Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra

13. Vektorräume

Ausgehend von den elementaren Konzepten in den Kapiteln 1 bis 3 wollen wir in dieser Vorlesung zwei grundlegende Gebiete der Mathematik entwickeln: die Analysis und die lineare Algebra. Während sich dabei die eindimensionale Analysis in den Kapiteln 4 bis 12 hauptsächlich mit allgemeinen (in der Regel stetigen oder sogar differenzierbaren) Funktionen in einer reellen Variablen beschäftigt hat, wollen wir nun im folgenden Teil des Skripts zunächst unabhängig davon *lineare* Funktionen in *mehreren* Variablen studieren, wie sie in der Praxis z. B. in Form von linearen Gleichungssystemen auftreten. Später werden wir die erarbeiteten Resultate dann mit der Analysis kombinieren, um Funktionen in mehreren Variablen mit Hilfe von Ableitungen linear approximieren zu können.

In der Analysis arbeitet man ja hauptsächlich über den reellen Zahlen, und das ist in der linearen Algebra auch nicht viel anders. Allerdings haben wir in Kapitel 3 ja auch schon gesehen, dass viele Dinge auch über einem beliebigen Körper funktionieren. Die lineare Algebra verhält sich hier sehr „gutartig“: Da wir letztlich nur lineare Funktionen bzw. Gleichungen betrachten werden, benötigen wir gar nicht mehr Struktur der reellen Zahlen als die Körperaxiome. Wir können daher nahezu die gesamte lineare Algebra über einem beliebigen Grundkörper studieren, also z. B. auch über $\mathbb{Q}$, dem Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b), oder anderen Körpern, die ihr vielleicht inzwischen kennt. Wir vereinbaren daher:

Im Folgenden (bis zum Ende von Kapitel **??**) sei K immer ein fest gewählter Grundkörper.

Beim ersten Lesen könnt ihr euch K aber auch gerne einfach als $\mathbb{R}$ vorstellen.

13.A Der Vektorraumbegriff

Wie ihr ja sicher aus der Schule wisst, werden die Elemente von $\mathbb{R}^n$ in der Regel *Vektoren* genannt. Aber was genau ist im Allgemeinen eigentlich ein Vektor? Genau wie bei Gruppen und Körpern in Abschnitt 3.A werden Vektoren über die Operationen definiert, die man mit ihnen durchführen kann: In einer Gruppe gibt es *eine* Verknüpfung, die gewisse Eigenschaften erfüllt (siehe Definition 3.1), in einem Körper *zwei* Verknüpfungen „+“ und „·“ mit den erwarteten Eigenschaften (siehe Definition 3.5). Was sind nun die analogen definierenden Verknüpfungen und Eigenschaften für Vektoren? Wir wissen alle aus der Schule, dass man Vektoren addieren und „strecken“, also mit einer reellen Zahl (bzw. mit einer Zahl des gewählten Grundkörpers K) multiplizieren kann. Genau diese beiden Strukturen definieren einen allgemeinen Vektorraum:

Definition 13.1 (Vektorräume)**.** Ein **Vektorraum** über K (oder K-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &+\colon V\times V\to V \quad (\textit{Vektoraddition})\\ \text{und}\qquad &\cdot\,\colon K\times V\to V \quad (\textit{Skalarmultiplikation}) \end{aligned}$$

so dass gilt:

(a) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe (siehe Definition 3.1).

(b) (1. Distributivität) Für alle $\lambda,\mu\in K$ und $x\in V$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

(c) (2. Distributivität) Für alle $\lambda\in K$ und $x,y\in V$ gilt $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.

(d) (Assoziativität) Für alle $\lambda,\mu\in K$ und $x\in V$ gilt $(\lambda\cdot\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

(e) Für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$.

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**.

Bemerkung 13.2.

(a) Beachte, dass man einen Vektorraum nur dann definieren kann, wenn man vorher einen Körper K gewählt hat. Wenn klar ist, welcher Körper gemeint ist, werden wir jedoch auch oft nur von einem Vektorraum (statt einem K-Vektorraum) sprechen.

(b) In Definition 13.1 haben wir mehrfach die gleichen Symbole für unterschiedliche Dinge verwendet: Es gibt z. B. zwei Additionen, die wir beide mit „$+$“ bezeichnet haben, nämlich die Addition $+\colon K \times K \to K$ zweier Körperelemente und die Addition $+\colon V \times V \to V$ der Vektoren. Da man aus der Art der verknüpften Elemente eindeutig ablesen kann, um welche Verknüpfung es sich handeln muss, können dadurch aber keine Mehrdeutigkeiten entstehen: So werden z. B. beim ersten Pluszeichen in Definition 13.1 (b) zwei Skalare, beim zweiten jedoch zwei Vektoren addiert. Nur wenn wir auch in der Notation explizit deutlich machen wollen, um welche der beiden Verknüpfungen es sich handelt, schreiben wir diese als „$+_K$“ bzw. „$+_V$“. Analog gibt es auch die Multiplikation zweimal, einmal als Multiplikation „$\cdot_K$“ in K und einmal als Skalarmultiplikation „$\cdot_V$“, und auch zweimal die Null, nämlich einmal als Null 0_K im Körper K und einmal als *Nullvektor* 0_V, d. h. als das neutrale Element von $(V,+)$. In dieser ausführlichen Notation könnte man z. B. die Bedingung aus Definition 13.1 (b) als

$$(\lambda +_K \mu) \cdot_V x = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V x$$

schreiben. In der Regel werden wir diese Indizes K und V jedoch weglassen, genauso wie die Malzeichen sowohl für „$\cdot_K$“ als auch für „$\cdot_V$“.

Beispiel 13.3.

(a) Für jeden Körper K ist $V = \{0\}$ (mit den trivialen Verknüpfungen) ein K-Vektorraum, der sogenannte **Nullvektorraum**.

(b) Das mit Abstand wichtigste Beispiel ist für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$K^n := \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

aller „geordneten n-Tupel in K“ – d. h. ein Element von K^n wird dadurch angegeben, dass man n Elemente $x_1, \dots, x_n$ von K angibt (die nicht notwendig verschieden sein müssen und auf deren Reihenfolge es ankommt). Dass wir die Elemente $x_1, \dots, x_n$ dabei untereinander und nicht nebeneinander schreiben, ist momentan eine reine Konvention, die sich später bei der Einführung von Matrizen in Abschnitt 15.A als nützlich erweisen wird. Definiert man nun auf K^n die komponentenweisen Verknüpfungen

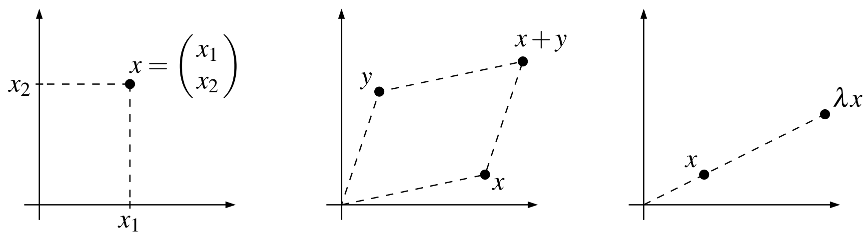
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in K$, so ist K^n mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum. In der Tat folgen die Vektorraumeigenschaften alle aus den Körpereigenschaften von K; wir zeigen hier exemplarisch Teil (b) der Definition 13.1: Für alle $\lambda, \mu, x_1, \dots, x_n \in K$ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu) x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen genau die Distributivität in K ist und die beiden anderen aus der Definition der Vektoraddition und Skalarmultiplikation in K^n folgen.

Im Fall $K=\mathbb{R}$ und $n=2$ ist $K^n=\mathbb{R}^2$ einfach die bekannte reelle Ebene, und Addition und Skalarmultiplikation können wie im folgenden Bild veranschaulicht werden. Die geometrische Interpretation im Fall von $\mathbb{R}^n$ für andere n ist natürlich analog.



Wenn wir im Folgenden vom Vektorraum K^n sprechen, werden wir diesen Raum immer als Vektorraum über dem Körper K mit diesen komponentenweisen Verknüpfungen betrachten (sofern wir nichts anderes angeben).

Im Fall $n=1$ erhält man $K^1=K$, also K selbst als K-Vektorraum; der Fall $n=0$ wird konventionsgemäß als der Nullvektorraum $K^0=\{0\}$ aufgefasst.

(c) Die axiomatische Herangehensweise an die Vektorraumtheorie hat den großen Vorteil, dass sie auch auf viele andere Fälle als K^n anwendbar ist. Als weiteres wichtiges Beispiel ist z. B. für eine beliebige Menge D

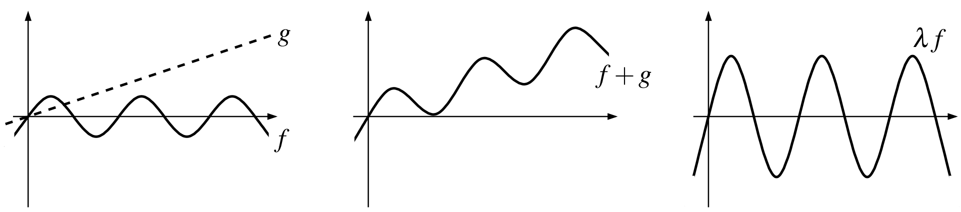
$$\mathrm{Abb}(D,K) := \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } K\}$$

ein K-Vektorraum, indem wir die Addition und Multiplikation solcher Abbildungen punktweise definieren als

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für alle $\lambda \in K$, $x \in D$ und $f,g\colon D \to K$ (also $f,g \in \mathrm{Abb}(D,K)$). In der Tat haben wir in Aufgabe 3.12 (a) bereits gesehen, dass $\mathrm{Abb}(D,K)$ eine abelsche Gruppe ist (der Nullvektor ist hierbei die Funktion, die jedes Element von D auf 0 abbildet, und das zu einer Funktion $f\colon D\to K$ additive Inverse die Funktion $-f\colon D\to K$, $x\mapsto -f(x)$). Die anderen Vektorraumeigenschaften zeigt man wieder analog.

Beachte, dass die anschauliche Bedeutung in diesem Beispiel trotz der gleichen algebraischen Eigenschaften aus Definition 13.1 eine ganz andere ist als in (b): Zeichnen wir z. B. wie im Bild unten Abbildungen $f,g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ als ihre Graphen in $\mathbb{R}^2$, so entsprechen Vektoraddition und Skalarmultiplikation der Addition bzw. Streckung der Funktionswerte auf der vertikalen Achse.



Ein wichtiger Spezialfall dieser Konstruktion ist der Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$, dessen Elemente $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$ wir als „unendliche Folgen" $(f(0),f(1),f(2),\dots)$ mit Elementen in K schreiben können. Im Fall $K=\mathbb{R}$ sind dies natürlich gerade die in der Analysis betrachteten reellen Zahlenfolgen aus Abschnitt 5.A.

Darüber hinaus lässt sich auf die gleiche Art auch die Menge $\mathrm{Abb}(D,W)$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge D in einen K-Vektorraum W zu einem Vektorraum machen.

(d) Sind V und W zwei K-Vektorräume, so ist (in Verallgemeinerung von (b)) auch ihr Produkt $V\times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum.

(e) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. In der Tat kann man reelle Zahlen addieren und mit einer rationalen multiplizieren, und es ist klar, dass mit diesen Definitionen alle Vektorraumeigenschaften erfüllt sind.

Wir sehen also schon, dass es ganz verschiedene Vektorräume gibt; in den nächsten Kapiteln werden wir auch noch viele weitere kennenlernen. Bei der Einführung neuer Konzepte der linearen Algebra ist es für die Anschauung aber vermutlich empfehlenswert, sich immer als Erstes den Fall des Vektorraums K^n mit $n \in \mathbb{N}$ vorzustellen.

Als Erstes wollen wir jetzt ein paar elementare Eigenschaften von Vektorräumen zeigen. Sie haben einen ähnlichen Charakter wie die Axiome in Definition 13.1, folgen aber bereits aus diesen (so dass man sie nicht separat als Axiome fordern muss).

Lemma 13.4 (Eigenschaften von Vektorräumen)**.** *In jedem K-Vektorraum V gilt für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$:*

(a) $0_K \cdot x = \lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(b) *Ist $\lambda \cdot x = 0_V$, so ist $\lambda = 0_K$ oder $x = 0_V$.*

(c) $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis.

(a) Der Beweis ist ganz analog zu dem von Lemma 3.8 (a): Wegen der 1. Distributivität aus Definition 13.1 (b) gilt $0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$, nach Subtraktion von $0_K \cdot x$ also wie behauptet $0_V = 0_K \cdot x$. Analog zeigt man $\lambda \cdot 0_V = 0_V$ mit Hilfe der 2. Distributivität.

(b) Ist $\lambda x = 0_V$ und $\lambda \neq 0_K$, so folgt

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) x \\ &= \lambda^{-1}(\lambda x) && \text{(Definition 13.1 (d))} \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)).} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x + x &= (-1) \cdot x + 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (-1+1) \cdot x && \text{(Definition 13.1 (b))} \\ &= 0_K \cdot x \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)),} \end{aligned}$$

also ist $(-1) \cdot x$ das additive Inverse zu x. □

Oft möchte man mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation nicht nur zwei, sondern mehrere Vektoren miteinander kombinieren. Um damit in Zukunft besser arbeiten zu können, führen wir hier schon einmal die folgenden Notationen ein.

Definition 13.5 (Familien und Linearkombinationen)**.** Es sei V ein Vektorraum.

(a) Eine (endliche) **Familie** von Vektoren in V ist gegeben durch n Vektoren $x_1, \dots, x_n \in V$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben eine solche Familie als $B = (x_1, \dots, x_n)$ und nennen die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ ihre **Elemente**.

(b) Sind $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so heißt

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \in V$$

eine **Linearkombination** der Vektoren aus B. Wir bezeichnen die Menge aller dieser Linearkombinationen mit

$$\operatorname{Lin} B := \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\} \quad \subset V.$$

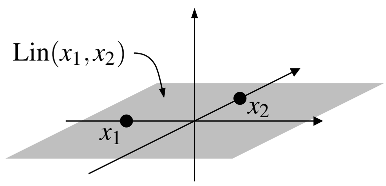
Im Fall $n = 0$ der leeren Familie fassen wir dies (im Sinne einer leeren Summe wie in Notation 3.9 (c)) als $\operatorname{Lin}() := \{0\}$ auf.

Bemerkung 13.6.

(a) Beachte, dass $x_1,\dots,x_n$ in Definition 13.5 im Gegensatz zu Beispiel 13.3 (b) Vektoren in V, und nicht die Komponenten *eines* Vektors in K^n sind. In der Tat ist diese Indexnotation in der Praxis für beide Bedeutungen üblich. Aus dem Zusammenhang ist aber immer offensichtlich, was gemeint ist, da $x_1,\dots,x_n$ in Beispiel 13.3 (b) ja Elemente des Grundkörpers K sind, hier jedoch Elemente des betrachteten Vektorraums V.

(b) Eine Familie $B=(x_1,\dots,x_n)$ ist etwas Ähnliches wie eine Menge $\{x_1,\dots,x_n\}$, allerdings haben ihre Elemente $x_1,\dots,x_n$ eine vorgegebene Reihenfolge und können in der Familie auch mehrfach auftreten. Für die Definition von $\operatorname{Lin} B$ ist dieser Unterschied noch irrelevant (wir hätten $\operatorname{Lin} B$ genauso gut auch für eine *Menge* B definieren können), später in Bemerkung 14.9 (b) bzw. Abschnitt 16.B wird er jedoch noch wichtig werden.

(c) Mit der geometrischen Interpretation der Vektoraddition und Skalarmultiplikation aus Beispiel 13.3 (b) kann man sich die Mengen $\operatorname{Lin} B$ auch anschaulich gut vorstellen: So ist z. B. $\operatorname{Lin}(x_1,x_2)\subset\mathbb{R}^3$ im Bild rechts die Ebene durch den Nullpunkt und die beiden Vektoren x_1 und x_2.



Aufgabe 13.7. Es sei V ein K-Vektorraum.

Wenn wir das Vektorraumaxiom (e) „$1\cdot x=x$ für alle $x\in V$“ in Definition 13.1 weglassen würden, könnten wir versuchen, für ein gegebenes $a\in K$ eine geänderte Skalarmultiplikation

$$\lambda\odot x:=\lambda a x \quad \text{für alle } \lambda\in K \text{ und } x\in V$$

zu definieren. Für welche a wäre K^n mit der gewöhnlichen Vektoraddition „$+$“ und dieser geänderten Skalarmultiplikation „$\odot$“ dann ein Vektorraum?

13.B Untervektorräume

Sehr viele weitere Beispiele von Vektorräumen können wir erhalten, indem wir in bereits bekannten Vektorräumen nach Teilmengen suchen, die mit der gegebenen Vektoraddition und Skalarmultiplikation selbst wieder die Axiome aus Definition 13.1 erfüllen. Solche Teilmengen werden als Untervektorräume bezeichnet.

Definition 13.8 (Untervektorräume)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Teilmenge $U\subset V$ heißt **Untervektorraum** oder **Unterraum** von V, in Zeichen $U\le V$, wenn gilt:

(a) $0\in U$.

(b) (Abgeschlossenheit bzgl. Vektoraddition) Für alle $x,y\in U$ ist $x+y\in U$.

(c) (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation) Für alle $x\in U$ und $\lambda\in K$ ist $\lambda x\in U$.

Bemerkung 13.9. Äquivalent zu Definition 13.8 kann man dort die Bedingung (a) auch durch die scheinbar schwächere Bedingung $U\neq\emptyset$ ersetzen: Ist nämlich U nicht leer, so gibt es ein Element $x\in U$, und nach (c) folgt dann mit Lemma 13.4 (a) auch $0=0\cdot x\in U$.

Die Abgeschlossenheit eines Unterraums bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation bedeutet gerade, dass sich diese beiden Verknüpfungen zu Verknüpfungen

$$+: U\times U\to U \qquad \text{und} \qquad \cdot: K\times U\to U$$

auf U einschränken lassen. Wie schon angekündigt wollen wir nun sehen, dass dies die Menge U selbst wieder zu einem Vektorraum macht.

Lemma 13.10. *Jeder Unterraum eines K-Vektorraums ist (mit den eingeschränkten Verknüpfungen) selbst wieder ein K-Vektorraum.*

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 13.1 für U nachweisen. Dazu beginnen wir mit (a) und zeigen zunächst, dass $(U,+)$ eine Gruppe ist.

- (Assoziativität der Vektoraddition) Weil V ein Vektorraum ist, gilt $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in V$ und damit erst recht für alle $x,y,z \in U$. Die Assoziativität der Addition überträgt sich also direkt von V auf U.
- (Additives neutrales Element) Nach Definition 13.8 (a) liegt der Nullvektor in U. Dieser erfüllt $x+0 = 0+x = x$ für alle $x \in V$ und damit auch für alle $x \in U$, und ist damit ein neutrales Element für die Addition in U.
- (Additive inverse Elemente) Für jedes $x \in U$ gilt nach Definition 13.8 (c) auch $(-1)\cdot x \in U$, und dies ist nach Lemma 13.4 (c) genau das additive inverse Element zu x.

Die übrigen Vektorraumeigenschaften sind alle von der Form, dass für alle Vektoren aus U eine bestimmte Gleichung gelten muss – und dies folgt nun genauso wie die Assoziativität oben sofort daraus, dass die betreffenden Gleichungen sogar für alle Vektoren aus V gelten. □

Das wichtigste Beispiel für Unterräume eines Vektorraums V sind wie im folgenden Lemma die Teilmengen der Form $\operatorname{Lin} B$ für eine Familie B in V wie in Definition 13.5. In der Tat ist $\operatorname{Lin} B$ sogar der kleinste Unterraum, der B enthält:

Lemma 13.11 (Erzeugte Unterräume)**.** *Für jede Familie $B = (x_1,\dots,x_n)$ in einem Vektorraum V gilt:*

(a) $\operatorname{Lin} B$ *ist ein Unterraum von V, der die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ enthält.*

(b) *Ist U ein beliebiger Unterraum von V, der die Vektoren $x_1,\dots,x_n$ enthält, so ist* $\operatorname{Lin} B \subset U$.

Anschaulich ist $\operatorname{Lin} B$ *also „der kleinste Unterraum von V, der B enthält". Man nennt ihn daher auch den von B* ***erzeugten*** *oder* ***aufgespannten Unterraum****.*

Beweis.

(a) Natürlich sind sowohl der Nullvektor als auch jedes x_i für $i \in \{1,\dots,n\}$ eine Linearkombination der Vektoren in $B = (x_1,\dots,x_n)$, denn es ist

$$0 = 0\cdot x_1 + \cdots + 0\cdot x_n \quad \text{und} \quad x_i = 0\cdot x_1 + \cdots + 1\cdot x_i + \cdots + 0\cdot x_n.$$

Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit von $\operatorname{Lin} B$ überprüfen. Dies ist aber sehr einfach: Sind

$$x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n \quad \text{und} \quad y = \nu_1 x_1 + \cdots + \nu_n x_n$$

(mit $\mu_1,\dots,\mu_n,\nu_1,\dots,\nu_n \in K$) zwei beliebige Vektoren in $\operatorname{Lin} B$, so gilt für alle $\lambda \in K$ auch

$$x+y = (\mu_1+\nu_1)x_1 + \cdots + (\mu_n+\nu_n)x_n \in \operatorname{Lin} B \quad \text{und} \quad \lambda x = (\lambda\mu_1)x_1 + \cdots + (\lambda\mu_n)x_n \in \operatorname{Lin} B.$$

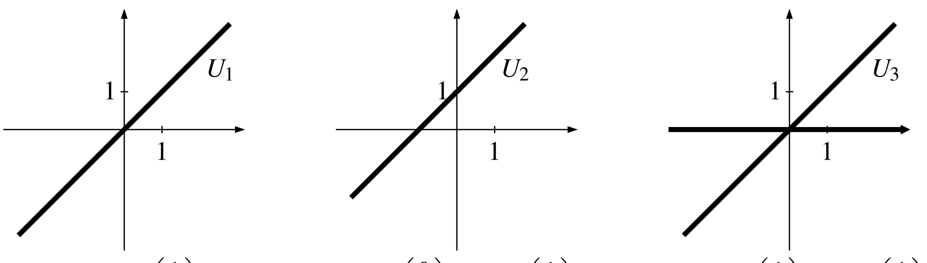
(b) Ist U ein solcher Unterraum, so enthält er wegen der Abgeschlossenheit mit $x_1,\dots,x_n$ auch alle Linearkombinationen dieser Vektoren, also die Menge $\operatorname{Lin} B$. □

Beispiel 13.12.

(a) Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ ist die von x aufgespannte Ursprungsgerade

$$\operatorname{Lin}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \subset \mathbb{R}^2$$

nach Lemma 13.11 ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ (und damit nach Lemma 13.10 auch ein Vektorraum). Damit gilt im folgenden Bild also $U_1 \le \mathbb{R}^2$.



$U_1 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $U_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $U_3 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \cup \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Dagegen ist die verschobene Ursprungsgerade U_2 nach Definition 13.8 (a) kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, da sie den Ursprung nicht enthält. Auch die Vereinigung U_3 von zwei Ursprungsgeraden ist kein Unterraum, denn sie ist bzgl. der Vektoraddition nicht abgeschlossen: Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_3.$$

(b) Für jeden Vektorraum V sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset V$ und der gesamte Raum $V \subset V$ natürlich stets Unterräume von V. Sie werden die **trivialen Unterräume** genannt.

(c) Für eine gegebene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge

$$\mathrm{Pol}(D,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{Abb}(D,\mathbb{R}) : f \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$$

aller Polynomfunktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$ aus Beispiel 13.3 (c), denn sie enthält die Nullfunktion, und mit f und g sind auch $f+g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Genauso ist für festes $n \in \mathbb{N}$ auch die Menge

$$\mathrm{Pol}_n(D,\mathbb{R}) := \{f \in \mathrm{Abb}(D,\mathbb{R}) : f \text{ ist eine Polynomfunktion vom Grad höchstens } n\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$. 30

Wir wollen nun sehen, wie man aus mehreren Unterräumen eines Vektorraums neue konstruieren kann. Eine Möglichkeit besteht dabei einfach darin, ihren Durchschnitt zu bilden. Im Gegensatz dazu ist ihre Vereinigung zwar in der Regel kein Unterraum (wie wir an der Menge U_3 in Beispiel 13.12 (a) gesehen haben); es gibt aber trotzdem eine Möglichkeit, aus ihnen einen neuen zu erzeugen, der sie enthält – die korrekte Konstruktion hierfür ist nur nicht die Vereinigung, sondern die sogenannte Summe von Unterräumen:

Lemma 13.13 (Durchschnitte und Summen von Unterräumen). *Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls ein Unterraum von V.*

(b) *Die **Summe** $U_1 + U_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ ist ebenfalls ein Unterraum von V.*

Analog gilt dies auch für Durchschnitte $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ und Summen $U_1 + \cdots + U_n$ von mehr als zwei Unterräumen.

Beweis. Wir überprüfen jeweils die Bedingungen aus Definition 13.8. Dabei ist natürlich klar, dass der Nullvektor sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt, und damit auch in $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit zeigen.

(a) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 \cap U_2$, also $x, y \in U_1$ und $x, y \in U_2$. Da U_1 und U_2 Unterräume sind, liegen damit sowohl $x + y$ als auch λx in U_1 und U_2, d. h. in $U_1 \cap U_2$.

(b) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 + U_2$, also $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in U_1$ und $x_2, y_2 \in U_2$. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von U_1 und U_2

$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2,$$

und analog auch

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2. \qquad \square$$

Beispiel 13.14 (Summen von erzeugten Unterräumen). Sind zwei Unterräume eines Vektorraums V durch erzeugende Vektoren gegeben als

$$U_1 = \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_k) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_l),$$

so ist nach Definition der Summe natürlich

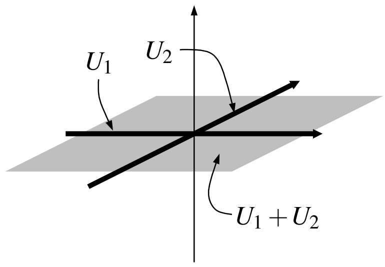
$$U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l).$$

Als konkretes Beispiel ist für die Unterräume

$$U_1 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ ihr Durchschnitt gleich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und ihre Summe wie im Bild rechts dargestellt die Ebene

$$U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$



Aufgabe 13.15. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$ (wobei x_1, x_2, x_3 die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen)?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix}-a\\0\\b-a\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$;

(b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + a x_3 = 1 - a\}$ für ein festes, gegebenes $a \in \mathbb{R}$;

(c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 = x_2^3 = x_3^3\}$;

(d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 13.16. Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

Aufgabe 13.17. Im Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien

$$\begin{aligned} & U_1 = \{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad & U_2 = \{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von V.

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = V$.