

### 30. Der Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale

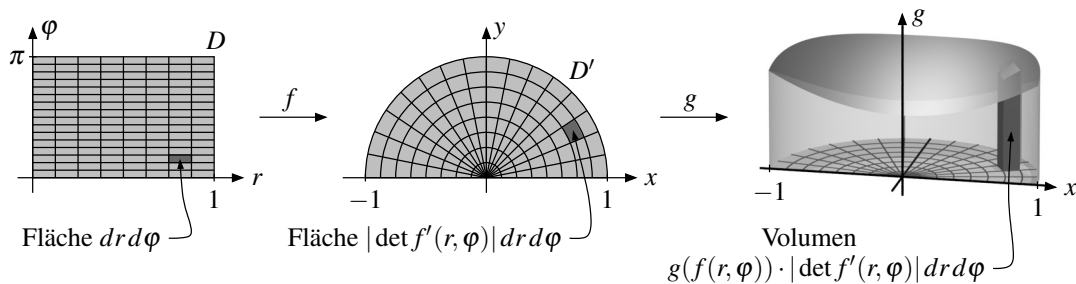
In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, wie man mehrdimensionale Integrale über gewisse Funktionen auf einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definieren und mit Hilfe des Satzes von Fubini auf  $n$ -dimensionale Integrale zurückführen kann. Ein wesentliches Phänomen dabei ist, dass die Integrationsgrenzen der zuerst ausgeführten Integrale dabei wie in Beispiel 29.34 oder Folgerung 29.38 von den späteren Integrationsvariablen abhängen, wenn der Integrationsbereich nicht gerade ein Quader ist. So würde z. B. wie im Bild unten rechts das Integral über eine Funktion  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  auf der oberen Hälfte des Einheitskreises

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

zu einem Doppelintegral der Form

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} g(x, y) dy \right) dx$$

mit variabler Grenze für  $y$  führen. Dieses Einsetzen der variablen Grenzen im  $y$ -Integral kann natürlich schnell zur Folge haben, dass der Integrand für das äußere  $x$ -Integral zu kompliziert wird, um seine Stammfunktion explizit zu bestimmen.



Es wäre daher schön, wenn wir für die Berechnung des Integrals andere Koordinaten verwenden könnten. So würden sich z. B. für die gerade betrachtete obere Hälfte des Einheitskreises Polarkoordinaten  $r, \varphi$  wie in Satz 9.26 und Beispiel 27.4 anbieten, denn in diesen Koordinaten lässt sich diese Menge  $D'$  gerade durch den Quader  $D$  mit den Grenzen  $0 \leq r \leq 1$  und  $0 \leq \varphi \leq \pi$  wie im Bild oben links beschreiben – formal ist also  $D' = f(D)$  mit der Polarkoordinatenabbildung  $f: (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Könnten wir das Integral auch in diesen Koordinaten berechnen, so ergäbe sich ein Doppelintegral

$$\int_0^1 \left( \int_0^\pi \dots d\varphi \right) dr,$$

in dem die Integrationsgrenzen nun konstant sind und die zu integrierende Funktion durch das Einsetzen der inneren Grenzen damit nicht unnötig verkompliziert wird. Wir wollen daher jetzt untersuchen, wie sich mehrdimensionale Integrale unter derartigen Variablentransformationen verhalten, also wie die Integrale über  $g$  und  $g \circ f$  miteinander zusammenhängen, wenn  $f$  eine Koordinatentransformation wie oben ist. Mit anderen Worten wollen wir eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel aus Satz 12.31 finden.

Aus dem Bild oben lässt sich bereits ablesen, wie eine solche Transformationsformel für Integrale aussehen sollte: Wollen wir das Integral  $\int_{D'} g(x, y) d(x, y)$ , also das Volumen unter dem Graphen von  $g$  über  $D'$  berechnen, so können wir uns dieses Volumen wie gewohnt als Summe der Volumina von kleinen Säulen wie im Bild oben rechts vorstellen, deren Grundflächen nun aber aufgrund der Variablentransformation keine Quader mehr sind, sondern aus kleinen Quadern mit Seitenlängen  $dr$

und  $d\varphi$  wie im linken Bild durch Abbilden mit  $f$  entstehen. Wir müssen also herausfinden, wie sich Flächeninhalte (oder in höheren Dimensionen Volumina) unter solchen Koordinatentransformationen ändern – in der Tat ist dies der wesentliche Teil in der Herleitung unserer gewünschten Formel. Dazu werden wir zunächst in Satz 30.7 zeigen, dass sich Volumina von Quadern unter einer *linearen* Abbildung mit dem Betrag der Determinante der zugehörigen Abbildungsmatrix multiplizieren. Ist  $f$  keine lineare Abbildung, so müssen wir für einen kleinen Quader stattdessen die entsprechende lineare Approximation nehmen, also die Ableitung  $f'(r, \varphi)$  an diesem Punkt. Im Bild oben rechts hat die dunkel eingezeichnete Säule also die Höhe  $g(f(r, \varphi))$  (nämlich den Funktionswert von  $g$  am betrachteten Punkt) und die Grundfläche  $|\det f'(r, \varphi)| \cdot dr d\varphi$ . Summiert man dies nun auf, so würde man also erwarten, dass sich das Integral über  $g$  als

$$\int_{D'} g(x, y) d(x, y) = \int_D g(f(r, \varphi)) \cdot |\det f'(r, \varphi)| d(r, \varphi)$$

mit  $D = [0, 1] \times [0, \pi]$  in den neuen Koordinaten berechnen lässt. In der Tat ist dies bereits die gesuchte Transformationsformel (im Fall der obigen Koordinaten  $(x, y)$  bzw.  $(r, \varphi)$ ).

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese anschaulichen Argumente zu einem exakten Beweis zu machen. Der daraus resultierende wichtige Satz 30.12 ist ohne Zweifel die am aufwändigsten zu zeigende Aussage in diesem Skript, und daher ist es beim ersten Durchlesen dieses Kapitels vermutlich sinnvoll, seinen Beweis und seine ganzen Vorbereitungen im folgenden Abschnitt 30.A zunächst einmal zu überspringen und direkt bei der Aussage bzw. den anschließenden Beispielen von Satz 30.12 in Abschnitt 30.B weiterzulesen.

### 30.A Transformation von Volumina

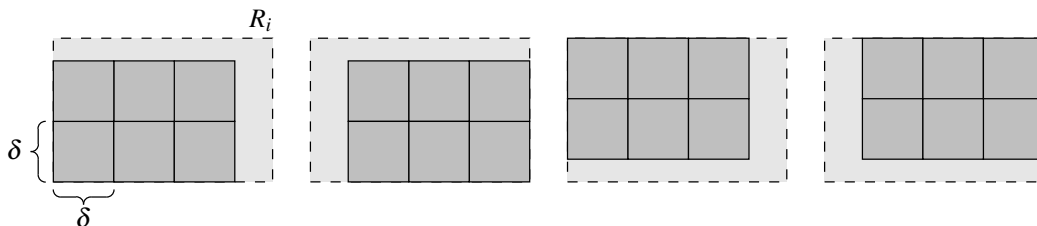
Auf dem Weg zum Beweis des Transformationssatzes beginnen wir mit der ersten oben erwähnten Frage, wie sich Volumina unter Koordinatentransformationen verändern. Leider haben wir dabei gleich noch ein weiteres technisches Problem, da wir ja in Kapitel 29 gesehen haben, dass wir gar nicht jeder beliebigen Menge sinnvoll ein Volumen zuordnen können. Wir müssen daher zunächst erst einmal überprüfen, ob messbare Mengen durch Koordinatentransformationen überhaupt wieder in ebenfalls messbare Mengen umgewandelt werden. Aufgrund unseres Messbarkeitskriteriums aus Folgerung 29.28 können wir dies durch die Untersuchung des Randes auf die Frage zurückführen, ob Nullmengen durch geeignete Koordinatentransformationen wieder in Nullmengen überführt werden. Mit diesem Problem werden wir daher nun unsere Arbeit an dem letztlich gesuchten Transformationssatz für Integrale beginnen. Als Erstes benötigen wir dazu ein weiteres Nullmengenkriterium analog zu Lemma 29.15.

**Lemma 30.1.** *Eine beschränkte Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann eine Nullmenge, wenn es für alle  $\varepsilon > 0$  endlich viele Würfel  $Q_1, \dots, Q_k$  (also Quader, deren Seitenlängen alle gleich sind) gibt mit*

$$N \subset Q_1 \cup \dots \cup Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

*Beweis.* Gibt es stets solche Würfel, so ist  $N$  nach Lemma 29.15 natürlich eine Nullmenge.

Für die umgekehrte Richtung sei nun  $N$  eine Nullmenge. Nach Lemma 29.15 gibt es dann endlich viele Quader  $R_1, \dots, R_l$  mit  $\sum_{i=1}^l \text{vol}(R_i) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ , die  $N$  überdecken. Wir wählen ein  $\delta$  kleiner als die minimale Seitenlänge aller dieser Quader, und füllen jeden Quader  $R_i$  wie im Bild unten von jeder seiner  $2^n$  Ecken kommend mit Würfeln der Kantenlänge  $\delta$  auf.



Da die in  $R_i$  von einer Ecke kommenden Würfel ein Gesamtvolumen von höchstens  $\text{vol}(R_i)$  haben, haben alle diese Würfel zusammen nun ein Gesamtvolumen von höchstens  $\sum_{i=1}^l 2^n \text{vol}(R_i) < \varepsilon$ . Außerdem überdecken die von einer Ecke kommenden Würfel den Quader  $R_i$  mindestens bis zu seinem Mittelpunkt. Daher überdecken alle Würfel zusammen genommen alle Quader  $R_i$ , und damit auch  $N$ .  $\square$

**Satz 30.2** (Bilder kompakter Nullmengen). *Es seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Funktion. Ist  $N \subset D$  dann eine kompakte Nullmenge, so auch  $f(N)$ .*

*Beweis.* Nach Satz 24.29 ist  $f(N)$  natürlich kompakt. Für die Nullmengeneigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall:  $N$  ist in einem Quader  $Q \subset D$  enthalten. Da  $f$  stetig differenzierbar ist, existiert dann auf diesem kompakten Quader nach Folgerung 24.34 das Maximum der Zeilensummennorm

$$c := \|f'\|_Q := \max \left\{ \sum_{j=1}^n |\partial_j f_i(x)| : i \in \{1, \dots, n\}, x \in Q \right\}$$

von  $f'$ . Ist nun  $\varepsilon > 0$  gegeben, so gibt es nach Lemma 30.1 Würfel  $Q_1, \dots, Q_k$  mit  $\sum_{i=1}^k \text{vol}(Q_i) < \frac{\varepsilon}{c^n}$ , die  $N$  überdecken, und von denen wir annehmen können, dass sie in  $Q$  liegen. Wir können sie nach Beispiel 23.3 (b) als abgeschlossene Kugeln

$$Q_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a_i\|_\infty \leq \delta_i\}$$

in der Maximumsnorm mit geeigneten Mittelpunkten  $a_1, \dots, a_k$  und Radien  $\delta_1, \dots, \delta_k$  schreiben. Dann gilt nach der Folgerung 26.19 aus dem Mittelwertsatz aber für alle  $x \in Q_i$ , dass  $f(x) \in R_i$  mit

$$R_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - f(a_i)\|_\infty \leq c\delta_i\}$$

(hierfür brauchen wir unsere Voraussetzung  $N \subset Q \subset R$ , da Folgerung 26.19 benötigt, dass mit  $a_i$  und  $x$  auch die gesamte Verbindungsstrecke  $\overline{a_i x}$  in der betrachteten Menge liegt – was für die Nullmenge  $N$  nicht notwendig der Fall wäre). Damit wird  $f(N)$  überdeckt durch die Würfel  $R_i$  mit Gesamtvolumen

$$\sum_{i=1}^k \text{vol}(R_i) = \sum_{i=1}^k (2c\delta_i)^n = \sum_{i=1}^k c^n \text{vol}(Q_i) < \varepsilon,$$

d. h.  $f(N)$  ist eine Nullmenge.

2. Fall:  $N$  ist beliebig. Da  $D$  offen ist, können wir dann um jeden Punkt  $a \in N$  eine offene Umgebung  $U_{\delta_a}(a) \subset D$  in der Maximumsnorm finden. Betrachten wir die zugehörigen Würfel  $Q_a = K_{\delta_a/2}(a)$  mit halber Kantenlänge, so liegen diese also auch in  $D$ , und die Mengen  $\overset{\circ}{Q}_a$  ihrer inneren Punkte überdecken  $N$ . Wegen der vorausgesetzten Kompaktheit von  $N$  können wir daraus dann nach Satz 23.58 endlich viele Quader  $Q_{a_1}, \dots, Q_{a_m}$  auswählen, die auch schon  $N$  überdecken. Also ist dann

$$N = (N \cap Q_{a_1}) \cup \dots \cup (N \cap Q_{a_m}).$$

Da jede dieser Mengen  $N \cap Q_{a_i}$  nun eine Nullmenge ist, die noch ganz in einem Quader  $Q_{a_i} \subset D$  enthalten ist, ist nach dem 1. Fall also jede Menge  $f(N \cap Q_{a_i})$  eine Nullmenge, und damit nach Bemerkung 29.10 (c) auch  $f(N)$ .  $\square$

**Bemerkung 30.3.** Die folgenden Beispiele zeigen, dass die in Satz 30.2 gemachten Voraussetzungen wirklich wesentlich sind: Die Aussage wird falsch, wenn ...

- Start- und Zielbereich von  $f$  nicht die gleiche Dimension haben: Die Projektion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf die erste Koordinate bildet die kompakte Nullmenge  $[0, 1] \times \{0\}$  auf die Menge  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  mit Volumen 1 ab.
- $f$  nur stetig, aber nicht stetig differenzierbar ist: Mit der Peano-Kurve aus Satz 24.43 erhält man eine stetige Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die die kompakte Nullmenge  $[0, 1] \times \{0\}$  auf das Einheitsquadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$  mit Volumen 1 abbildet.

- (c)  $N$  nicht kompakt ist: Wir betrachten die Menge  $N = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$  und die stetig differenzierbare Abbildung  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . Dann ist  $N$  nach Aufgabe 29.19 eine Nullmenge, aber  $f(N) = \mathbb{N}_{>0}$  kann als unbeschränkte Menge natürlich keine Nullmenge sein.

Von unseren Koordinatentransformationen wollen wir im Folgenden voraussetzen, dass sie nicht nur stetig differenzierbar, sondern auch bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung sind. Derartige Abbildungen werden als Diffeomorphismen bezeichnet – was man sich als Verschmelzung der Worte „differenzierbar“ und „Isomorphismus“ vorstellen sollte.

**Definition 30.4** (Diffeomorphismen). Eine Abbildung  $f: D \rightarrow D'$  zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$  heißt **Diffeomorphismus**, wenn  $f$  bijektiv ist, und sowohl  $f$  als auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}: D' \rightarrow D$  stetig differenzierbar sind.

**Folgerung 30.5.** Es sei  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subset D$ :

- (a)  $f(\partial K) = \partial f(K)$ .  
 (b) Ist  $K$  messbar, so auch  $f(K)$ .

*Beweis.*

- (a) „ $\subset$ “: Es seien  $a \in \partial K$  und  $U \subset D'$  eine Umgebung von  $f(a)$ . Da  $K$  kompakt und damit nach Satz 23.51 (a) auch abgeschlossen ist, gilt dann auch  $a \in K$ . Nun ist  $f^{-1}(U) \subset D$  nach Lemma 24.16 aber eine Umgebung von  $a$  und muss wegen  $a \in K$  damit auch einen Punkt  $b \notin K$  enthalten. Wenden wir darauf die bijektive Funktion  $f$  an, so erhalten wir die Punkte  $f(a) \in f(K)$  und  $f(b) \notin f(K)$  in  $U$ . Damit ist  $f(a)$  ein Randpunkt von  $f(K)$ , d. h. es ist  $f(\partial K) \subset \partial f(K)$ .

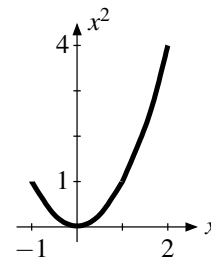
Die Richtung „ $\supset$ “ ergibt sich nun einfach durch Anwendung dieses Resultats auf die stetig differenzierbare Abbildung  $f^{-1}$ : Die Menge  $K' := f(K)$  ist nach Satz 24.29 ebenfalls kompakt, also gilt nach der obigen Rechnung  $f^{-1}(\partial K') \subset \partial f^{-1}(K')$ , d. h.  $f^{-1}(\partial f(K)) \subset \partial K$  und damit durch Anwenden von  $f$  auch  $\partial f(K) \subset f(\partial K)$ .

- (b) Ist  $K$  messbar, so ist  $\partial K$  nach Folgerung 29.28 eine Nullmenge. Außerdem ist  $K$  nach Voraussetzung kompakt und damit nach Satz 23.51 (a) beschränkt, so dass  $\partial K$  nach Lemma 23.40 (e) und Satz 23.51 (b) ebenfalls abgeschlossen und beschränkt und damit kompakt ist. Also ist  $f(\partial K)$  nach Satz 30.2 eine Nullmenge. Wegen (a) ist damit auch  $\partial f(K)$  eine Nullmenge, woraus sich wieder mit Folgerung 29.28 die Messbarkeit von  $f(K)$  ergibt.  $\square$

**Bemerkung 30.6.** Die Gleichung aus Folgerung 30.5 (a) sieht zwar sehr natürlich aus, dennoch sind von ihr für allgemeine (nicht notwendig bijektive) stetig differenzierbare Funktionen im Allgemeinen sogar beide Inklusionen falsch: Betrachten wir z. B. die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$  und die kompakte Menge  $K = [-1, 2]$  mit Bild  $f(K) = [0, 4]$ , so ist

$$f(\partial K) = f(\{-1, 2\}) = \{1, 4\} \quad \text{und} \quad \partial f(K) = \partial[0, 4] = \{0, 4\},$$

so dass hier keine dieser beiden Mengen in der anderen enthalten ist.



In Folgerung 30.5 (b) haben wir nun also gesehen, dass für einen Diffeomorphismus  $f: D \rightarrow D'$  und eine kompakte messbare Menge  $K \subset D$  auch  $f(K) \subset D'$  messbar ist, so dass also das Volumen von  $f(K)$  definiert ist und wir es mit dem von  $K$  vergleichen können. Wie bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, beginnen wir dabei der Einfachheit halber zunächst mit dem Fall einer linearen Abbildung  $f$ .

**Satz 30.7** (Volumenformel für lineare Isomorphismen). Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein linearer Isomorphismus, also  $f: x \mapsto Ax$  für eine invertierbare Matrix  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Dann gilt für jede kompakte messbare Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{vol}(f(K)) = |\det A| \cdot \text{vol}(K).$$

*Beweis.* Wir machen zunächst drei Reduktionsschritte, um den Satz auf eine letztlich sehr einfach zu zeigende Aussage zurückzuführen:

- (1) Es genügt, die Ungleichung  $\text{vol}(f(K)) \leq |\det A| \cdot \text{vol}(K)$  zu zeigen: Wenden wir diese Aussage dann nämlich auf die Umkehrfunktion  $f^{-1}: x \mapsto A^{-1}x$  und die nach Satz 24.29 und Folgerung 30.5 ebenfalls kompakte und messbare Menge  $f(K)$  an, so erhalten wir

$$\text{vol}(K) = \text{vol}(f^{-1}(f(K))) \leq |\det A^{-1}| \cdot \text{vol}(f(K)),$$

nach Satz 18.6 (b) also auch die umgekehrte Ungleichung  $\text{vol}(f(K)) \geq |\det A| \cdot \text{vol}(K)$ .

- (2) Es genügt auch, diese Ungleichung für Quader zu zeigen: Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  dann eine allgemeine kompakte messbare Menge, so gibt es nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium aus Lemma 28.10 (b) für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  eine Zerlegung  $Z$  eines Quaders, der  $K$  enthält, mit

$$\text{OS}(1_K, Z) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \text{vol}(Q) \cdot \sup 1_K(Q) = \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \cap K \neq \emptyset} \text{vol}(Q) < \text{vol}(K) + \varepsilon.$$

Da diese Quader  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \cap K \neq \emptyset$  die Menge  $K$  überdecken, überdecken die Mengen  $f(Q)$  für diese Quader aber auch die Menge  $f(K)$ , und wir erhalten aus Bemerkung 29.10 unter Verwendung der zu zeigenden Aussage für Quader

$$\text{vol}(f(K)) \leq \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} \text{vol}(f(Q)) \leq \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} |\det A| \cdot \text{vol}(Q) < |\det A| \cdot (\text{vol}(K) + \varepsilon).$$

Nehmen wir hier nun den Grenzwert für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , so erhalten wir die zu zeigende Ungleichung  $\text{vol}(f(K)) \leq |\det A| \cdot \text{vol}(K)$  auch für  $K$ .

- (3) Weiterhin genügt es, die Aussage in dem Fall zu zeigen, wenn die Abbildungsmatrix  $A$  von  $f$  eine Elementarmatrix wie in Konstruktion 17.3 ist: Nach Lemma 17.17 ist jede invertierbare Matrix nämlich ein Produkt von solchen Elementarmatrizen, und wenn die zu zeigende Ungleichung für zwei Isomorphismen  $f: x \mapsto Ax$  und  $g: x \mapsto Bx$  gilt, dann auch für ihre Verkettung  $g \circ f$  bzw. das Produkt  $BA$  wegen

$$\text{vol}(g(f(K))) \leq |\det B| \cdot \text{vol}(f(K)) \leq |\det B| \cdot |\det A| \cdot \text{vol}(K) = |\det(BA)| \cdot \text{vol}(K).$$

Es sei nun nach (2) also  $K = Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  ein Quader; wir untersuchen die beiden Typen von Elementarmatrizen nach (3) gemäß Konstruktion 17.3 separat:

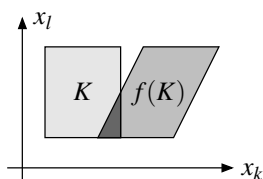
- (a) Für die Elementarmatrix  $A = F_k(\lambda)$  aus Konstruktion 17.3 (a), die die  $k$ -te Koordinate um den Faktor  $\lambda$  streckt, ist

$$\begin{aligned} f(Q) &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [\lambda a_k, \lambda b_k] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \text{für } \lambda > 0 \\ \text{bzw. } f(Q) &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [\lambda b_k, \lambda a_k] \times \cdots \times [a_n, b_n] \quad \text{für } \lambda < 0 \end{aligned}$$

und damit in beiden Fällen  $\text{vol}(f(Q)) = |\lambda| \cdot \text{vol}(Q) = |\det A| \cdot \text{vol}(Q)$ .

- (b) Für die Elementarmatrix  $A = F_{k,l}(\lambda)$  aus Konstruktion 17.3 (b), die das  $\lambda$ -fache der  $l$ -ten Koordinate auf die  $k$ -te addiert, ist  $f(Q)$  ein Parallelotop wie im Bild rechts. Nach dem Prinzip von Cavalieri aus Beispiel 29.40 hat dieses das gleiche Volumen wie der Quader  $Q$ , und wir erhalten wie gewünscht

$$\text{vol}(f(Q)) = 1 \cdot \text{vol}(Q) = |\det A| \cdot \text{vol}(Q). \quad \square$$



**Beispiel 30.8.**

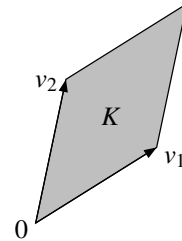
- (a) Es sei  $K$  wie im Bild rechts ein von  $n$  linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  aufgespanntes Parallelotop

$$K = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1\}.$$

Offensichtlich ist  $K$  dann das Bild des Einheitswürfels

$$Q = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1\}$$

unter der linearen Abbildung mit Abbildungsmatrix  $A = (v_1 \mid \dots \mid v_n)$ , die für alle  $i = 1, \dots, n$  den  $i$ -ten Einheitsvektor  $e_i$  auf  $v_i$  abbildet. Nach Satz 30.7 gilt damit also  $\text{vol}(K) = |\det A| \cdot \text{vol}(Q) = |\det A|$ .



- (b) Eine kompakte messbare Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  wird durch die Streckung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \lambda x$  um den Faktor  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  nach Satz 30.7 auf die Menge  $f(K) = \lambda K$  mit dem Volumen  $\text{vol}(f(K)) = \lambda^n \text{vol}(K)$  abgebildet, da die Determinante der zugehörigen Abbildungsmatrix  $\lambda E$  gleich  $\lambda^n$  ist.
- (c) Ist  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine (bezüglich des Standardskalarprodukts) orthogonale Abbildung, also wie in Bemerkung 22.3 z. B. eine Drehung oder Spiegelung, so wird  $f$  nach Lemma 22.4 (a) durch eine orthogonale Matrix  $A$  beschrieben, deren Determinante nach Lemma 22.8 (a) Betrag 1 hat. In diesem Fall erhalten wir aus Satz 30.7 also für jede kompakte messbare Menge die anschaulich einleuchtende Aussage  $\text{vol}(f(K)) = \text{vol}(K)$ , also dass das Volumen unter Drehungen und Spiegelungen unverändert bleibt.

79

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir diese Volumentransformationsformel nun noch auf den Fall eines Diffeomorphismus  $f$  verallgemeinern. Dazu müssen wir  $f$  wie in Kapitel 25 lokal an jedem Punkt durch die lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix  $f'$  approximieren, wodurch die reine Multiplikation mit  $|\det A|$  in Satz 30.7 zu einem Integral über  $|\det f'(x)|$  wird. Wie im Reduktionsschritt (1) des obigen Satzes zeigen wir dabei zunächst nur eine Ungleichung – durch Anwenden auf die Umkehrfunktion werden wir in Bemerkung 30.13 (a) dann wieder sehen, dass sogar die Gleichheit gilt. Wir nähern uns der Aussage zunächst wieder über Würfel bzw. Quader und eine Hilfsabschätzung durch das Maximum von  $|\det f'(x)|$  statt durch das Integral.

**Lemma 30.9.** *Es sei  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt für jeden Würfel  $Q \subset D$*

$$\text{vol}(f(Q)) \leq \max\{|\det f'(x)| : x \in Q\} \cdot \text{vol}(Q).$$

*Beweis.* Wir verwenden in diesem Beweis durchgängig die Maximumsnorm für Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  und die davon induzierte Zeilensummennorm wie in Beispiel 24.39 (b) für Matrizen (wie z. B. die Ableitung  $f'(x)$ ).

Es sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  beliebig. Da  $f'$  auf dem kompakten Quader  $Q$  stetig und invertierbar ist, existiert das Maximum  $M := \max\{\|f'(x)^{-1}\| : x \in Q\}$ . Gleichzeitig ist  $f'$  nach Bemerkung 24.25 (a) auf  $Q$  auch gleichmäßig stetig, und somit gibt es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\|f'(x) - f'(a)\| < \frac{\varepsilon}{M}$  für alle  $a, x \in Q$  mit  $\|x - a\| < \delta$ .

Wir betrachten nun zunächst einen beliebigen Würfel  $W = K_d(a) \subset Q$  mit einem Radius  $d < \delta$ . Wie in der Definition der Differenzierbarkeit in Kapitel 25 können wir dann für alle  $x \in W$

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r(x) = f(a) + f'(a) \cdot \underbrace{(x - a + f'(a)^{-1} \cdot r(x))}_{(2)} \quad (1)$$

mit einer Restfunktion  $r$  schreiben, für die wir aus der obigen Gleichung sofort  $r'(x) = f'(x) - f'(a)$  und  $r(a) = 0$  ablesen. Dabei können wir den Ausdruck (2) mit Hilfe des Mittelwertsatzes wie folgt

abschätzen:

$$\begin{aligned} \|x - a + f'(a)^{-1} \cdot r(x)\| &\leq \|x - a\| + \|f'(a)^{-1}\| \cdot \|r(x)\| && \text{(Folgerung 24.38)} \\ &\leq \underbrace{\|x - a\|}_{\leq d} + \underbrace{\|f'(a)^{-1}\|}_{\leq M} \cdot \underbrace{\|r'(a)\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{M}} \cdot \underbrace{\|x - a\|}_{\leq d} && \text{(Folgerung 26.19)} \\ &\leq (1 + \varepsilon)d. \end{aligned}$$

Der Ausdruck (2) liegt also für alle  $x \in W$  im Würfel  $K_{(1+\varepsilon)d}(0)$  mit Volumen  $(1 + \varepsilon)^n \text{vol}(W)$ . Dieser Würfel wird in (1) durch die Multiplikation mit  $f'(a)$  nach Satz 30.7 auf eine kompakte messbare Menge mit Volumen  $|\det f'(a)| \cdot (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(W)$  abgebildet. Da die Translation um  $f(a)$  in (1) daran nichts ändert, ist also

$$\text{vol}(f(W)) \leq |\det f'(a)| \cdot (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(W) \leq \max\{|\det f'(x)| : x \in Q\} \cdot (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(W).$$

Zerlegen wir nun den Gesamtwürfel  $Q$  in Teilwürfel  $W$  mit Radius  $d < \delta$  und addieren diese Ungleichung für alle diese Teilwürfel auf, so erhalten wir daraus sofort

$$\text{vol}(f(Q)) \leq \max\{|\det f'(x)| : x \in Q\} \cdot (1 + \varepsilon)^n \text{vol}(Q),$$

woraus durch Grenzwertbildung  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung folgt.  $\square$

**Bemerkung 30.10.** Lemma 30.9 gilt in der Tat nicht nur für Würfel, sondern auch für einen beliebigen Quader  $Q = [a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ : Ein solcher Quader ist nämlich das Bild des Einheitswürfels  $W = [0, 1]^n$  unter dem Diffeomorphismus

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto a + \text{diag}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) \cdot x$$

mit konstanter Ableitung  $g' = \text{diag}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$  und demnach  $\det g' = \text{vol}(Q)$ , und damit liefert Lemma 30.9 angewendet auf den Diffeomorphismus  $f \circ g$  und den Einheitswürfel  $W$

$$\begin{aligned} \text{vol}(f(Q)) &= \text{vol}((f \circ g)(W)) \\ &\leq \max\{|\det(f \circ g)'(x)| : x \in W\} && \text{(Lemma 30.9)} \\ &= \max\{|\det f'(g(x))| \cdot |\det g'(x)| : x \in W\} && \text{(Kettenregel, Satz 25.29)} \\ &= \max\{|\det f'(y)| : y \in Q\} \cdot \text{vol}(Q) && (\det g' = \text{vol}(Q)). \end{aligned}$$

**Satz 30.11** (Volumenformel für Diffeomorphismen). *Es seien  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen  $D$  und  $D'$  von  $\mathbb{R}^n$  sowie  $K \subset D$  eine kompakte messbare Menge. Dann gilt*

$$\text{vol}(f(K)) \leq \int_K |\det f'(x)| dx$$

(wobei wir in Bemerkung 30.13 (a) noch sehen werden, dass hier sogar die Gleichheit gilt).

*Beweis.* Da  $K$  kompakt und  $D$  offen ist, existiert nach Aufgabe 24.41 (b) bezüglich der Maximumnorm der Abstand  $\varepsilon := d(K, \mathbb{R}^n \setminus D) > 0$  von  $K$  zum Komplement von  $D$ . Die Menge  $L := K + K_{\varepsilon/2}(0)$  liegt dann also ganz in  $D$  und ist nach Aufgabe 23.61 ebenfalls kompakt.

Es sei nun  $Z$  eine beliebige Zerlegung eines Quaders  $[a, b] \supset K$ , so dass die Seitenlängen aller Teilquader kleiner als  $\frac{\varepsilon}{2}$  sind. Alle Teilquader  $Q \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \cap K \neq \emptyset$  liegen dann nach Konstruktion



in  $L$  und damit auch in  $D$ , so dass  $f$  dort also definiert ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \operatorname{vol}(f(K)) &\leq \sum_{Q \in \operatorname{TQ}(Z): Q \cap K \neq \emptyset} \operatorname{vol}(f(Q)) && \text{(diese } f(Q) \text{ überdecken } f(K)) \\
 &\leq \sum_{Q \in \operatorname{TQ}(Z): Q \cap K \neq \emptyset} \max\{|\det f'(x)| : x \in Q\} \cdot \operatorname{vol}(Q) && \text{(Bemerkung 30.10)} \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{Q \cap K \neq \emptyset} \max\{|\det f'(x)| : x \in Q \cap K\} \cdot \operatorname{vol}(Q) \\
 &\quad + \sum_{Q \cap K \neq \emptyset, Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus K) \neq \emptyset} \underbrace{\max\{|\det f'(x)| : x \in Q\}}_{\leq \max\{|\det f'(x)| : x \in L\} =: c} \cdot \operatorname{vol}(Q) \\
 &\stackrel{(2)}{\leq} \operatorname{OS}(|\det f'|_K, Z) + c \cdot \operatorname{OS}(1_{\partial K}, Z).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir in (1) in der ersten Zeile das Maximum zunächst nur über alle  $x \in Q \cap K$  laufen lassen, um exakt die Obersumme der Einschränkung von  $|\det f'|$  auf  $K$  zu erhalten. Für alle Teilquader  $Q \in \operatorname{TQ}(Z)$  mit  $Q \subset K$  ändert dies natürlich nichts; alle anderen haben wir in der zweiten Zeile unverändert kopiert, damit die Ungleichung wieder stimmt. Der zweite Summand in (2) ergibt sich daraus, dass jeder Teilquader  $Q \in \operatorname{TQ}(Z)$ , der sowohl  $K$  als auch  $\mathbb{R}^n \setminus K$  schneidet, nach Aufgabe 24.23 (a) einen Punkt in  $\partial K$  enthalten muss und damit in der Obersumme der Indikatorfunktion  $1_{\partial K}$  auftritt.

Bilden wir in dieser Ungleichung nun das Infimum über alle Zerlegungen, so erhalten wir wie behauptet

$$\operatorname{vol}(f(K)) \leq \int_K |\det f'(x)| dx + c \cdot \operatorname{vol}(\partial K) \stackrel{29.28}{=} \int_K |\det f'(x)| dx. \quad \square$$

### 30.B Transformation von Integralen

Wir haben jetzt alle notwendigen Vorarbeiten geleistet, um den in der Einleitung zu diesem Kapitel angekündigten Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale zu beweisen.

**Satz 30.12 (Transformationssatz für Integrale).** *Es seien  $D$  und  $D'$  beschränkte offene Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ ,  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus und  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass sowohl  $g$  auf  $D'$  als auch  $(g \circ f) \cdot |\det f'|$  auf  $D$  (beschränkt und) integrierbar sind. Dann gilt*

$$\int_{D'} g(y) dy = \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx.$$

*Beweis.* Zunächst einmal genügt es, den Satz für nicht-negative Funktionen  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  zu zeigen: Nach Folgerung 29.8 (b) können wir ihn im allgemeinen Fall dann nämlich separat auf die ebenfalls integrierbaren Funktionen  $g_+$  und  $g_-$  anwenden und erhalten durch Subtraktion dieser beiden Transformationsformeln die gewünschte Aussage auch für  $g$ .

Außerdem reicht es wieder wie im Beweis von Satz 30.7, die Ungleichung

$$\int_{D'} g(y) dy \leq \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx$$

zu zeigen: Anwenden dieser Ungleichung auf den Diffeomorphismus  $f^{-1}: D' \rightarrow D$  und die Funktion  $D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(g \circ f) \cdot |\det f'|$  liefert dann nämlich auch die andere Ungleichung

$$\int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx \leq \int_{D'} (g \circ f)(f^{-1}(y)) \cdot |\det f'(f^{-1}(y))| \cdot |\det(f^{-1})'(y)| dy = \int_{D'} g(y) dy,$$

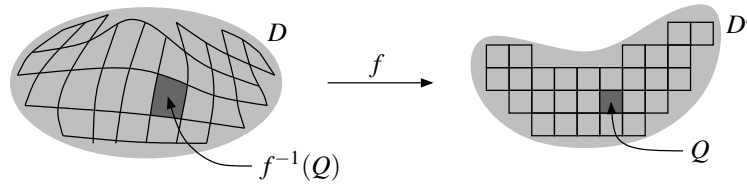
da  $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = (f \circ f^{-1})'(y) = \operatorname{id}'(y) = E$  nach der Kettenregel aus Satz 25.29 gilt.



Dazu sei nun  $Z$  eine Zerlegung eines Quaders, der  $D'$  enthält. Dann folgt mit der Funktion  $g_{D'}$  wie in Definition 29.1 (a)

$$\begin{aligned}
 \text{US}(g_{D'}, Z) &= \sum_{Q \in \text{TQ}(Z)} \inf g_{D'}(Q) \cdot \text{vol}(Q) \\
 &= \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \subset D'} \inf g(Q) \cdot \text{vol}(Q) \\
 &= \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \subset D'} \inf g(f^{-1}(Q)) \cdot \text{vol}(f^{-1}(Q)) \\
 &\leq \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \subset D'} \inf g(f^{-1}(Q)) \cdot \int_{f^{-1}(Q)} |\det f'(x)| dx \quad (\text{Satz 30.11}) \\
 &\leq \sum_{Q \in \text{TQ}(Z): Q \subset D'} \int_{f^{-1}(Q)} g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx \quad (\text{Folgerung 29.7 (c)}) \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx.
 \end{aligned}$$

Dabei zeigt das Bild unten rechts die oben in den Summen auftretenden Teilquader  $Q$  der Zerlegung  $Z$ , die ganz in  $D'$  liegen und auf denen somit das Infimum von  $g_{D'}$  größer als 0 sein kann. Beachte außerdem für (\*), dass für zwei solche Teilquader  $Q, Q' \in \text{TQ}(Z)$  mit  $Q \cap Q'$  nach Satz 30.2 auch der Durchschnitt  $f^{-1}(Q) \cap f^{-1}(Q') = f^{-1}(Q \cap Q')$  eine Nullmenge ist und die behauptete Ungleichung somit aus der Additivität des Integrals gemäß Folgerung 29.9 (a) folgt, da sich die Mengen  $f^{-1}(Q)$  für die betrachteten Teilquader  $Q$  bis auf diese Nullmengen wie im Bild unten links disjunkt zu einer Teilmenge von  $D$  vereinigen.



Die rechte Seite der obigen Ungleichungskette ist also eine obere Schranke für alle betrachteten Untersummen von  $g_{D'}$ . Für das Supremum dieser Untersummen, also das gesuchte Integral, folgt somit wie behauptet

$$\int_{D'} g(y) dy \leq \int_D g(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx. \quad \square$$

**Bemerkung 30.13.**

- (a) Es seien  $f: D \rightarrow D'$  ein Diffeomorphismus wie in Satz 30.12 sowie  $K \subset D$  eine kompakte messbare Menge. Wenden wir den Transformationssatz dann auf die Indikatorfunktion  $1_{f(K)}$  der nach Folgerung 30.5 (b) ebenfalls messbaren Menge  $f(K)$  an, so erhalten wir die Volumentransformationsformel für Diffeomorphismen

$$\text{vol}(f(K)) = \int_{D'} 1_{f(K)}(y) dy = \int_D 1_{f(K)}(f(x)) \cdot |\det f'(x)| dx = \int_K |\det f'(x)| dx$$

und damit die Aussage, dass in Satz 30.11 sogar die Gleichheit gilt.

- (b) Man kann zeigen, dass die Aussage von Satz 30.12 bereits gilt, wenn nur die Ausgangsfunktion  $g$  als integrierbar vorausgesetzt wird – die Integrierbarkeit der transformierten Funktion  $(g \circ f) \cdot |\det f'|$  ist dann automatisch. Wir werden dies hier jedoch nicht beweisen, da dies noch etwas aufwändiger wäre und sich die Integrierbarkeit beider Funktionen in den meisten konkret gegebenen Anwendungsfällen ohnehin sofort aus dem Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium in Folgerung 29.30 ergibt.
- (c) Im Fall  $n = 1$  ist  $f'(x)$  im Transformationssatz eine  $1 \times 1$ -Matrix, so dass  $\det f'(x) = f'(x)$  gilt. Die Formel aus Satz 30.12 sieht damit bis auf die Betragsstriche formal so aus wie die Substitutionsregel für eindimensionale Integrale aus Satz 12.31.

Diese Betragstriche kommen daher, dass im Fall einer *monoton fallenden* Koordinatentransformation in Satz 12.31 (also wenn dort  $f' < 0$  gilt) durch die Substitution der Grenzen im resultierenden Integral die Obergrenze kleiner ist als die Untergrenze – was gemäß Notation 12.15 genau das Vorzeichen des Integrals ändert. Dieses Vorzeichen wird in unserer mehrdimensionalen Integrationstheorie (in der es generell keine Unter- und Obergrenzen, sondern nur eine *Menge* als Integrationsbereich gibt) berücksichtigt, indem wir statt  $f'$  den Betrag von  $f'$  verwenden.

80

**Beispiel 30.14** (Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}^2$ ). Wir betrachten noch einmal die ebene Polarkoordinatenabbildung aus Satz 9.26 und Beispiel 27.4, die durch die Einschränkung

$$f: \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

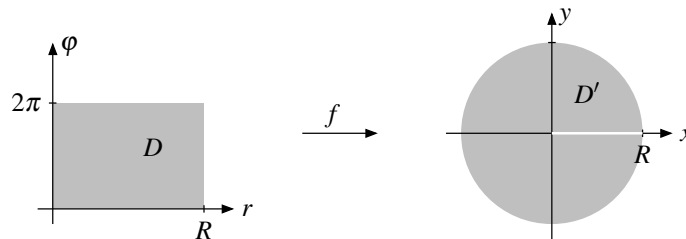
also das Herausnehmen der Punkte mit Winkel 0, zu einem Diffeomorphismus wird. Schränken wir die Abbildung nun weiter auf beschränkte offene Mengen  $D$  und  $D'$  ein, so dass  $f|_D: D \rightarrow D'$  dort bijektiv und damit ebenfalls wieder ein Diffeomorphismus ist, besagt Satz 30.12 also

$$\int_{D'} g(x, y) d(x, y) = \int_D g(f(r, \varphi)) r d(r, \varphi)$$

(sofern die beiden Integrale existieren), da wir in Beispiel 27.4 bereits die Determinante der Ableitungsmatrix  $\det f'(r, \varphi) = r$  berechnet haben. Hier sind zwei konkrete Beispiele dafür.

- (a) (*Kreisfläche*) Wir wollen den Flächeninhalt des (euklidischen) Kreises  $K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  berechnen. Dazu verwenden wir wie im Bild unten Polarkoordinaten mit Start- bzw. Zielbereich

$$D = (0, R) \times (0, 2\pi) \quad \text{und} \quad D' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 < R^2 \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}.$$



Die Menge  $D'$  unterscheidet sich dabei vom gewünschten Kreis  $K_R(0)$  nur durch eine Nullmenge, so dass es keine Rolle spielt, von welcher dieser beiden Mengen wir das Volumen berechnen. Aus dem gleichen Grund sind auch die resultierenden Integrale in Polarkoordinaten über die Bereiche  $(0, R) \times (0, 2\pi)$  und  $[0, R] \times [0, 2\pi]$  gleich. Derartige Abänderungen der Integrationsbereiche, um Mengen je nach Bedarf offen bzw. abgeschlossen zu machen, werden wir im Folgenden in der Regel durchführen, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen.

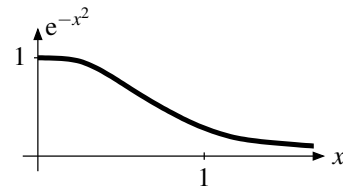
Wir erhalten für die gesuchte Kreisfläche also mit Hilfe des Transformationssatzes wie erwartet

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_R(0)) &= \int_{D'} 1 d(x, y) = \int_D r d(r, \varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\varphi dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_0^R \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

- (b) Das in der Praxis häufig vorkommende uneigentliche eindimensionale Integral

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

lässt sich nicht mit den herkömmlichen Methoden berechnen, da der Integrand keine Stammfunktion besitzt, die sich mit den bekannten speziellen Funktionen aus Kapitel 9 ausdrücken lässt.



In der Tat kann man Integrale über  $e^{-x^2}$  mit gegebenen Grenzen in  $\mathbb{R}$  aus diesem Grund nur mit Näherungsverfahren berechnen. Das obige *uneigentliche* Integral  $I$  ist jedoch mit einem unerwarteten Trick durch Polarkoordinaten exakt berechenbar: Dazu quadrieren wir das Integral zunächst und erhalten

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-y^2} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \cdot \int_0^n e^{-y^2} dy \right) \quad (\text{Grenzwertsatz 5.13 (b)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,n] \times [0,n]} e^{-x^2-y^2} d(x,y) \quad (\text{Satz 28.16 von Fubini}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y). \quad (\text{Definition 29.45 (a)}) \end{aligned}$$

Verwenden wir zur Berechnung dieses uneigentlichen zweidimensionalen Integrals über  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  nun die ausschöpfende Folge von Viertelkreisen

$$B_n := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq n^2 \text{ und } x, y \geq 0 \right\}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ , so erhalten wir mit Polarkoordinaten wegen  $x^2 + y^2 = r^2$

$$I^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r d\varphi dr = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-r^2} r dr.$$

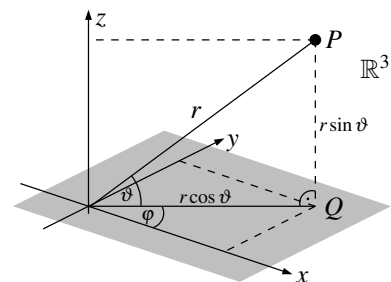
Im Gegensatz zum ursprünglichen Problem ist dieses Integral nun wegen des zusätzlichen Faktors  $r$  mit Hilfe einer Substitution für  $r^2$  einfach zu lösen: Wir erhalten

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^n = -\frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n^2} - 1) = \frac{\pi}{4}$$

und damit für das Ausgangsintegral

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Beispiel 30.15** (Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^3$ ). Die zu Polarkoordinaten analoge Konstruktion im Dreidimensionalen sind die sogenannten *Kugelkoordinaten*. Hier beschreibt man einen Punkt  $P \in \mathbb{R}^3$  wie im Bild rechts durch eine Abstandskordinate  $r$  sowie zwei Winkelkoordinaten  $\varphi$  und  $\vartheta$ : Ist  $Q$  die orthogonale Projektion von  $P$  auf die  $x$ - $y$ -Ebene, so ist  $r$  der Abstand von  $P$  zum Nullpunkt,  $\varphi$  der Winkel zwischen  $Q$  und der  $x$ -Achse und  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $P$  und der  $x$ - $y$ -Ebene.



Der Abstand von  $Q$  zum Nullpunkt ist dann  $r \cos \vartheta$ , und damit gilt für die Koordinaten der beteiligten Punkte

$$Q = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Kugelkoordinatenabbildung ist damit also

$$f: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix},$$

und sie wird offensichtlich bijektiv, wenn wir Start- und Zielbereich auf

$$D = \mathbb{R}_{>0} \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad D' = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : x \geq 0, z \in \mathbb{R} \right\}$$

einschränken. Die Jacobi-Matrix von  $f$  ist damit

$$f' = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi & -r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta & 0 & r \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante berechnet sich z. B. mit Beispiel 18.13 (b) einfach zu  $\det f' = r^2 \cos \vartheta$ .

Wie in Beispiel 30.14 (a) können wir damit nun z. B. das Volumen der (euklidischen) Kugel  $K_R(0)$  in  $\mathbb{R}^3$  vom Radius  $R$  berechnen und erhalten wie erwartet

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_R(0)) &= \int_{K_R(0)} 1 \, d(x, y, z) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\ &= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \, d\varphi \, dr \\ &= 4\pi \int_0^R r^2 \, dr \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

**Aufgabe 30.16.** Berechne das Integral  $\int_D (2x - y) \, d(x, y)$ , wobei  $D$  das Parallelogramm mit den Eckpunkten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  ist.

(Hinweis: Betrachte dazu den Diffeomorphismus  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$ .)

**Aufgabe 30.17.** Berechne das Integral  $\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \, d(x, y)$ , wobei  $D$  das Gebiet ist, das von den vier Kurven  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$ ,  $y = x$  und  $y = 2x$  im Bereich  $x \geq 0$  begrenzt wird.

**Aufgabe 30.18.** Es seien  $A \subset \mathbb{R}$  eine kompakte messbare Menge und

$$M_A := \{((1-t^2)x, t) : x \in A \text{ und } t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- Skizziere  $M_A$  für den Fall  $A = [1, 2]$ .
- Zeige, dass  $M_A$  messbar ist.
- Berechne  $\text{vol}(M_A)$  in Abhängigkeit von  $\text{vol}(A)$ .

**Aufgabe 30.19.** Es seien  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Diffeomorphismus und  $K_r(a)$  die abgeschlossene Kugel in der Maximumsnorm um  $a \in \mathbb{R}^3$  mit Radius  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Zeige, dass

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(f(K_r(a)))}{8r^3} = |\det f'(a)|.$$