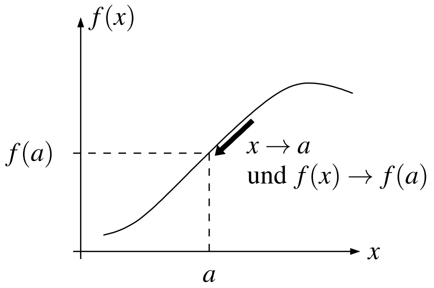
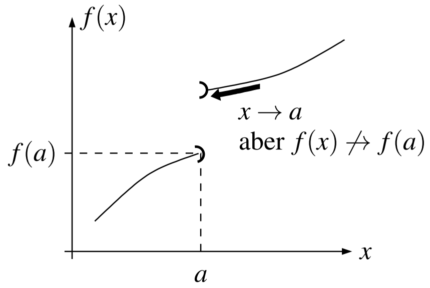
8. Stetigkeit

Nachdem wir uns gerade ausführlich mit Grenzwerten von Folgen und Reihen befasst haben, wollen wir den Grenzwertbegriff nun auf Funktionen einer reellen (oder evtl. komplexen) Variablen ausdehnen, also auf Funktionen $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{K}$. Dies führt zum zentralen Begriff der Stetigkeit solcher Funktionen.

Anschaulich ist die Frage dabei: Wenn eine Stelle $a \in D$ mit Funktionswert $f(a)$ gegeben ist, und wir nun andere Punkte $x \in D$ in der Nähe von a betrachten, liegt dann auch $f(x)$ in der Nähe von $f(a)$? Im Bild unten links ist dies der Fall: Laufen wir entlang des dick eingezeichneten Pfeils mit x auf den Punkt a zu, so nähern sich auch die Funktionswerte $f(x)$ dem Punkt $f(a)$. In diesem Fall werden wir sagen, dass f im Punkt a stetig ist.



f ist stetig in a



f ist nicht stetig in a

Im Bild oben rechts dagegen führt der Sprung im Funktionsgraphen zu einem anderen Verhalten: Nähern wir uns hier entlang des dick eingezeichneten Pfeils mit x dem Punkt a, so nähert sich $f(x)$ nicht dem Wert $f(a)$, sondern dem oberen Punkt der Sprungstelle. In diesem Fall ist f im Punkt a unstetig.

Um dies mathematisch exakt zu formulieren, wollen wir jetzt den Begriff von Funktionsgrenzwerten einführen. Im linken Fall können wir dann sagen, dass $f(x)$ mit $x \to a$ gegen $f(a)$ konvergiert, während dies im Fall rechts nicht so ist.

8.A Grenzwerte von Funktionen

Wie eben erläutert wollen wir das Verhalten von Funktionen $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ untersuchen, wenn wir uns einem vorgegebenen Punkt a nähern. Dieser Wert a kann dabei, muss aber nicht unbedingt selbst Element von D sein. Wir sollten aber natürlich sicherstellen, dass wir uns zumindest innerhalb von D dem Punkt a beliebig annähern können — also anschaulich gesprochen, dass a entweder in D oder am Rand von D liegt. Formal bedeutet dies, dass a im Sinne der folgenden Definition ein Berührpunkt von D sein muss.

Definition 8.1 (Berührpunkte). Es sei $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge. Eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ heißt **Berührpunkt** von D, wenn jede ε-Umgebung von a (siehe Bemerkung 5.2) mindestens einen Punkt aus D enthält, also wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in D$ gibt mit $|x-a| < \varepsilon$. Die Menge aller Berührpunkte von D wird mit $\overline{D}$ bezeichnet und heißt der **Abschluss** von D.

Beispiel 8.2.

(a) Für ein $D \subset \mathbb{K}$ ist jedes $a \in D$ Berührpunkt von D: Wir können in diesem Fall in der Definition 8.1 einfach $x = a$ für jedes ε wählen. Es gilt also stets $D \subset \overline{D}$.

(b) Für ein offenes reelles Intervall $D = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ist $\overline{D} = [a,b]$ das zugehörige abgeschlossene Intervall. Die Randpunkte a und b sind also Berührpunkte von D, die nicht selbst zu D gehören.

Für derartige Berührpunkte können wir nun Grenzwerte von Funktionen definieren. Die Konstruktion ist völlig analog zur Definition 5.1 (b) des Grenzwerts von Folgen:

Definition 8.3 (Grenzwerte von Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Ferner sei $a \in \overline{D}$ ein Berührpunkt von D.

Dann heißt eine Zahl $c \in \mathbb{K}$ **Grenzwert** von f in a, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Wie schon im Fall von Folgen werden wir sehen (siehe Bemerkung 8.12), dass ein solcher Grenzwert im Fall der Existenz eindeutig ist, so dass wir also von *dem* Grenzwert von f in a sprechen können. Wir schreiben dies dann als

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in D}} f(x) = c$$

oder auch als „$f(x) \to c$ für $x \to a$“, und sagen, dass f in a gegen c **konvergiert**. Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt f **divergent** in a.

Bemerkung 8.4. Gilt in Definition 8.3 sogar $a \in D$, so kommt als Grenzwert c nur $f(a)$ in Frage: Wir können dann nämlich $x = a$ in der Grenzwertbedingung von Definition 8.3 setzen (so dass $|x-a| < \delta$ in jedem Fall erfüllt ist) und erhalten damit $|f(a) - c| < \varepsilon$ für alle ε — was nur möglich ist, wenn $c = f(a)$ ist.

Definition 8.5 (Stetigkeit)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ eine Menge und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

(a) Ist $a \in D$, so heißt f **stetig** in a, wenn der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert (und nach Bemerkung 8.4 damit zwangsläufig gleich $f(a)$ ist), d. h. wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

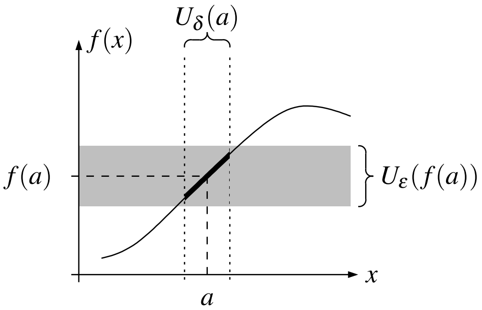
Die Funktion f heißt **stetig** (auf D), wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

(b) Ist $a \in \overline{D} \backslash D$, so heißt f **stetig fortsetzbar** nach a, wenn der Grenzwert $c = \lim_{x \to a} f(x)$ existiert. (In diesem Fall erhält man nämlich eine in a stetige Funktion

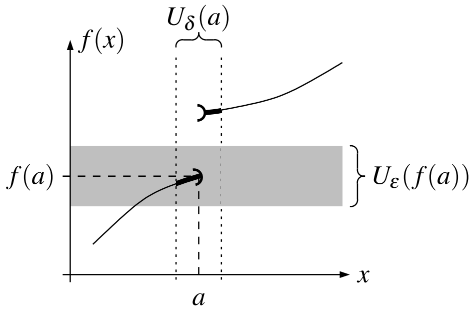
$$\tilde{f}\colon D \cup \{a\} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ c & \text{für } x = a, \end{cases}$$

die man als stetige Fortsetzung von f nach a bezeichnet.)

Bemerkung 8.6. Das Bild unten zeigt noch einmal das Beispiel vom Anfang dieses Kapitels mit den eben eingeführten Notationen: Nach Definition ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ genau dann stetig in einem Punkt $a \in D$, wenn es zu jeder (beliebig kleinen) ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(a))$ von $f(a)$ eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a gibt, in der alle Punkte von D nach $U_\varepsilon(f(a))$ abgebildet werden. Im Bild unten bedeutet dies, dass zu jedem auch noch so schmal gewählten grauen horizontalen Streifen um $f(a)$ eine Einschränkung von f auf eine hinreichend kleine Umgebung von a dazu führt, dass alle Funktionswerte dort (im Bild unten dick eingezeichnet) in dem gewählten Streifen liegen. Dies entspricht genau der ursprünglichen Motivation, dass eine kleine Änderung von x um a herum auch nur zu einer kleinen Änderung der Funktionswerte $f(x)$ um $f(a)$ führen darf. Bei der linken Funktion ist dies also der Fall, bei der rechten aufgrund der Sprungstelle jedoch nicht.



f ist stetig in a



f ist nicht stetig in a

Die ebenfalls oft gehörte geometrische Interpretation, dass eine reelle Funktion stetig ist, wenn man „ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen", ist übrigens etwas mit Vorsicht zu genießen, wie die Beispiele 8.7 (e) und (f) unten zeigen.

Beispiel 8.7.

(a) Die Identität $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto x$ ist stetig: Sind $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so setze man $\delta := \varepsilon$. Dann gilt natürlich für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < \delta$, dass $|f(x)-f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon$. Genauso zeigt man, dass konstante Funktionen stetig sind.

(b) Wir zeigen, dass die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto |x|$ stetig ist. Es seien dazu $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen wieder $\delta := \varepsilon$. Dann folgt für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < \delta$ mit Hilfe der Dreiecksungleichung nach unten

$$|x-a| \geq |x| - |a| \quad \text{und} \quad |x-a| \geq |a| - |x|.$$

Da $|f(x)-f(a)| = \big||x|-|a|\big|$ aber eine der beiden Zahlen $|x|-|a|$ und $|a|-|x|$ sein muss, ergibt sich in jedem Fall

$$|f(x)-f(a)| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

Damit ist f stetig.

(c) Analog ist die komplexe Konjugation $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ (siehe Notation 6.2) stetig: Sind $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so setzen wir $\delta := \varepsilon$ und erhalten für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < \delta$

$$|f(z)-f(a)| = |\overline{z}-\overline{a}| = |\overline{z-a}| = |z-a| < \delta = \varepsilon.$$

(d) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(siehe Bild unten) ist in $a = 0$ nicht stetig. Wollen wir dies formal zeigen, müssen wir die Negation der Bedingung aus Definition 8.5 (a) beweisen, d. h.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta \text{ und } |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon.$$

(Beachte dabei, dass die Negation der Aussage „$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$" nach Beispiel 1.9 die angegebene Bedingung „$|x-a| < \delta$ *und* $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$" ist, und nicht etwa eine Folgerung „$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$"!)

Dies zu zeigen ist hier aber sehr einfach: Setzen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und ist $\delta > 0$ beliebig, so können wir $x = \frac{\delta}{2}$ setzen und erhalten $|x-a| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|f(x)-f(a)| = |0-1| = 1 \geq \varepsilon$.

Anders ausgedrückt existiert in diesem Fall der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht. Falls ihr jetzt gedacht hättet, dass dieser Grenzwert doch existiert und gleich 0 ist, so habt ihr damit sicher gemeint, dass sich $f(x)$ dem Wert 0 nähert, wenn x in der Nähe von 0, *aber nicht gleich* 0 ist. Der Fall $x = 0$ (bzw. $x = a$) ist in Definition 8.3 aber nicht ausgeschlossen! Wenn wir dies ausschließen wollten, so müssten wir die Definitionsmenge von f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ einschränken und würden dann in der Tat

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$$

erhalten.

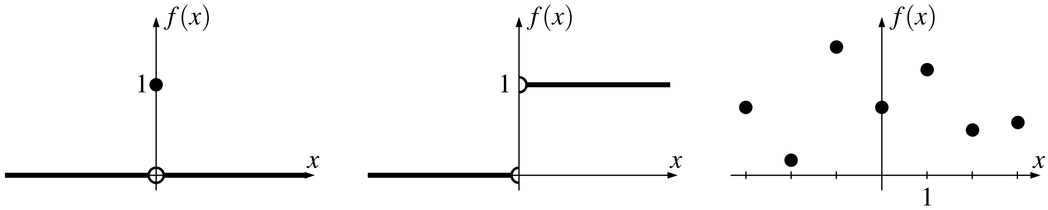
Beachte jedoch, dass es hier in der Literatur zwei verschiedene Konventionen gibt: In manchen Büchern werden Funktionsgrenzwerte so definiert, dass $\lim_{x\to a}$ immer für $\lim_{x\to a, x\neq a}$ steht.

(e) Die unten im Bild dargestellte Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist stetig — ja, wirklich! Sie ist nämlich an jedem Punkt *der Definitionsmenge*, also an jedem $a \neq 0$ stetig, weil sie in der Nähe eines jeden solchen Punktes (genauer: in der $|a|$-Umgebung von a) konstant ist. Die Funktion f ist aber natürlich *nicht stetig fortsetzbar* nach 0: Der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

(f) *Jede* Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig (siehe unten). Das liegt anschaulich einfach daran, dass wir hier gar keine Möglichkeit haben, ein gegebenes $a \in \mathbb{Z}$ ein wenig so zu verändern, dass es immer noch in der Definitionsmenge liegt. Formal können wir in der Bedingung aus Definition 8.5 (a) für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ immer $\delta = \frac{1}{2}$ setzen und haben damit sicher gestellt, dass $|x-a| < \delta$ mit $x \in \mathbb{Z}$ nur für $x = a$ erfüllt ist, womit dann natürlich auch $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ ist.



(d) (e) (f)

Bemerkung 8.8 (Funktionen mit Grenzwert ungleich 0)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$ mit $c := \lim_{x\to a} f(x) \neq 0$. Aus Definition 8.3 für $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$ erhalten wir dann wie in Bemerkung 5.12 ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ und damit

$$|f(x)| = |f(x) - c + c| \geq |c| - |f(x) - c| > |c| - \varepsilon = \frac{|c|}{2} > 0$$

für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ gilt.

Insbesondere ergibt sich im Fall $a \in D$ also, dass eine in a stetige Funktion f mit $f(a) \neq 0$ auch in einer δ-Umgebung von a ungleich 0 ist. Beispiel 8.7 (d) zeigt (bei $a = 0$), dass dies für unstetige Funktionen im Allgemeinen natürlich falsch ist.

Eine analoge Aussage gilt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auch ohne Beträge: Eine in a stetige reelle Funktion f mit $f(a) > 0$ ist auch in einer δ-Umgebung von a positiv.

Aufgabe 8.9. Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Berechne den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$.

Aufgabe 8.10. Zeige durch Rückgang auf die ε-δ-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig ist.

Wie im Fall von Folgengrenzwerten wollen wir nun natürlich auch für Grenzwerte von Funktionen ein paar einfache Rechenregeln zeigen, z. B. dass solche Grenzwerte wie in Satz 5.13 mit Summen und Produkten vertauschen. Glücklicherweise lassen sich Grenzwerte von Funktionen mit Hilfe des folgenden Satzes immer auf Grenzwerte von Folgen zurückführen, so dass wir viele unserer Ergebnisse dann sofort von Folgen auf Funktionen übertragen können:

Satz 8.11 (Folgenkriterium). *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.*

(a) ***(Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte)*** *Für $a \in \overline{D}$ und $c \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to c.$$

(b) ***(Folgenkriterium für Stetigkeit)*** *Für $a \in D$ gilt*

$$f \text{ ist stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to f(a).$$

Es ist dann also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big),$$

d. h. „eine stetige Funktion f vertauscht mit der Grenzwertbildung von Folgen".

Beweis. Wir beweisen zunächst Teil (a).

„⇒" Es seien $\lim_{x\to a} f(x) = c$ und $(x_n)_n$ eine Folge in D mit $x_n \to a$; wir müssen $f(x_n) \to c$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{x\to a} f(x) = c$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - c| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt. Wegen $x_n \to a$ ist aber $|x_n - a| < \delta$ für fast alle n, und damit dann auch $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ für diese n. Damit gilt $f(x_n) \to c$.

„⇐" Wir zeigen diese Richtung durch einen Widerspruchsbeweis und nehmen also an, dass c kein Grenzwert von $f(x)$ in a ist, d. h. (durch Negation der Definition 8.3)

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\forall\, \delta > 0 \;\exists\, x \in D : |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - c| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen nun ein solches ε. Indem wir $\delta = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ setzen, erhalten wir für alle n ein $x_n \in D$ mit $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - c| \geq \varepsilon$. Für diese Folge gilt dann aber $x_n \to a$ und $f(x_n) \not\to c$ im Widerspruch zur Annahme.

17 Teil (b) folgt nun mit Definition 8.5 (a) sofort aus (a). □

Bemerkung 8.12. Mit Hilfe des Folgenkriteriums können wir nun sehr schnell viele Resultate über Grenzwerte von Folgen auf Funktionen übertragen. So folgt z. B. sofort, dass Grenzwerte von Funktionen immer eindeutig sind, sofern sie existieren: Sind $D \subset \mathbb{K}$, $f\colon D \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{D}$ und $f(x) \to c$ für $x \to a$, so können wir wegen $a \in \overline{D}$ eine Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \to a$ wählen, und erhalten mit Satz 8.11 (a) dann auch $f(x_n) \to c$. Da Folgengrenzwerte nach Lemma 5.5 aber eindeutig sind, ist dies für höchstens ein c möglich.

Die folgenden Rechenregeln ergeben sich ebenfalls sofort aus dem Folgenkriterium und sorgen auch dafür, dass wir für sehr viele Funktionen ohne weitere Rechnung direkt die Stetigkeit nachweisen können:

Satz 8.13 (Grenzwertsätze für Funktionen**).** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen. Weiterhin sei $a \in \overline{D}$, so dass beide Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, und es gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Eine analoge Aussage gilt auch für $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ und $\frac{f(x)}{g(x)}$ (letzteres natürlich nur, falls $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Insbesondere sind für $a \in D$ also mit f und g auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ in a stetig (letzteres wiederum nur, falls $g(a) \neq 0$).

Beweis. Beachte im Fall $\frac{f}{g}$ zunächst, dass die Definitionsmenge dieses Quotienten nicht ganz D, sondern die evtl. kleinere Menge $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$ ist. Um überhaupt über den Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to a$ sprechen zu können, müssen wir also zuerst überprüfen, dass a ein Berührpunkt von D' ist. Dies folgt aber aus Bemerkung 8.8, die besagt, dass g wegen $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ in einer ε-Umgebung von a nirgends 0 wird, so dass D und D' dort also übereinstimmen.

Die eigentliche Behauptung des Lemmas ist nun eine direkte Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen aus Satz 5.13. Wir betrachten hier nur den Fall der Addition, da die anderen drei Fälle wörtlich genauso bewiesen werden. Dazu berechnen wir den Grenzwert von $f(x)+g(x)$ mit dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 (a): Es sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in D mit $x_n \to a$. Dann gilt nach dem Folgenkriterium für f und g

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x)$$

und damit nach Satz 5.13 (a)

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

d. h. $f(x_n)+g(x_n)$ konvergiert für jede solche Folge gegen $\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$, also immer gegen dieselbe Zahl. Wiederum nach dem Folgenkriterium — diesmal für $f+g$ — ergibt sich damit also wie gewünscht auch

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x). \qquad \square$$

Beispiel 8.14. Jede *rationale Funktion*, also jede Funktion der Form $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$, lässt sich natürlich mit den vier Grundrechenarten aus der Identität und den konstanten Funktionen zusammensetzen. Damit folgt aus Satz 8.13, dass jede solche Funktion auf jeder Definitionsmenge $D \subset \{x \in \mathbb{K} : q(x) \neq 0\}$ — also überall dort, wo f überhaupt definiert werden kann — stetig ist.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass auch Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind. Dazu beweisen wir zuerst ein etwas allgemeineres Lemma, das analog zur Vertauschbarkeit stetiger Funktionen mit Folgengrenzwerten in Satz 8.11 (b) ist und das auch oft zur Berechnung von Grenzwerten nützlich ist.

Satz 8.15 (Grenzwert einer Verkettung)**.** *Es seien $f\colon D \to \mathbb{K}$ mit $D \subset \mathbb{K}$ sowie $g\colon D' \to \mathbb{K}$ mit $D' \subset \mathbb{K}$ zwei Funktionen mit $f(D) \subset D'$. Ferner sei $a \in \overline{D}$, so dass $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert, in D' liegt, und g in diesem Punkt stetig ist. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big),$$

d. h. „für stetige g kann man die Anwendung von g mit der Grenzwertbildung vertauschen".

Beweis. Wir zeigen das Lemma wieder mit dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 (a). Es sei also $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in D mit $x_n \to a$. Weil der Grenzwert $c := \lim_{x\to a} f(x)$ nach Voraussetzung existiert, gilt $f(x_n) \to c$ nach dem Folgenkriterium für f. Da weiterhin g in c stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium für g auch $(g\circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(c)$. Die Aussage des Lemmas ergibt sich damit aus dem Folgenkriterium für $g \circ f$. $\square$

Bemerkung 8.16 (Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig)**.** Ist in Satz 8.15 sogar $a \in D$, so dass also f in a stetig ist und nach Bemerkung 8.4 dann $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gilt, so besagt das Lemma folgendes: Ist f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a)$, d. h. auch $g\circ f$ stetig in a.

Aufgabe 8.17. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

genau im Punkt $a = \frac{1}{2}$ stetig ist.

Aufgabe 8.18. Man beweise: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}$$

gilt, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. f ist eine lineare Funktion.

Bleibt die Aussage richtig, wenn man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt?

Genau wie bei Folgen wollen wir nun auch für Funktionen im reellen Fall uneigentliche Grenzwerte einführen, und zwar sowohl in der Start- als auch in der Zielmenge: Wir wollen sowohl Grenzwerte der Form $\lim_{x\to\infty} f(x)$ definieren als auch sagen, was es bedeutet, dass der Grenzwert einer Funktion gleich ∞ ist. Die folgende Definition ist völlig analog zu Definition 5.39.

Definition 8.19 (Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Für $a \in \overline{D}$ schreiben wir $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, wenn

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > s.$$

Wie im Fall von Folgen in Definition 5.39 spricht man in diesem Fall von einem **uneigentlichen Grenzwert** bzw. sagt, dass f für $x \to a$ **bestimmt divergiert**.

(b) Ist D nach oben unbeschränkt (so dass man x in $f(x)$ überhaupt beliebig groß werden lassen kann), so schreibt man $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \in D : x \geq r \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Kombiniert man dies nun noch mit (a), so erhält man die Schreibweise $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ für

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \exists r \in \mathbb{R}\ \forall x \in D : x \geq r \Rightarrow f(x) > s.$$

Beachte, dass diese letzten beiden Notationen sogar exakt mit der Definition von Folgengrenzwerten aus Definition 5.1 (b) und 5.39 übereinstimmen, wenn man sie auf eine Folge (a_n) als Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ anwendet.

Analog definiert man derartige Grenzwerte mit $-\infty$ statt ∞.

Bemerkung 8.20. Man prüft leicht nach, dass mit Definition 8.19 sowohl das Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte aus Satz 8.11 (a) als auch die Grenzwertsätze aus Satz 8.13 auch für diese uneigentlichen Grenzwerte gelten, wenn man die üblichen Rechenregeln für $\pm\infty$ verwendet.

8.B Eigenschaften stetiger Funktionen

Nachdem wir nun von vielen Funktionen gesehen haben, wie man ihre Stetigkeit nachweisen kann, wollen wir jetzt untersuchen, was wir davon haben, wenn wir wissen, dass eine gegebene Funktion stetig ist. Dazu wollen wir einige sehr anschauliche Aussagen formal beweisen, die für *reelle* stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ mit $a < b$ gelten. Die erste von ihnen besagt, dass eine solche Funktion mit je zwei Funktionswerten auch jeden Wert dazwischen annehmen muss — was bei einer kontinuierlichen Änderung der Funktionswerte natürlich zu erwarten ist.

Satz 8.21 (**Zwischenwertsatz**)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = c$.*

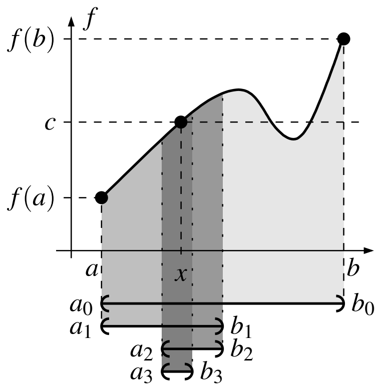
Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass wie im Bild unten rechts $f(a) \leq f(b)$ und damit $f(a) \leq c \leq f(b)$ gilt. Ausgehend von $[a_0,b_0] := [a,b]$ konstruieren wir nun rekursiv eine Intervallschachtelung

$$[a,b] = [a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$$

mit in jedem Schritt halbierter Länge der Intervalle, so dass $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Ist $[a_n, b_n]$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, so betrachten wir den Funktionswert $f(\frac{a_n+b_n}{2})$ in der Intervallmitte.

- Ist $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq c$ (wie im Bild im Fall $n = 0$), so ersetzen wir die rechte Intervallgrenze durch den Mittelpunkt, setzen also $a_{n+1} := a_n$ und $b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$.
- Ist dagegen $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < c$ (wie im Fall $n = 1$ im Bild rechts), so ersetzen wir die linke Intervallgrenze durch den Mittelpunkt, setzen also $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $b_{n+1} := b_n$.



Für den nach Satz 5.38 durch diese Intervallschachtelung definierten Punkt $x \in [a, b]$ gilt dann $a_n \to x$ und $b_n \to x$, nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 also

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x)$$

und damit $f(x) = c$. □

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall wie in Satz 8.21 immer beschränkt ist.

Definition 8.22 (Beschränkte und monotone Funktionen)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f auf D ...

(a) (nach oben bzw. unten) **beschränkt**, wenn die Menge $f(D) \subset \mathbb{R}$ aller Bildpunkte von f (nach oben bzw. unten) beschränkt ist.

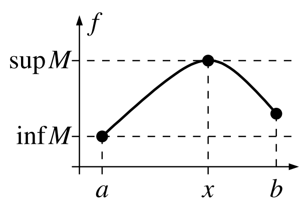
(b) **monoton wachsend** oder **steigend** (bzw. **streng monoton wachsend** oder **steigend**), wenn für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$). Analog definiert man **(streng) monoton fallend**.

Satz 8.23. *Jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.*

Beweis. Angenommen, f wäre unbeschränkt. Dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| > n$. Beachte, dass die Folge $(f(x_n))_n$ dann natürlich unbeschränkt, die Folge $(x_n)_n$ aber beschränkt ist (weil ja stets $x_n \in [a, b]$ gilt). Nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß besitzt $(x_n)_n$ also eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$. Der Grenzwert x dieser Teilfolge liegt nach Satz 5.23 (a) ebenfalls in $[a, b]$ und damit in der Definitionsmenge von f. Nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 (b) müsste dann aber die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ gegen $f(x)$ konvergieren — was ein Widerspruch dazu ist, dass diese Folge nach Konstruktion unbeschränkt und damit divergent ist. □

Bemerkung 8.24. Für nicht abgeschlossene Intervalle ist Satz 8.23 natürlich im Allgemeinen falsch, wie das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ zeigt.

Wir haben gerade gesehen, dass das Bild $M = f([a, b])$ einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ immer beschränkt ist und damit also stets zwischen $\inf M$ und $\sup M$ liegt. Wir wollen nun zeigen, dass Infimum und Supremum dieser Menge in der Tat sogar Minimum und Maximum sind, also dass diese beiden Zahlen auch als Werte von f angenommen werden — so wie z. B. im Bild rechts $f(x) = \sup M$ ist.



Satz 8.25 (**Satz vom Maximum und Minimum**)**.** *Jede stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ein Maximum und Minimum an, d. h. die Menge $M = f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ hat ein Maximum und Minimum.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für das Maximum; das Minimum ergibt sich analog. Die Menge M ist natürlich nicht leer und nach Satz 8.23 beschränkt, also existiert $s := \sup M$. Da s die kleinste obere Schranke für M ist, ist $s-\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ dann keine obere Schranke mehr. Wir finden also ein $x_n \in [a,b]$ mit

$$s-\frac{1}{n} < f(x_n) \leq s. \qquad (*)$$

Nach dem Einschachtelungssatz 5.23 (b) konvergiert $(f(x_n))_n$ damit gegen s. Nun können wir aber wieder nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß aus $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ auswählen, die gegen ein $x \in [a,b]$ konvergiert. Weil f in x stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 (b) damit

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = s. \qquad \square$$

Die Ergebnisse aus den Sätzen Satz 8.21, 8.23 und 8.25 lassen sich übrigens einfach in einer einzigen Aussage zusammenfassen:

Folgerung 8.26. *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$, so ist das Bild von f ebenfalls ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$.*

Beweis. Nach Satz 8.25 existieren $c := \min f([a,b])$ und $d := \max f([a,b])$. Insbesondere gilt damit $f([a,b]) \subset [c,d]$, wobei die Werte c und d von f angenommen werden. Nach dem Zwischenwertsatz werden damit von f aber auch alle Werte zwischen c und d angenommen, d. h. es ist in der Tat $f([a,b]) = [c,d]$. $\square$

Aufgabe 8.27. Man zeige:

(a) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0)=0$ sowie $g\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion.

Dann ist die Funktion $f\cdot g\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$ stetig in den Nullpunkt fortsetzbar.

(b) Jede bijektive, monoton wachsende Funktion $f\colon [a,b] \to [c,d]$ zwischen abgeschlossenen reellen Intervallen ist stetig.

18

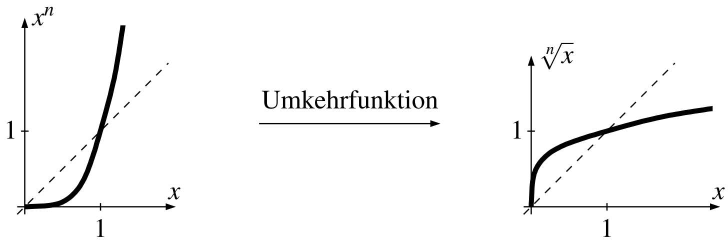
Eine der wichtigsten Anwendungen dieser Aussage ist die Konstruktion von (stetigen) Umkehrfunktionen für streng monotone Funktionen:

Satz 8.28 (Existenz und Stetigkeit von Umkehrfunktionen)**.** *Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion mit $c = f(a)$ und $d = f(b)$. Dann ist f bijektiv, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.*

Analog gilt dies mit „streng monoton fallend“ statt „streng monoton wachsend“.

Beweis. Die Abbildung f ist surjektiv nach Folgerung 8.26. Sie ist auch injektiv, da sie streng monoton wachsend ist. Also ist f bijektiv, und die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$ existiert. Sie ist notwendigerweise streng monoton wachsend, denn wenn es $x,y \in [c,d]$ mit $x<y$ und $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ gäbe, würde sich daraus durch Anwenden der streng monotonen Funktion f der Widerspruch $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$, also $x \geq y$ ergeben. Nach Aufgabe 8.27 (b) ist f^{-1} damit auch stetig. $\square$

Beispiel 8.29 (Wurzelfunktionen)**.** Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann ist die Funktion $f\colon [0,R] \to [0,R^n]$, $x \mapsto x^n$ nach Lemma 4.16 streng monoton wachsend und nach Beispiel 8.14 stetig. Also ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [0,R^n] \to [0,R]$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, die wir bereits aus Aufgabe 5.36 kennen, ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Betrachtet man diese Aussage für alle R zusammen, ist damit auch die Wurzelfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ streng monoton wachsend und stetig. Ihr Graph ensteht wie im Bild unten durch Spiegelung des Graphen von f an der gestrichelt eingezeichneten Diagonalen.



Aufgabe 8.30. Man beweise:

(a) Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [a,b]$ hat einen Fixpunkt, d. h. ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.

Ist f darüber hinaus monoton wachsend, so konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_n$ mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für ein beliebiges $x_0 \in [a,b]$ gegen einen Fixpunkt von f.

(b) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x+1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (d. h. „f ist periodisch mit Periodenlänge 1“), dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(a+\frac{1}{2})$. (Anschaulich bedeutet dies z. B., dass es auf dem Äquator der Erde (mit Umfang 1 und Koordinate x) stets zwei gegenüberliegende Punkte gibt, an denen die gleiche Temperatur $f(x)$ herrscht.)

Aufgabe 8.31. Es sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Zeige, dass f ein Minimum annimmt.

Aufgabe 8.32. Man zeige:

(a) Es gibt keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unter der jede reelle Zahl genau zwei Urbilder hat.

(b) Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die offene Intervalle auf offene Intervalle abbildet, ist streng monoton.

(c) Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte stetige Funktion, so gibt es eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die mit dem Graphen von f mindestens drei Punkte gemeinsam hat.

8.C Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Wir haben nun einige schöne Eigenschaften stetiger Funktionen gesehen und auch Methoden kennengelernt, mit denen wir von vielen Funktionen ihre Stetigkeit nachweisen können. Allerdings haben wir dabei bisher eine wichtige Klasse von Funktionen ausgelassen — nämlich solche, die durch den Grenzwert einer konvergenten Folge oder Reihe definiert sind, wie z. B. die Exponentialfunktion oder ganz generell allgemeine Potenzreihen wie in Definition 7.25. Zur Untersuchung der Stetigkeit derartiger Funktionen starten wir mit einem einfachen Beispiel.

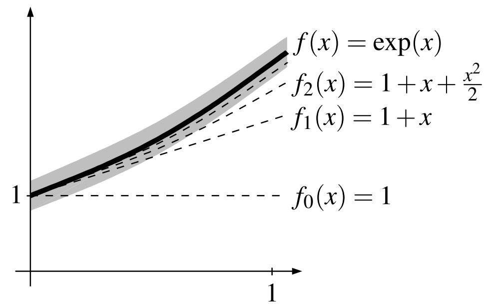
Beispiel 8.33. In Definition 7.25 (b) hatten wir die Exponentialfunktion als $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ definiert, also als den Grenzwert

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{mit} \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

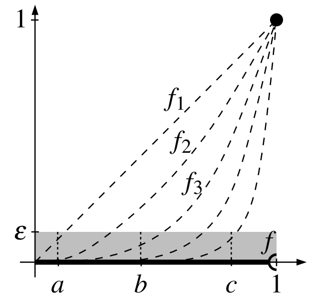
Natürlich ist jede einzelne Partialsumme f_n nach Beispiel 8.14 eine stetige Funktion in x. Da sich diese Partialsummen für $n \to \infty$ immer mehr der Exponentialfunktion annähern, würden wir nun hoffen, dass aus der Stetigkeit aller f_n auch die Stetigkeit der Grenzfunktion, also der Exponentialfunktion folgt. Allgemein fragen wir uns also: Sind $f_n\colon D \to \mathbb{K}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen auf einer Menge $D \subset \mathbb{K}$, so dass für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert (wir sagen in diesem Fall auch, dass die Funktionen f_n *punktweise gegen f konvergieren* — siehe Definition 8.34), ist dann auch diese Grenzfunktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ stetig? Der Fall der Exponentialfunktion ist im folgenden Bild links dargestellt, wobei die einzelnen f_n gestrichelt und die Grenzfunktion f dick eingezeichnet ist.



$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad f(x) = \exp(x)$$



$$f_n(x) = x^n, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Es sieht hier also bereits so aus, als ob die Grenzfunktion wie gewünscht stetig ist, und in der Tat werden wir auch sehen, dass dies bei der Exponentialfunktion wirklich der Fall ist. Allerdings ist die Situation im Allgemeinen leider nicht ganz so schön, wie man es sich wünschen würde. Betrachten wir z. B. einmal die Funktionen

$$f_n \colon D = [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$$

wie im Bild oben rechts, so existiert nach Beispiel 5.3 (c) zwar der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

für alle $x \in D$, aber die Grenzfunktion ist hier offensichtlich *nicht* stetig! Wir halten also fest:

Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{K}$ punktweise gegen eine Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{K}$, so muss f nicht notwendig stetig sein!

Analog zum Fall der Umordnungen von Reihen in Beispiel 7.9 wird auch hier der Ausweg aus diesem Problem darin bestehen, eine stärkere Form der Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen einzuführen, die letztlich die Stetigkeit der Grenzfunktion sicherstellt.

In der Tat können wir an unserem obigen Beispiel $f_n(x) = x^n$ auch schon motivieren, wie dieses stärkere Kriterium aussehen wird, denn man sieht an diesem Bild bereits recht deutlich, wo das Problem liegt: Es ist zwar richtig, dass für jedes $x \in [0,1)$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x^n$ gleich 0 ist, d. h. dass $x^n < \varepsilon$ für alle n ab einem gewissen n_0 gilt — aber dieses n_0 hängt extrem vom betrachteten Punkt x ab und wird insbesondere für $x \to 1$ immer größer. So kann man z. B. für den Wert $x = a$ im Bild oben rechts noch $n_0 = 1$ wählen, beim Wert $x = b$ braucht man mindestens $n_0 = 3$, beim Wert $x = c$ schon mindestens $n_0 = 5$. Je weiter sich x dem Wert 1 nähert, um so größer muss man dieses n_0 wählen — bis es im Grenzfall $x = 1$ schließlich gar kein solches n_0 mehr gibt, so dass 0 nicht mehr der Grenzwert der Folge $\lim_{n\to\infty} x^n$ ist. Im Bild oben links hingegen kann man für die dargestellte ε-Umgebung um f z. B. $n_0 = 3$ *für alle* x (in dem dort betrachteten Intervall) wählen, denn $f_3, f_4, f_5, \dots$ liegen komplett in dem grau eingezeichneten Streifen.

Es kommt bei der Grenzwertdefinition also anscheinend darauf an, ob man das in der Grenzwertdefinition verlangte n_0 unabhängig vom betrachteten Punkt x wählen kann. Dies führt auf die folgenden Definitionen:

Definition 8.34 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f \colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n \colon D \to \mathbb{K}$ gegeben — man nennt $(f_n)_n$ dann auch eine **Funktionenfolge** auf D. Ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, d. h. gilt

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

so nennt man $(f_n)_n$ **punktweise konvergent** gegen f. Beachte, dass das n_0 hierbei nicht nur von ε, sondern auch vom betrachteten Punkt x abhängen darf. Kann man n_0 jedoch auch unabhängig von x wählen, d. h. gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

so heißt die Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf D **gleichmäßig konvergent** gegen f.

(b) Bekanntlich heißt eine Funktion f nach Definition 8.5 stetig, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist, also wenn gilt

$$\forall a \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Beachte, dass das δ hierbei analog zu (a) nicht nur von ε, sondern auch vom betrachteten Punkt a abhängen darf. Kann man δ jedoch auch unabhängig von a wählen, gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall a \in D \ \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

so nennt man f auf D **gleichmäßig stetig**.

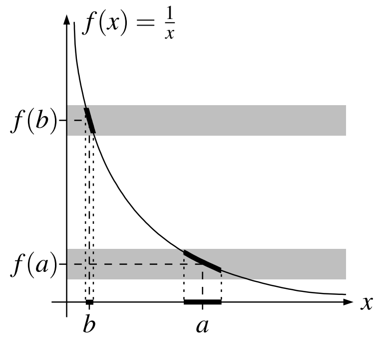
Wir wollen diese Konzepte der gleichmäßigen Konvergenz und Stetigkeit jetzt genauer untersuchen. Natürlich ist jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent, und jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig. Beachte auch, dass die gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit nach Definition keine „punktweisen“ Konzepte sind, also dass es nicht sinnvoll ist, zu sagen, eine Funktionenfolge sei „in jedem Punkt von D gleichmäßig konvergent“, oder eine Funktion „in jedem Punkt von D gleichmäßig stetig“.

Wir beginnen mit einem Beispiel dafür, dass die gleichmäßige Stetigkeit wirklich eine stärkere Bedingung als die normale Stetigkeit ist.

Beispiel 8.35. Wir behaupten, dass die nach Beispiel 8.14 stetige Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{x}$$

nicht gleichmäßig stetig ist. Anschaulich ist diese Aussage im Bild rechts dargestellt: Die Stetigkeit von f bedeutet ja gerade, dass wir zu jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(f(x))$ eines Bildpunktes $f(x)$ eine δ-Umgebung von x finden, die ganz nach $U_\varepsilon(f(x))$ abgebildet wird. Zum Punkt $x = a$ haben wir in der Skizze eine ε-Umgebung von $f(a)$ grau eingezeichnet, und auf der x-Achse eine dazu passende δ-Umgebung wie in Bemerkung 8.6 dick markiert. Wenn wir nun auf einen (viel) kleineren Wert $x = b$ gehen und das gleiche ε wie oben behalten, so sehen wir, dass wir das zugehörige δ viel kleiner wählen müssen. Wenn sich x der 0 nähert, müssen wir bei gleich bleibendem ε das δ in der Tat sogar gegen 0 gehen lassen. Dies bedeutet, dass wir für festgehaltenes ε kein δ finden können, das in *jedem* Punkt $x > 0$ funktioniert — und das wiederum bedeutet genau, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.



Wollen wir diese Aussage formal beweisen, so müssen wir die Negation der Bedingung aus Definition 8.34 (b) nachweisen, d. h.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists a \in D \ \exists x \in D : |x - a| < \delta \text{ und } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Dies ist schnell gezeigt: Wir setzen $\varepsilon := 1$; es sei $\delta > 0$ beliebig. Dann wählen wir $x = \delta$ und $a = \frac{\delta}{1+\delta}$, und es gilt wegen $x > a$

$$|x - a| = \delta - \frac{\delta}{1+\delta} < \delta \qquad \text{und} \qquad |f(x) - f(a)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1+\delta}{\delta} \right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Wir wollen nun aber zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen reellen Intervall glücklicherweise immer gleichmäßig stetig ist, so dass wir in diesem Fall die eigentlich stärkere Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit immer umsonst mitgeliefert bekommen.

Satz 8.36. *Jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen reellen Intervall ist dort auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann würde wie in Beispiel 8.35 das Gegenteil der Bedingung aus Definition 8.34 (b) gelten, d. h.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x,y \in [a,b] : |y-x| < \delta \text{ und } |f(y)-f(x)| \geq \varepsilon.$$

Wählen wir ein solches ε, so finden wir also mit $\delta = \frac{1}{n}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Zahlen $x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. Insbesondere ist dann $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. Wählen wir nun nach dem Satz 6.21 von Bolzano-Weierstraß eine gegen ein $x \in [a,b]$ konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \lim_{k\to\infty} (y_{n_k} - x_{n_k}) = x + 0 = x,$$

d. h. die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_n$ konvergiert ebenfalls gegen x. Wegen der Stetigkeit von f in x ergibt sich dann aber nach dem Folgenkriterium aus Satz 8.11 (b)

$$\lim_{k\to\infty} (f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\big(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\big) - f\big(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\big) = f(x) - f(x) = 0,$$

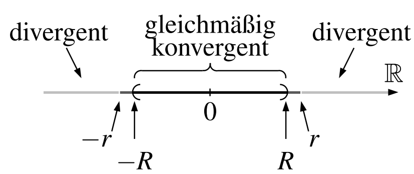
im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle k. □

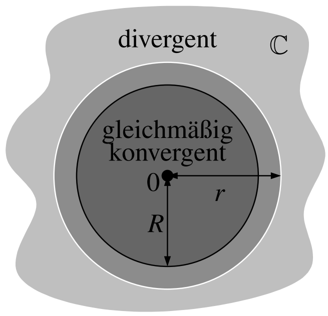
Nach der gleichmäßigen Stetigkeit wollen wir uns nun mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen befassen. Unser wichtigstes Beispiel von Funktionenfolgen sind Potenzreihen, und glücklicherweise sind diese in folgendem Sinne immer gleichmäßig konvergent.

Satz 8.37 (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r ist gleichmäßig konvergent auf jeder Menge der Form*

$$K_R := \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq R\} \qquad \textit{für } 0 \leq R < r$$

(d. h. die Folge $(f_n)_n$ der Partialsummen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ konvergiert gleichmäßig auf jedem K_R gegen die Grenzfunktion f mit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$).





Mit anderen Worten konvergieren Potenzreihen also gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. Kreis (für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) innerhalb des Konvergenzgebiets.

Beweis. Wir weisen das Kriterium aus Definition 8.34 (a) direkt nach. Es sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $R < r$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k$ nach Satz 7.26 absolut. Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot R^k - \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot R^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Dann folgt für alle $n \geq n_0$ und $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| \leq R$ aber auch

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot R^k < \varepsilon.$$

Da wir unser n_0 hierbei unabhängig von $x \in K_R$ wählen konnten, ist die Potenzreihe auf K_R also gleichmäßig konvergent. $\square$

Beachte, dass man den Wert von R in Satz 8.37 beliebig nahe an r wählen darf. Insbesondere findet man also zu jedem $x \in \mathbb{K}$ im Konvergenzgebiet $D = \{x \in \mathbb{K} : |x| < r\}$ ein R, so dass x in K_R enthalten ist. Dies bedeutet jedoch *nicht*, dass die Potenzreihe auch auf ganz D gleichmäßig konvergiert! Hier ist ein einfaches Gegenbeispiel dafür:

Beispiel 8.38. Die geometrische Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ hat nach Beispiel 7.3 (a) das Konvergenzgebiet $D = \{x \in \mathbb{K} : |x| < 1\}$, also den Konvergenzradius 1. Wir behaupten, dass f auf D nicht gleichmäßig konvergent ist, d. h. dass die Umkehrung der Bedingung aus Definition 8.34 (a)

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists x \in D \; \exists n \geq n_0 : \left| \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| \geq \varepsilon$$

gilt. Dazu wählen wir $\varepsilon := 1$; es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ gegeben, und wir setzen $n := n_0$. Für alle $x \in D$ mit $x > 0$ ist nun nach der Formel für die geometrische Reihe aus Beispiel 7.3 (a)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Nähert sich x nun innerhalb von D dem Wert 1, so wächst dieser Ausdruck offensichtlich unbeschränkt an. Also gibt es insbesondere ein $x \in D$, für das dieser Ausdruck mindestens gleich $1 = \varepsilon$ ist, was zu zeigen war.

19

Wir kommen nun endlich zu dem zentralen Satz, der die Motivation für die Einführung der gleichmäßigen Konvergenz bzw. Stetigkeit war:

Satz 8.39 (Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig)**.** *Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon D \to \mathbb{K}$, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f \colon D \to \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist auch f stetig.*

Beweis. Wir weisen das ε-δ-Kriterium aus Definition 8.5 (a) für f nach. Es seien dazu $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ und alle } n \geq n_0 \tag{1}$$

gilt (insbesondere also auch für $x = a$). Wir können hier also $n := n_0$ setzen. Wegen der Stetigkeit von f_n gibt es dann ein $\delta > 0$ mit

$$|f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta. \tag{2}$$

Insgesamt folgt damit für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (2)}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ nach (1)}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 8.40 (Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Jede Potenzreihe in $\mathbb{K}$ ist in ihrem Konvergenzgebiet stetig.*

Beweis. Wir betrachten eine Potenzreihenfunktion f in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r, also eine Funktion der Form $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$.

Es sei nun ein $c \in \mathbb{K}$ mit $|c| < r$ gegeben; wir müssen zeigen, dass f in c stetig ist. Wähle dazu ein $R > 0$ mit $|c| < R < r$. Dann ist f nach Satz 8.37 auf $K_R = \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq R\}$ der gleichmäßige Grenzwert der stetigen Partialsummen f_n. Also ist diese Grenzfunktion f nach Satz 8.39 auf K_R und damit insbesondere in c stetig. $\square$

Beispiel 8.41.

(a) Die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ist als Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ nach Folgerung 8.40 auf ganz $\mathbb{K}$ stetig.

(b) Die reelle Funktionenfolge $(x^n)_n$ auf $[0,1]$ aus Beispiel 8.33 ist nach Satz 8.39 nicht gleichmäßig konvergent, da ihre Grenzfunktion nicht stetig ist. (Natürlich könnte man dies auch analog zu Beispiel 8.35 oder 8.38 direkt nachrechnen.)

Aufgabe 8.42 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Es sei $D \subset \mathbb{K}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{K}$ heißt **Lipschitz-stetig**, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in D$. Man nennt L in diesem Fall eine **Lipschitz-Konstante** für f. Man zeige:

(a) Ist f Lipschitz-stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig.

(b) Die Wurzelfunktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 8.43 (Supremumsnorm)**.** Es seien $D \subset \mathbb{K}$ und $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion. Wir definieren die **Supremumsnorm** (siehe auch Beispiel 23.3 (e)) als

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}.$$

Zeige, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf D genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 8.44.

(a) Zeige, dass die reelle Funktionenfolge $(f_n)_n$ mit $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ zwar nicht auf $\mathbb{R}_{>0}$, aber auf jedem Intervall $[a, \infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeige, dass die Funktion $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 8.45 (Koeffizientenvergleich für Potenzreihen)**.** Es sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius mindestens $r > 0$. Man zeige:

(a) Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so gilt bereits $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (d. h. ist der Wert der Reihe gleich 0 für alle diese x, so sind bereits alle Koeffizienten der Reihe gleich 0).

(b) Ist $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius mindestens r und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < r$, so ist bereits $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.