Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 30. November

(1) Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Für welche λ ist A positiv definit? Für welche λ ist A negativ definit?

(b) Wir betrachten nun $V = \mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Skalarprodukt b_A für $\lambda = 1$. Berechne zu $U = \mathrm{Lin}(e_1) \le V$ eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $U^\perp$.

(2) Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Raum. Man zeige:

(a) Ist $v \in V$ mit $\|v\| = 1$, so ist $f\colon V \to V,\ x \mapsto x - 2\langle v, x\rangle v$ eine unitäre Abbildung. Berechne auch das charakteristische Polynom χ_f.

(b) Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$, so ist f unitär.

(c) Ist $f\colon V \to V$ normal und sind alle Eigenwerte von f reell, so ist f selbstadjungiert.

(3) Man zeige:

(a) Ist $A \in \mathrm{O}(3)$, so gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(3)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $A \in \mathrm{O}(4)$, so gibt es im Allgemeinen *kein* $\varphi \in \mathbb{R}$ und $T \in \mathrm{O}(4)$ mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Was bedeutet das Ergebnis geometrisch?
(Hinweis: Untersuche, ob A einen Eigenwert besitzen muss.)

(4) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Man zeige:

(a) Ist A positiv semidefinit, so gibt es eine eindeutig bestimmte symmetrische positiv semidefinite Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$. Man nennt sie die *Wurzel* aus A.

(b) Ist A nicht positiv semidefinit, so kann es zwar eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $B^2 = A$ geben, aber keine symmetrische.