Andreas Gathmann und Julia Amann Wintersemester 2022/23

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 7. Dezember

(1) Die symmetrische reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte 3 und 12.

(a) Berechne eine orthogonale Matrix T, so dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Finde mit einer Hauptachsentransformation die Punkte des Ellipsoids $\{x \in \mathbb{R}^3 : x^\mathsf{T} A x = 3\}$, die vom Ursprung (bezüglich des Standardskalarprodukts) den kleinsten Abstand haben.

(2) (a) Zeige mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, dass es zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B$$

gilt und AB sowie BA symmetrisch sind.
(Ist A quadratisch und invertierbar, so ist dann offensichtlich $B = A^{-1}$. Für eine allgemeine Matrix A, die nicht notwendig quadratisch ist bzw. vollen Rang hat, nennt man B daher die *pseudoinverse Matrix* zu A.)

(b) Berechne für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Singulärwertzerlegung und die pseudoinverse Matrix wie in (a).

(3) Zu einer Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ mit $A \neq 0$ bezeichne $\sigma_A \in \mathbb{R}_{>0}$ ihren größten Singulärwert. Man zeige:

(a) $\sigma_A = \max \left\{ \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \right\}$.

(b) $\sigma_A \leq \|A\|$, wobei $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$ die Norm ist, die der euklidischen Norm auf $\mathbb{K}^{mn}$ entspricht (man nennt dies auch die *Frobenius-Norm* auf $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$).
Für welche Matrizen gilt hierbei die Gleichheit?

(4) Es sei $\|\cdot\|$ noch einmal die Frobenius-Norm von Matrizen aus Aufgabe 3. Man zeige:

(a) Für alle $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, \mathbb{K})$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

(b) Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ mit $\|A\| < 1$, so ist $E - A$ invertierbar, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1}$.