Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 7

Abgabe: Mittwoch, 14. Dezember

(1) (a) Zeige durch direkten Rückgang auf die Definition, dass die Menge $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 + 1\}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Es seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Mengen. Zeige, dass dann auch $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist.

(c) Im normierten Raum $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit der Frobenius-Norm aus Aufgabe 3 von Blatt 6 sei M_n die Menge aller diagonalisierbaren Matrizen. Zeige, dass M_n für $n \geq 2$ weder offen noch abgeschlossen ist.

(2) Es seien A und K zwei Teilmengen eines metrischen Raumes M. Man zeige:

(a) Ist A abgeschlossen und K folgenkompakt, so ist auch $K \cap A$ folgenkompakt.

(b) Ist A abgeschlossen und K überdeckungskompakt, so ist auch $K \cap A$ überdeckungskompakt.

(Die in der Vorlesung angegebene, aber nicht bewiesene Äquivalenz zwischen Folgen- und Überdeckungskompaktheit in metrischen Räumen darf hierbei natürlich nicht verwendet werden.)

(3) In einem metrischen Raum M betrachten wir zu einem Punkt $a \in M$ und einem Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ die offene Kugel $U_r(a) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$. Man zeige:

(a) Für den Rand dieser Kugel gilt $\partial U_r(a) \subset \{x \in M : d(x,a) = r\}$.

(b) In einem normierten Raum gilt in (a) wie erwartet sogar die Gleichheit, in einem beliebigen metrischen Raum jedoch im Allgemeinen nicht.

(4) Es sei $V = C^0([0,1])$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige:

(a) $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) $(V, \|\cdot\|_2)$ ist kein Banachraum.