

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 13

Lösungshinweise

- (1) (a) Berechne $\text{vol}(D)$ für das Tetraeder D , das von den drei Koordinatenebenen und der durch die Gleichung $x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2$ beschriebenen Ebene in \mathbb{R}^3 begrenzt wird.
- (b) Berechne das Integral $\int_D |y| \cdot \cos x d(x, y)$, wobei D die durch die Gleichung $4x^2 + y^2 \leq 4$ gegebene Ellipse in \mathbb{R}^2 ist.

Lösung: (a) Wir können D als Normalbereich schreiben als

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1, 0 \leq x_3 \leq 2 - 2x_1 - 2x_2\}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{2-2x_1-2x_2} 1 dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} (2 - 2x_1 - 2x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 [2x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2]_{x_2=0}^{1-x_1} dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1^2 - 2x_1 + 1) dx_1 \\ &= \int_0^1 (x_1 - 1)^2 dx_1 \\ &= \left[\frac{1}{3}(x_1 - 1)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben D als Normalbereich als

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -2\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_D |y| \cdot \cos(x) d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} |y| \cdot \cos(x) dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} y \cdot \cos(x) dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \cos(x) \cdot 4(1-x^2) dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \cos(x) dx - 4 \int_{-1}^1 x^2 \cos(x) dx \\ &= [4 \sin(x)]_{-1}^1 - 4 [(x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x)]_{-1}^1 \\ &= 16(\sin(1) - \cos(1)). \end{aligned}$$

- (2) (a) Zeige, dass $A \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ für eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.
- (b) Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beschränkte stetige Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in D, f(x) \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von f und g messbar ist mit $\text{vol}(M) = \int_D (g(x) - f(x)) dx$.

- Lösung: (a) Da A beschränkt ist, existiert ein Quader $Q \subset \mathbb{R}^m$ mit $A \subset Q$. Sei $\varepsilon > 0$. Da N eine Nullmenge ist, existieren Quader $P_1, \dots, P_k \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$N \subset \bigcup_{i=1}^k P_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \text{vol}(P_i) < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(Q)}.$$

Dann gilt für die Quader $Q \times P_1, \dots, Q \times P_k \subset \mathbb{R}^{m+n}$

$$A \times N \subset \bigcup_{i=1}^k (Q \times P_i)$$

und

$$\sum_{i=1}^k \text{vol}(Q \times P_i) = \sum_{i=1}^k \text{vol}(Q) \cdot \text{vol}(P_i) = \text{vol}(Q) \cdot \sum_{i=1}^k \text{vol}(P_i) < \varepsilon.$$

- (b) Da f beschränkt ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq f(x) \leq b$ für alle $x \in D$. Der Rand ∂M von M ist nun enthalten in der Menge $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2$ mit

$$\begin{aligned} N_0 &= \partial D \times [a, b], \\ N_1 &= \{(x, f(x)) : x \in D\}, \\ N_2 &= \{(x, g(x)) : x \in D\}, \end{aligned}$$

denn für jeden Punkt $(x, y) \notin N$ ist einer der folgenden Fälle erfüllt:

- $y > b$ oder $y < a$: In diesem Fall liegen in einer kleinen Umgebung von (x, y) keine Punkte von M , und damit ist $(x, y) \notin \partial M$.
- $x \in \overset{\circ}{D}$ und $f(x) < y < g(x)$: In diesem Fall liegen in einer kleinen Umgebung von (x, y) nur Punkte von M , und damit ist $(x, y) \notin \partial M$.
- $x \in \overset{\circ}{D}$, und $y < f(x)$ oder $y > g(x)$: Dann sind in einer kleinen Umgebung von (x, y) wieder keine Punkte von M , also wieder $(x, y) \notin \partial M$.
- $x \in (\mathbb{R}^n \setminus D)^\circ$: Dann gibt es in einer kleinen Umgebung von x keine Punkte von D , und damit in einer kleinen Umgebung von (x, y) keine Punkte von M , d. h. es ist $(x, y) \notin \partial M$.

Da D messbar ist, ist aber ∂D eine Nullmenge, also auch N_0 nach Aufgabenteil (a). Auch N_1 und N_2 sind Nullmengen als Graphen stetiger Funktionen. Damit ist N , also auch ∂M , eine Nullmenge, d. h. M ist messbar.

Die Formel für das Volumen ergibt sich damit aus Fubini:

$$\text{vol} M = \int_M 1 d(x, y) = \int_D \int_{f(x)}^{g(x)} 1 dy dx = \int_D (g(x) - f(x)) dx.$$

(3) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2} dx$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ konvergiert.

Lösung: Aufgrund der Äquivalenz aller Normen auf \mathbb{R}^n gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass $\|x\|_2 \geq a\|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Da die Funktion $x \mapsto e^x$ monoton steigend ist, gilt damit $e^{-\|x\|_2} \leq e^{-a\|x\|_1} = e^{-a(|x_1| + \dots + |x_n|)} =: g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten nun die \mathbb{R}^n ausschöpfende Folge $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $D_k = [-k, k]^n$. Nach Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{D_k} f(x) dx &\leq \int_{[-k, k]^n} g(x) dx \\ &= \int_{-k}^k e^{-a|x_1|} dx_1 \cdot \dots \cdot \int_{-k}^k e^{-a|x_n|} dx_n \\ &= \left(2 \int_0^k e^{-ax} dx \right)^n \\ &= 2^n \left(\left[\frac{1}{-a} e^{-ax} \right]_0^k \right)^n \\ &= \left(\frac{2}{a} \right)^n (1 - e^{-k})^n \\ &\leq \left(\frac{2}{a} \right)^n. \end{aligned}$$

Die Folge der Integrale $\int_{D_k} f(x) dx$ ist also beschränkt und damit konvergent. Nach Definition bedeutet dies, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ konvergiert.