

Grundlagen der Mathematik 2 – Blatt 13

(keine Abgabe)

Dieses Blatt behandelt Stoff, der nur noch für die Nachklausur und die Prüfungen relevant ist. Wir werden die Lösungen kurz nach der Ausgabe des Blatts im OLAT-Kurs veröffentlichen.

- (1) (a) Berechne $\text{vol}(D)$ für das Tetraeder D , das von den drei Koordinatenebenen und der durch die Gleichung $x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2$ beschriebenen Ebene in \mathbb{R}^3 begrenzt wird.
- (b) Berechne das Integral $\int_D |y| \cdot \cos x d(x, y)$, wobei D die durch die Gleichung $4x^2 + y^2 \leq 4$ gegebene Ellipse in \mathbb{R}^2 ist.
- (2) (a) Zeige, dass $A \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ für eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ und eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ wieder eine Nullmenge ist.
- (b) Es seien $D \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beschränkte stetige Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in D, f(x) \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zwischen den Graphen von f und g messbar ist mit $\text{vol}(M) = \int_D (g(x) - f(x)) dx$.

- (3) Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ konvergiert.