Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 23. November

(1) Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n. Für $f,g \in V$ setzen wir $\langle f,g\rangle := \sum_{i=0}^{m} f(i)\,g(i)$.

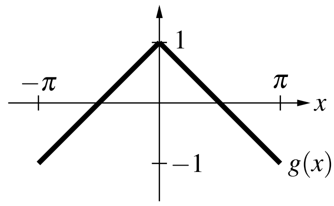
(a) Für welche m und n ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V?

(b) Berechne im Fall $m = n = 2$ eine Orthonormalbasis dieses Skalarprodukts.

(2) Es sei $V = C^0([-\pi,\pi])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ mit dem üblichen Skalarprodukt $\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Wir betrachten darin das Element $g \in V$ definiert durch $g(x) := 1 - \frac{2}{\pi}|x|$.
Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ seien weiterhin $f_n \in V$ mit $f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx$, und $U_n := \operatorname{Lin}(f_1,\dots,f_n) \le V$.

(a) Zeige, dass $(f_1,\dots,f_n)$ für alle n eine Orthonormalbasis von U_n ist.

(b) Berechne für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die orthogonale Projektion g_n von g auf U_n (also die Funktion in U_n, die von g den kleinsten Abstand hat, d. h. sie am besten approximiert).



Wer Lust hat, kann die Funktionen g_n ja für kleine n einmal von einem Computer zeichnen lassen und mit der ursprünglichen Funktion g vergleichen.

(3) Zu einer symmetrischen Bilinearform b auf einem reellen Vektorraum V sei $U_b = \{x \in V : b(x,x) = 0\}$.

(a) Zeige anhand eines Beispiels in $V = \mathbb{R}^2$, dass U_b im Allgemeinen kein Unterraum von V ist.

(b) Man zeige: Ist b jedoch positiv semidefinit, so ist U_b ein Unterraum, und $\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) := b(x,y)$ ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf V/U_b.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $U_b = \{x \in V : b(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$.

(4) Zu einem K-Vektorraum V heißt $V^* := \operatorname{Hom}(V,K)$ sein *Dualraum*.
Es sei nun V ein euklidischer Vektorraum. Man zeige:

(a) Die Abbildung

$$\Phi\colon V \to V^*,\ x \mapsto \varphi_x \qquad \text{mit } \varphi_x(y) := \langle x,y\rangle$$

ist linear und injektiv.

(b) Ist V endlich-dimensional, so ist die Abbildung Φ aus (a) sogar ein Isomorphismus.

(c) Ist $V = C^0([0,1])$ der Raum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, so ist die Auswerteabbildung am Nullpunkt

$$\varphi\colon V \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi(f) = f(0)$$

ein Element von V^*, das nicht im Bild von Φ liegt. In diesem Fall ist die Abbildung Φ aus (a) also nicht surjektiv und damit kein Isomorphismus.