.10 existiert ferner auch eine Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V. Die in Satz 14.13 konstruierte Familie B' ergänzt dann $(y_1, \dots, y_r)$ zu einer Basis von V. □

Aufgabe 14.16. Es sei $U = \mathrm{Lin}(x_1, x_2, x_3) \le \mathbb{R}^3$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis von U, und ergänze sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 14.17. In $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Familie $B = (1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+1)$.

Wähle aus B eine Basis von $\mathrm{Lin}\,B$ aus, und stelle die übrigen Elemente von B als Linearkombinationen dieser Basis dar.

14.B Die Dimension von Vektorräumen

Da wir jetzt gesehen haben, dass jeder endlich erzeugte Vektorraum nach Satz 14.10 eine Basis besitzt, und verschiedene Basen nach Folgerung 14.14 gleich viele Elemente haben, können wir nun wie erwartet den Dimensionsbegriff einführen:

Definition 14.18 (Dimension von Vektorräumen)**.** Für einen endlich erzeugten Vektorraum V ist die **Dimension**, geschrieben $\dim_K V$ oder einfach $\dim V$, definiert als die Anzahl der Elemente in einer (beliebigen) Basis von V.

Ist V nicht endlich erzeugt (und hat damit natürlich auch keine endliche Basis), so schreiben wir formal $\dim V = \infty$. Ein endlich erzeugter Vektorraum wird daher oft auch als **endlich-dimensionaler Vektorraum** bezeichnet.

Beispiel 14.19.

(a) Nach Beispiel 14.5 (a) ist $\dim K^n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Nach Beispiel 14.5 (d) hat $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Basis $(x^0, x^1, \dots, x^n)$, und damit Dimension $n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da der Raum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome dagegen nach Beispiel 14.2 (c) nicht endlich erzeugt ist, ist $\dim \mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$.

Unsere erste Anwendung des Dimensionsbegriffs ist ein vereinfachtes Kriterium dafür, ob eine gegebene Familie B eines endlich erzeugten Vektorraums V eine Basis ist: Wenn B die richtige Anzahl von Vektoren enthält, dann brauchen wir nicht mehr zu überprüfen, dass B ein Erzeugendensystem *und* linear unabhängig ist, sondern es reicht bereits *eine* dieser beiden Eigenschaften.

Folgerung 14.20 (Basiskriterium)**.** *Es sei B eine Familie von n Vektoren in einem endlich erzeugten Vektorraum V.*

(a) *Ist B ein Erzeugendensystem von V, so gilt $n \geq \dim V$.*

(b) *Ist B linear unabhängig, so gilt $n \leq \dim V$.*

Ist außerdem eine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt, so ist B genau dann eine Basis von V, wenn sogar $n = \dim V$ gilt.

Beweis. Dies folgt unmittelbar mit Hilfe der Basisauswahl und -ergänzung:

(a) Nach Satz 14.10 können wir aus B eine Basis B' von V auswählen. Da diese Basis B' dann aus $\dim V$ Vektoren besteht, muss natürlich $\dim V \leq n$ gelten.

(b) Nach Folgerung 14.15 können wir B zu einer Basis B' von V ergänzen. Da diese Basis wieder aus $\dim V$ Vektoren besteht, folgt $\dim V \geq n$.

In beiden Fällen gilt dabei natürlich genau dann $n = \dim V$, wenn bereits $B' = B$ ist, d. h. B schon eine Basis von V ist. □

Bemerkung 14.21.

(a) Ist B eine Familie von n Vektoren in einem Vektorraum V, so ist B natürlich ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Lin}\,B$. Nach Folgerung 14.20 (a) gilt dann also $\dim \mathrm{Lin}\,B \leq n$, mit Gleichheit genau dann, wenn B linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathrm{Lin}\,B$ ist.

Insbesondere ist also für jeden Vektor $x \in V \backslash \{0\}$ die Ursprungsgerade $\mathrm{Lin}(x) = \{\lambda x : \lambda \in K\}$ ein eindimensionaler Unterraum von V.

(b) Für die Anschauung ist auch oft die folgende Umformulierung von Folgerung 14.20 nützlich: Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, so haben wir dort gerade in Teil (a) gesehen, dass ein Erzeugendensystem von V immer mindestens n Vektoren enthält, und genau dann eine Basis von V ist, wenn es *genau* n Vektoren enthält. Da man größere Erzeugendensysteme mit Hilfe der Basisauswahl immer zu einer Basis verkleinern kann, bedeutet dies also: *Eine Basis ist dasselbe wie ein minimales Erzeugendensystem* – also eines, das nicht mehr weiter verkleinert werden kann.

Analog ergibt sich aus Folgerung 14.20 (b) zusammen mit der der Basisergänzung: *Eine Basis ist dasselbe wie eine maximale linear unabhängige Familie* – also eine, die durch Vergrößern in jedem Fall linear abhängig wird.

Als Nächstes wollen wir die Dimensionen von Unterräumen endlich erzeugter Vektorräume untersuchen, und dabei zunächst einmal zeigen, dass solche Unterräume auch selbst wieder endlich erzeugt sind. Dieses Resultat ist vermutlich nicht wirklich überraschend, aber dennoch auch nicht völlig offensichtlich, da es keine einfache Möglichkeit gibt, aus einem Erzeugendensystem eines Vektorraums ein Erzeugendensystem eines gegebenen Unterraums zu konstruieren.

Lemma 14.22. *Es sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten K-Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *U ist ebenfalls endlich erzeugt.*

(b) $\dim U \le \dim V$*, mit Gleichheit genau falls* $U = V$*.*

Beweis. Es sei $n := \dim V$.

(b) Angenommen, wir wissen bereits, dass U endlich erzeugt ist. Dann können wir nach Satz 14.10 eine Basis B von U mit $\dim U$ Elementen wählen. Da B dann auch in V linear unabhängig ist, bedeutet dies nach Folgerung 14.20 (b) aber $\dim U \le \dim V$, mit Gleichheit genau dann, wenn B schon eine Basis von V ist, also $U = V$ gilt.

(a) Wäre U nicht endlich erzeugt, so könnten wir der Reihe nach Vektoren $x_1,\dots,x_{n+1}$ in U wählen mit $x_{k+1} \notin U_k := \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_k)$ für alle $k = 0,\dots,n$, denn U_k ist endlich erzeugt und könnte damit nicht gleich U sein. Da die Vektorräume $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{n+1} \subset V$ alle endlich erzeugt sind, folgt daraus aber nach der schon gezeigten Aussage (b)

$$0 = \dim U_0 < \dim U_1 < \cdots < \dim U_{n+1} \le \dim V = n.$$

Dies ist ein Widerspruch, da es von 0 bis n keine $n+2$ natürlichen Zahlen gibt. □

Bemerkung 14.23 (Berechnung von Unterräumen)**.** Anders ausgedrückt besagt Lemma 14.22, dass jeder Unterraum U eines endlich erzeugten Vektorraums ein (endliches) Erzeugendensystem und damit nach Satz 14.10 auch eine Basis besitzt, also als $U = \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ für linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_n$ (mit $n = \dim U$) geschrieben werden kann. Wenn wir im Folgenden sagen, dass wir einen Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums *berechnen* wollen, meinen wir damit, ihn so darzustellen, also eine Basis (und damit auch seine Dimension) zu bestimmen.

Für unsere bisherigen Konstruktionen mit Unterräumen, also den Durchschnitt und die Summe aus Lemma 13.13, wollen wir nun Algorithmen (d. h. Verfahren) angeben, um sie in diesem Sinne zu berechnen. Die folgende allgemeine Dimensionsaussage ist dafür nützlich:

Satz 14.24 (Dimensionsformel für Durchschnitte und Summen)**.** *Sind U_1 und U_2 Unterräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V, so gilt*

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Beweis. Nach Lemma 14.22 sind alle betrachteten Unterräume endlich erzeugt. Wir können nach Satz 14.10 also eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $U_1 \cap U_2$ wählen und sie nach Folgerung 14.15 zu Basen

$$\begin{aligned} &(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \quad \text{von } U_1 \\ \text{und} \quad &(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_p) \quad \text{von } U_2 \end{aligned}$$

ergänzen. Wir zeigen, dass $B = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,z_1,\dots,z_p)$ dann eine Basis von $U_1 + U_2$ ist:

(a) B ist ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ nach Beispiel 13.14.

(b) B ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m, \nu_1, \dots, \nu_p \in K$ mit

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_p z_p = 0, \qquad (*)$$

also

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_m}_{\in U_1} = \underbrace{-\nu_1 z_1 - \dots - \nu_p z_p}_{\in U_2} \quad \in U_1 \cap U_2.$$

Da dieser Vektor in $U_1 \cap U_2$ liegt und $(x_1, \dots, x_n)$ diesen Unterraum erzeugt, gibt es also $\lambda_1', \dots, \lambda_n' \in K$ mit

$$-\nu_1 z_1 - \dots - \nu_p z_p = \lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_n' x_n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1' x_1 + \dots + \lambda_n' x_n + \nu_1 z_1 + \dots + \nu_p z_p = 0.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_p)$ folgt damit $\nu_1 = \dots = \nu_p = 0$. Setzen wir dies schließlich noch in $(*)$ ein, erhalten wir daraus mit der linearen Unabhängigkeit von $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$.

Also ist B eine Basis von $U_1 + U_2$. Damit folgt nun durch Abzählen der Elemente unserer Basen

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = (n + m + p) + n = (n + m) + (n + p) = \dim U_1 + \dim U_2. \qquad \square$$

Beispiel 14.25. Beachte, dass nur die Summe der Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ durch $\dim U_1$ und $\dim U_2$ bestimmt sind, nicht aber die Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ selbst. Als einfaches Beispiel hierfür seien U_1 und U_2 zwei Geraden (durch den Ursprung) in $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Ist $U_1 = U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = U_1 + U_2 = U_1 = U_2$, und die Dimensionsformel ergibt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = 1 + 1 = 1 + 1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(b) Ist hingegen $U_1 \neq U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$, und damit

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = 0 + 2 = 1 + 1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Algorithmus 14.26 (Berechnung von Durchschnitten und Summen)**.** Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines Vektorraums V, die wir nach Bemerkung 14.23 als $U_1 = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_k)$ und $U_2 = \operatorname{Lin}(y_1, \dots, y_l)$ schreiben können (wobei die gewählten Erzeuger hier nicht unbedingt linear unabhängig sein müssen). Als konkretes Beispiel betrachten wir dabei im Folgenden den Fall $V = \mathbb{R}^4$ und $k = l = 2$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4.$$

In diesem Fall sind die Familien (x_1, x_2) und (y_1, y_2) natürlich linear unabhängig, und damit ist $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$.

(a) Die Vektoren im Schnitt $U_1 \cap U_2$ erhält man offensichtlich durch Gleichsetzen

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = -\mu_1 y_1 - \dots - \mu_l y_l \qquad (1)$$

der Elemente von U_1 und U_2, und damit durch Auflösen der Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_l y_l = 0 \qquad (2)$$

nach $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l$ (die Vorzeichen spielen hierbei keine Rolle, da mit y auch $-y$ in U_2 liegt, und sind daher so gewählt, dass sie sich in (2) wegheben). Die sich als Lösung ergebenden Werte für $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ können dann in die linke Seite von (1) eingesetzt werden und liefern die gesuchten Vektoren im Schnitt $U_1 \cap U_2$.

Für unser konkretes Beispiel ist (2) das Gleichungssystem

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_1 &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_2 &= 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 &= 0. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich äquivalent zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu_1 = -\mu_2$ (die letzte Gleichung ist dann automatisch mit erfüllt) und hat damit die allgemeine Lösung $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = -\lambda$, $\mu_2 = -\lambda$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die linke Seite von (1) liefert also

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und damit insbesondere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.

(b) Für die Summe der gegebenen Unterräume U_1 und U_2 wissen wir aus Beispiel 13.14 bereits, dass $U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ gilt. Um eine Basis von $U_1 + U_2$ zu bestimmen, müssen wir aus diesen Vektoren also nur noch mit Satz 14.10 eine Basis auswählen.

Beachte, dass wir dazu in (a) (mit $\lambda = 1$) bereits die Linearkombination $x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = 0$ des Nullvektors berechnet haben, in der jeder der vier Ausgangsvektoren vorkommt. Nach dem Verfahren aus dem Beweis von Satz 14.10 können wir also einen beliebigen dieser Vektoren aus dem Erzeugendensystem streichen und erhalten so z. B. auch $U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}(x_1, x_2, y_1)$. Nach der Dimensionsformel aus Satz 14.24 ist aber auch

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) \overset{\text{(a)}}{=} 2 + 2 - 1 = 3,$$

und damit ist (x_1, x_2, y_1) nach Folgerung 14.20 eine Basis von $U_1 + U_2$. 32

Wir haben uns in diesem Kapitel jetzt ausführlich mit Basen endlich-dimensionaler Vektorräume beschäftigt. Da in der Praxis aber auch manchmal unendlich-dimensionale Vektorräume eine Rolle spielen, wollen wir nun zum Abschluss dieses Kapitels kurz diskutieren, welche Änderungen an unseren Konstruktionen in diesem Fall nötig sind und wie sie unsere Ergebnisse zu Basen beeinflussen.

Bemerkung 14.27 (Unendlich-dimensionale Vektorräume)**.** Ist V ein beliebiger Vektorraum, der also nicht unbedingt von endlich vielen Elementen erzeugt werden kann (wie z. B. $\operatorname{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ in Beispiel 14.2 (c) oder der noch größere Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus Beispiel 13.3 (c)), müssen wir zunächst einmal auch möglicherweise unendliche Familien von Vektoren in V betrachten. Eine solche Familie besteht aus einer evtl. unendlichen Indexmenge I zusammen mit einem Vektor x_i für alle $i \in I$; wir schreiben sie (analog zu Folgen in Definition 5.1 (a)) als $B = (x_i)_{i \in I}$. Im Fall einer endlichen Familie könnten wir dabei die Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wählen und wieder die bisherige Notation $B = (x_1, \dots, x_n)$ verwenden; im Fall der Indexmenge $I = \mathbb{N}$ könnten wir die Familie auch als $B = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ schreiben.

Wichtig ist jedoch, dass wir auch im Fall einer unendlichen Familie als Linearkombinationen daraus *keine unendlichen Summen* bilden können, da wir hierfür einen Konvergenzbegriff wie z. B. in Definition 7.1 bräuchten – der in der linearen Algebra (über einem beliebigen Grundkörper) aber nicht existiert. Für eine Familie $B = (x_i)_{i \in I}$ definiert man eine *Linearkombination* der Vektoren aus B daher als einen Vektor der Form

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \in V, \tag{$*$}$$

wobei $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$ gilt *und nur endlich viele dieser λ_i ungleich* 0 *sind* – so dass der Ausdruck $(*)$ nach Weglassen aller Summanden, die 0 sind, also in jedem Fall nur eine endliche Summe ist. Mit anderen Worten sind Linearkombinationen in der linearen Algebra also immer endlich.

Die darauf aufbauenden Definitionen sind nun wieder wie erwartet: Den Unterraum aller dieser Linearkombinationen bezeichnen wir mit $\operatorname{Lin} B$. Die Familie B heißt ein *Erzeugendensystem* von V, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, und *linear unabhängig*, wenn es keine nicht-triviale Linearkombination des

Nullvektors mit Vektoren aus B gibt. Ist B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V, so heißt B eine *Basis* von V. Hier sind zwei einfache Beispiele dafür:

(a) Die (unendliche) Familie aller Potenzfunktionen $(x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis des Polynomraums $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: Sie ist ein Erzeugendensystem, da jedes Polynom eine (endliche) Linearkombination dieser Potenzfunktionen ist, und linear unabhängig nach dem Koeffizientenvergleich wie in Beispiel 14.5 (d).

(b) Im Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen können wir die Familie $B = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller „Einheitsfolgen" $e_i = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ betrachten, wobei die 1 jeweils an der Stelle i steht. Wegen der Endlichkeitsbedingung für Linearkombinationen ist $\mathrm{Lin}\,B$ dann *nicht* der gesamte Raum aller Folgen, sondern nur die Menge aller Folgen, bei denen nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 sind. Dementsprechend ist B also auch kein Erzeugendensystem von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Die Familie B ist aber linear unabhängig, denn ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i = (0,0,0,\dots)$ (für eine gewisse Summe mit nur endlich vielen $\lambda_i \neq 0$), so folgt durch Vergleich des i-ten Folgengliedes natürlich sofort $\lambda_i = 0$ für alle i.

Dieses Beispiel (b) wirft nun natürlich die Frage auf, ob denn überhaupt eine Basis von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ existiert. In der Tat ist die Antwort auf diese Frage ja: Man kann zeigen, dass *jeder beliebige Vektorraum* in obigem Sinne eine Basis besitzt. Dass wir uns beim Beweis dieser Tatsache in dieser Vorlesung in Satz 14.10 auf den endlich erzeugten Fall beschränkt haben, liegt zum einen daran, dass er für Vektorräume mit unendlichen Basen deutlich komplizierter und abstrakter ist (siehe z. B. [GK] Proposition II.2.22). Zum anderen – und das ist fast der wichtigere Grund – ist der Beweis im allgemeinen Fall *nicht konstruktiv* und daher eigentlich nur von theoretischem Interesse. So weiß man also z. B., dass der Raum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Folgen eine Basis besitzt, aber niemand kann eine solche Basis konkret angeben! Versucht doch einmal, eine Basis dieses Vektorraums zu finden – ihr werdet sehr schnell merken, dass das aussichtslos ist. Zur Erinnerung: Ihr müsstet dazu eine (unendliche) Familie von Folgen hinschreiben, aus der sich nicht die Nullfolge kombinieren lässt, und so dass jede beliebige Folge eine (endliche) Linearkombination der Folgen ist, die ihr ausgewählt habt.

Aufgabe 14.28. In $\mathbb{R}^5$ seien

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

(b) Finde einen 2-dimensionalen Unterraum $U \leq \mathbb{R}^5$ mit $U + U_1 = \mathbb{R}^5$.

Aufgabe 14.29. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \{x \in K^n : x_1 = \dots = x_n\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in K^n : x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

von K^n, wobei $x_1,\dots,x_n$ die Koordinaten von x bezeichnen.

Bestimme Basen und die Dimensionen von U_1, U_2 und $U_1 + U_2$ in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 14.30.

(a) Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$.

Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

(b) Es seien $U_1,\dots,U_k$ Unterräume eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass

$$\dim(U_1 \cap \dots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim U_i - (k-1)\,n.$$

Aufgabe 14.31. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die sogenannte *Fibonacci-Folge*, die durch $a_0 = a_1 = 1$ sowie die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

gegeben ist, also die Folge $(1,1,2,3,5,8,13,21,\dots)$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n herleiten.

Es sei dazu $V \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Unterraum aller reellen Zahlenfolgen, die die Rekursionsgleichung $(*)$ erfüllen (ihr braucht nicht nachzuweisen, dass dies wirklich ein Unterraum ist, solltet euch aber trotzdem kurz überlegen, warum das so ist).

(a) Für welche $q \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,q,q^2,q^3,\dots)$ in V?

(b) Zeige, dass $\dim V = 2$ gilt, und bestimme eine Basis von V.

(c) Berechne mit (b) eine explizite nicht-rekursive Formel für die Glieder a_n der Fibonacci-Folge.

Aufgabe 14.32. Gib eine Basis des Vektorraums

$$V = \{(a_n)_n \in \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R}) : \text{es gibt ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_N = a_{N+1} = \dots\}$$

aller ab irgendeinem Glied konstanten reellen Zahlenfolgen an.