Andreas Gathmann und Julia Amann Wintersemester 2022/23

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 8

Abgabe: Mittwoch, 4. Januar

(1) (a) Untersuche, ob die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden können:

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto {x_1}^{x_2}.$$

(b) Es seien A und B zwei Teilmengen eines metrischen Raumes. Zeige die Inklusion $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$, und dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

(2) Man zeige:

(a) Sind M ein metrischer Raum und $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\max(f,g)\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(f(x),g(x))$ stetig.

(b) Die Abbildung $f\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ ist stetig, und Bilder offener Mengen unter f sind wieder offen.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die Menge $\mathrm{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen kompakt in $\mathrm{Mat}(n\times n,\mathbb{R})$.

(3) Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung mit $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ für alle $x,y \in M$ mit $x \neq y$. Man zeige:

(a) Ist M kompakt, so hat f genau einen Fixpunkt.

(b) Ist M nicht notwendig kompakt, so muss f im Allgemeinen keinen Fixpunkt haben.

(4) Zu einem gegebenen metrischen Raum M sei $\mathscr{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von M. Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad d(a,B) := \min\{d(a,b) : b \in B\}$,

für $A,B \in \mathscr{K}(M)$ sei $\quad h(A,B) := \max(\max\{d(a,B) : a \in A\}, \max\{d(b,A) : b \in B\})$.

Man zeige:

(a) Die oben angegebenen Minima und Maxima existieren.

(b) h ist eine Metrik auf $\mathscr{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)

(c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathscr{K}(M)$.

Das Team der Grundlagen der Mathematik 2
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!