24. Stetigkeit in metrischen Räumen

Wie im eindimensionalen Fall kommen wir nach unserem Studium von Grenzwerten von Folgen im letzten Kapitel jetzt zur Stetigkeit, also zu Grenzwerten von Funktionen. Auch diese können wir wieder in allgemeinen metrischen Räumen betrachten.

24.A Stetige Abbildungen

Zur Definition stetiger Abbildungen erinnern wir uns noch einmal an die entsprechende Definition 8.3 in $\mathbb{K}$: Ist $f\colon D \to \mathbb{K}$ eine Funktion auf einer Teilmenge D von $\mathbb{K}$ und a ein Punkt im Abschluss $\overline{D}$ von D, so sagen wir, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen ein $c \in \mathbb{K}$ konvergiert, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon.$$

Wie im Fall von Grenzwerten von Folgen können wir dies unmittelbar auf metrische Räume übertragen, indem wir den Abstand zweier Punkte nun mit der Metrik messen:

Definition 24.1 (Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit)**.** Es seien M und N metrische Räume, $D \subset M$ eine beliebige Teilmenge und $f\colon D \to N$ eine Abbildung.

(a) Ist $a \in \overline{D}$, so heißt ein Punkt $c \in N$ **Grenzwert** von f in a, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),c) < \varepsilon,$$

also mit anderen Worten wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(c)$$

(beachte dabei, dass $d(x,a)$ die Metrik in M, $d(f(x),c)$ dagegen die in N ist). Wie im eindimensionalen Fall werden wir wieder in Bemerkung 24.5 (a) sehen, dass ein solcher Grenzwert eindeutig ist, falls er existiert, so dass wir dann von *dem* Grenzwert von f in a sprechen können. Wir schreiben dies dann als

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D}} f(x) = c$$

oder auch als „$f(x) \to c$ für $x \to a$“, und sagen, dass $f(x)$ für $x \to a$ gegen c **konvergiert**. Existiert ein solcher Grenzwert nicht, so heißt f **divergent** in a.

(b) Liegt der Punkt a sogar in D, so kommt als Grenzwert von f in a mit derselben Begründung wie in Bemerkung 8.4 nur $f(a)$ in Frage. Wenn $f(x)$ dann für $x \to a$ gegen $f(a)$ konvergiert, d. h. wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}\ \forall x \in D : d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(a)) < \varepsilon$$

bzw.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : f(D \cap U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$$

gilt, so heißt f **stetig** in a. Liegt a nicht in D, so heißt f **stetig fortsetzbar** nach a, wenn der Grenzwert $c = \lim_{x\to a} f(x)$ existiert.

(c) Die Funktion f heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Die anschauliche Interpretation dieser Begriffe ist in allgemeinen metrischen Räumen natürlich noch dieselbe wie in $\mathbb{K}$: So ist eine Abbildung f z. B. stetig, wenn „kleine Änderungen in der Variablen x auch nur kleine Änderungen der Funktionswerte $f(x)$ zur Folge haben“ (siehe Bemerkung 8.6). Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass auch die Sätze über stetige Funktionen sowie ihre Beweise noch sehr ähnlich zu denen aus Kapitel 8 sind.

Bemerkung 24.2. Nach Beispiel 23.12 (a) ist jede Teilmenge D eines metrischen Raumes M mit der eingeschränkten Metrik selbst wieder ein metrischer Raum. Da wir die Metrik auf M für die Definition 24.1 (b) der Stetigkeit (also im Fall $a \in D$) auch nur für Punkte in D benötigen, können wir für Stetigkeitsbetrachtungen in metrischen Räumen in Zukunft also ohne Einschränkung $M = D$ setzen und so die Notationen etwas vereinfachen: In diesem Fall ist eine Funktion $f: M \to N$ nach Definition 24.1 (b) genau dann in einem Punkt $a \in M$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$.

Bei der stetigen Fortsetzbarkeit ist eine solche Vereinfachung dagegen nicht möglich.

Beispiel 24.3 (Stetigkeit der Metrik bzw. Norm)**.**

(a) In jedem metrischen Raum M ist die Abstandsfunktion
$$f: M \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x,b)$$
zu einem fest gewählten Punkt $b \in M$ stetig: Es seien $a \in M$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben; wir wählen $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \varepsilon$ nach der Dreiecksungleichung
$$d(x,b) - d(a,b) \le d(x,a) < \varepsilon \qquad \text{sowie} \qquad d(a,b) - d(x,b) \le d(x,a) < \varepsilon,$$
und damit auch $|f(x) - f(a)| = |d(x,b) - d(a,b)| < \varepsilon$, da $|d(x,b) - d(a,b)|$ in jedem Fall eine der beiden Zahlen $d(x,b) - d(a,b)$ und $d(a,b) - d(x,b)$ ist. Also ist f stetig in jedem Punkt $a \in M$.

(b) Ist V ein normierter Raum, so ist nach (a) auch die Normfunktion
$$f: V \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\| = d(x,0)$$
stetig.

Wie in $\mathbb{K}$ gibt es auch für metrische Räume wieder die Möglichkeit, Grenzwerte von Funktionen auf solche von Folgen zurückzuführen:

Satz 24.4 (Folgenkriterium). *Es seien M, N metrische Räume, $D \subset M$ und $f: D \to N$ eine Funktion.*

(a) *(**Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte**) Für $a \in \overline{D}$ und $c \in N$ gilt*
$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to c.$$

(b) *(**Folgenkriterium für Stetigkeit**) Für $a \in D$ gilt*
$$f \text{ ist stetig in } a \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } x_n \to a \text{ gilt } f(x_n) \to f(a).$$

Beweis. Der Beweis ist (bis auf die Ersetzung der Betragsstriche durch die Metrik) wörtlich genauso wie der von Satz 8.11. □

Bemerkung 24.5.

(a) Da eine Folge in N nach Lemma 23.15 höchstens einen Grenzwert besitzen kann, folgt aus Satz 24.4 unmittelbar, dass auch der Grenzwert $\lim_{x \to a} f(x)$ von Funktionen im Fall der Existenz eindeutig ist.

(b) Da wir aus Bemerkung 23.18 schon wissen, dass Grenzwerte von Folgen eine topologische Eigenschaft sind, gilt dies nach Satz 24.4 nun auch für Grenzwerte bzw. die Stetigkeit von Funktionen.

Beispiel 24.6 (Stetigkeit von Koordinatenabbildungen)**.** Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $i = 1, \dots, n$ ist die Abbildung
$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ x \mapsto x_i,$$
die jedem Vektor seine i-te Koordinate zuordnet, stetig: Nach Bemerkung 24.5 (b) können wir dies in der zur euklidischen Norm äquivalenten Maximumsnorm überprüfen. Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $x, a \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x - a\|_\infty < \delta := \varepsilon$, dass
$$|f(x) - f(a)| = |x_i - a_i| \le \|x - a\|_\infty < \varepsilon.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie man die Stetigkeit konkret gegebener Abbildungen einfach überprüfen kann. Am wichtigsten ist dabei der Fall, in dem der Start- bzw. Zielraum eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist. Als erstes Resultat hierzu besagt das folgende Lemma, dass wir die Stetigkeit in diesem Fall koordinatenweise im Zielraum überprüfen können.

Lemma 24.7 (Koordinatenweise Stetigkeit im Zielraum)**.** *Es seien D eine Teilmenge eines metrischen Raumes M und*

$$f\colon D \to \mathbb{K}^m,\ x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

eine Abbildung mit Komponentenfunktionen $f_1,\dots,f_m\colon D \to \mathbb{K}$. Ist nun $a \in \overline{D}$ und $c \in \mathbb{K}^m$, so gilt genau dann $\lim_{x\to a} f(x) = c$, wenn $\lim_{x\to a} f_i(x) = c_i$ für alle $i = 1,\dots,m$ ist, wobei c_i die Koordinaten von c bezeichnet.

Für $a \in D$ ergibt sich also insbesondere, dass f genau dann in a stetig ist, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i\colon D \to \mathbb{K}$ es sind.

Beweis. Es sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in D, die gegen a konvergiert. Nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (angewendet sowohl auf f als auch auf $f_1,\dots,f_m$) genügt es zu zeigen, dass $f(x_n)$ genau dann gegen c konvergiert, wenn $f_i(x_n)$ für alle $i = 1,\dots,m$ gegen c_i konvergiert. Dies ergibt sich aber sofort aus Lemma 23.19. □

Wir können die Stetigkeit einer Abbildung nach $\mathbb{K}^m$ also sofort auf die Stetigkeit einer Abbildung nach $\mathbb{K}$ zurückführen. Können wir die Situation noch weiter vereinfachen und die Stetigkeit auch noch koordinatenweise im Startraum überprüfen, falls dieser eine Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ ist? Das folgende Beispiel zeigt, dass dies leider nicht der Fall ist.

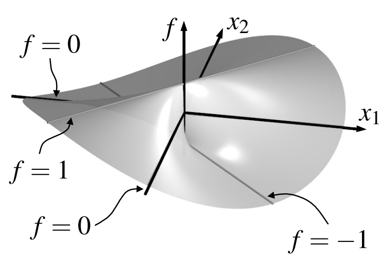
Beispiel 24.8. Wir betrachten die im Bild unten rechts dargestellte Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Man kann sie sich leicht in Polarkoordinaten $(x_1,x_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ vorstellen, denn der gegebene Ausdruck ist dann gleich $\frac{2x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$. Die Funktion f ist abgesehen vom Nullpunkt also auf jeder Ursprungsgeraden konstant, z. B. auf den Koordinatenachsen gleich 0 und auf der durch $x_2 = x_1$ gegebenen Diagonalen (mit $\varphi = \frac{\pi}{4}$) gleich 1.

Daran sehen wir auch schon, dass f z. B. nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) im Nullpunkt unstetig ist: Die Folge $\left((\frac{1}{n},\frac{1}{n})^\mathsf{T}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert zwar (entlang der Diagonalen) gegen den Ursprung, aber es ist natürlich

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \frac{2/n^2}{2/n^2} = 1 \not\to 0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



In der Tat ist das Folgenkriterium oft nützlich, um die *Unstetigkeit* einer Funktion zu zeigen, da es hierfür ja genügt, eine einzige Folge anzugeben, die die Bedingung des Kriteriums verletzt.

Andererseits ist aber für jedes fest gewählte $x_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $x_1 \mapsto f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ in *einer* Variablen x_1 stetig: Für $x_2 = 0$ ergibt sich einfach die Nullfunktion, und für alle anderen x_2 benötigen wir nur die erste Zeile in der Definition von f, die dann natürlich eine stetige Funktion in x_1 ist. Genauso gilt dies, wenn wir x_1 fest halten und x_2 als variabel betrachten.

Die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ ist also im Nullpunkt nicht stetig, obwohl beide Funktionen in einer Variablen, die man durch Festhalten der jeweils anderen daraus erhält, dort stetig sind. Anschaulich liegt das daran, dass man beim Festhalten jeweils einer Variablen nur untersucht, wie sich die Funktion verhält, wenn man sich *auf einer der Koordinatenachsen* dem Nullpunkt nähert, während man sich ihm für die Überprüfung der Stetigkeit *auf einem beliebigen Weg* nähern muss. Zusammen mit Lemma 24.7 sehen wir also:

Die Stetigkeit einer Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ kann zwar koordinatenweise im Zielraum, aber nicht koordinatenweise im Startraum überprüft werden.

Dennoch wollen wir jetzt aber sehen, dass die „gewohnten Rechenregeln" aus Kapitel 8 für Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen auch in unserem hier betrachteten allgemeineren Fall gelten.

Lemma 24.9 (**Grenzwertsätze** für Funktionen)**.** *Es seien $D \subset M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes M und $f,g\colon D \to \mathbb{K}$ zwei Funktionen. Weiterhin sei $a \in \overline{D}$ ein Punkt, so dass die Grenzwerte von f und g in a existieren. Dann gilt*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$

und eine entsprechende Aussage auch für $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ und $\frac{f(x)}{g(x)}$ (letzteres natürlich nur falls $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$). Insbesondere sind für $a \in D$ also mit f und g auch $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ in a stetig (letzteres wiederum nur falls $g(a) \neq 0$).

Beweis. Der Beweis läuft wörtlich genauso wie der von Satz 8.13 – nämlich indem man die Aussage mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Satz 24.4 auf die entsprechenden Aussagen über Grenzwerte von Folgen in $\mathbb{K}$ (siehe Satz 5.13) zurückführt. □

Lemma 24.10 (Verkettung stetiger Abbildungen)**.** *Es seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to R$ zwei Abbildungen zwischen metrischen Räumen M,N,R. Ist dann $a \in M$, so dass f in a und g in $f(a)$ stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig in a.*

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie in Satz 8.15 bzw. Bemerkung 8.16: Ist $(x_n)_n$ eine Folge in M mit $x_n \to a$, so gilt $f(x_n) \to f(a)$ nach dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) wegen der Stetigkeit von f in a, und dann genauso $g(f(x_n)) \to g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g in $f(a)$. Also ist $g \circ f$ nach dem Folgenkriterium in a stetig. □

Beispiel 24.11.

(a) Die in Beispiel 24.8 betrachtete Funktion ist nach Lemma 24.9 in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig, da sie in einer Umgebung eines jeden solchen Punktes durch Addition, Multiplikation und Division aus den nach Beispiel 24.6 stetigen Koordinatenfunktionen x_1 und x_2 zusammengesetzt ist.

(b) Nach Lemma 24.7 und 24.9 ist insbesondere jede *lineare* Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$ (für eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m\times n,\mathbb{K})$) stetig, da die zugehörigen Koordinatenfunktionen $x \mapsto a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$ es sind. Diese Aussage erscheint zwar selbstverständlich, ist jedoch für beliebige normierte Räume falsch: Für unendlich-dimensionale Vektorräume müssen lineare Abbildungen im Sinne von Definition 13.16 nicht notwendig stetig sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Aufgabe 24.12 (Stetigkeit linearer Abbildungen)**.** Es sei V der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0,1]$. Zeige, dass die lineare Abbildung $f\colon V \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(0)$ zwar bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf V, aber nicht bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ auf V stetig ist.

Aufgabe 24.13. Sind die folgenden Funktionen stetig in den Nullpunkt fortsetzbar?

$$f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(x_1+x_2)^3}{x_1^2+x_2^2}, \qquad g\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1^{x_2}.$$

Aufgabe 24.14. Zeige, dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$$

zwar unstetig ist, ihre Einschränkung auf jede Gerade durch den Nullpunkt jedoch stetig ist.

Aufgabe 24.15.

(a) Es seien M ein metrischer Raum und $f,g\colon M \to \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung $\max(f,g)\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max(f(x),g(x))$ stetig ist.

(b) Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ stetig ist.

24.B Eigenschaften stetiger Abbildungen

Nachdem wir jetzt wissen, wie wir von Abbildungen ihre Stetigkeit überprüfen können, kommen wir nun zu den Eigenschaften stetiger Funktionen. Als Erstes schauen wir uns dazu an, wie sich Umgebungen sowie offene und abgeschlossene Mengen unter stetigen Abbildungen verhalten. Unser erstes Ergebnis zeigt dabei noch einmal deutlich, dass die Stetigkeit von Funktionen eine topologische Eigenschaft ist (siehe Bemerkung 24.5 (b)).

Lemma 24.16 (Charakterisierung stetiger Funktionen durch Umgebungen)**.** *Es seien $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und $a \in M$. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig in a.*

(b) *Für jede Umgebung $U \subset N$ von $f(a)$ ist $f^{-1}(U) \subset M$ eine Umgebung von a (man sagt auch: „Urbilder von Umgebungen sind Umgebungen“).*

Beweis. Es gilt:

f ist stetig in a

$\Leftrightarrow$ Für alle ε gibt es ein δ mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ (Bemerkung 24.2)

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung U von $f(a)$ gibt es ein δ mit $f(U_\delta(a)) \subset U$ $(*)$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung U von $f(a)$ gibt es ein δ mit $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U)$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder Umgebung U von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a (Definition 23.13 (b)),

wobei in $(*)$ die Folgerung “$\Leftarrow$” gilt, da jede ε-Umgebung eine Umgebung ist, und “$\Rightarrow$” gilt, da jede
60 Umgebung von $f(a)$ eine ε-Umgebung von $f(a)$ enthält. □

Für die Stetigkeit einer gesamten Abbildung (also nicht nur in einem einzelnen Punkt) gibt es erstaunlicherweise das folgende sehr einfache Kriterium.

Satz 24.17 (Charakterisierung stetiger Funktionen durch offene bzw. abgeschlossene Mengen)**.** *Für eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen metrischen Räumen sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig (in jedem Punkt von M).*

(b) *Für jede offene Menge $U \subset N$ ist $f^{-1}(U) \subset M$ offen (man sagt: „Urbilder offener Mengen sind offen“).*

(c) *Für jede abgeschlossene Menge $A \subset N$ ist $f^{-1}(A) \subset M$ abgeschlossen (man sagt: „Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“).*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Äquivalenz (a) $\Leftrightarrow$ (b):

f ist stetig $\overset{24.16}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in M$ und alle Umgebungen U von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von a

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in M$ und alle U offen mit $f(a) \in U$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von a

$\Leftrightarrow$ Für alle U offen und alle $a \in f^{-1}(U)$ ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von a

$\overset{23.33\,(a)}{\Leftrightarrow}$ Für alle U offen ist $f^{-1}(U)$ offen, wobei in $(*)$ die Folgerung „$\Rightarrow$“ gilt, weil jede offene Menge U mit $f(a) \in U$ eine Umgebung von $f(a)$ ist, und „$\Leftarrow$“ gilt, da jede Umgebung von $f(a)$ eine offene Menge U mit $f(a) \in U$ enthält.

Die Äquivalenz (b) $\Leftrightarrow$ (c) folgt direkt durch Übergang zum Komplement: Setzen wir $A = N \backslash U$, so ist A genau dann abgeschlossen, wenn U offen ist, und analog $f^{-1}(A) = f^{-1}(N \backslash U) = M \backslash f^{-1}(U)$ genau dann abgeschlossen, wenn $f^{-1}(U)$ offen ist. Dies zeigt unmittelbar die Äquivalenz der beiden Aussagen. □

Beispiel 24.18 (Offene und abgeschlossene Bedingungen)**.** Sind M ein metrischer Raum und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist die Menge

$$\{x \in M : f(x) > 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$$

als Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen Abbildung nach Satz 24.17 offen in M. Ebenso gilt dies natürlich für die Mengen

$$\{x \in M : f(x) < 0\} \qquad \text{und} \qquad \{x \in M : f(x) \neq 0\}$$

als Urbilder von $\mathbb{R}_{<0}$ bzw. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Dagegen ist die Menge

$$\{x \in M : f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

als Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}_{\geq 0} \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen in M, genauso wie die Mengen

$$\{x \in M : f(x) \leq 0\} \qquad \text{und} \qquad \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Mit dieser Beobachtung kann man in vielen Fällen sehr einfach herausfinden, ob eine gegebene Menge offen bzw. abgeschlossen ist: So sieht man z. B. sofort, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^3 > \cos x_2\} \quad \subset \mathbb{R}^2$$

offen sein muss, da sie das Urbild von $\mathbb{R}_{>0}$ unter der stetigen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1^3 - \cos x_2$ ist. Man sagt in diesem Sinne oft auch, dass „$>$“, „$<$“ und „$\neq$“ (jeweils mit reellwertigen stetigen Ausdrücken auf beiden Seiten) *offene Bedingungen* sind, während „$\geq$“, „$\leq$“ und „$=$“ *abgeschlossene Bedingungen* darstellen.

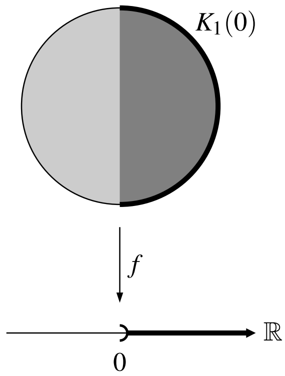
Bemerkung 24.19 (Relativ offene Mengen)**.** Es seien M und N metrische Räume, $D \subset M$ und $f \colon D \to N$ eine Abbildung. Nach Satz 24.17 ist f genau dann stetig, wenn zu jeder offenen Menge $U \subset N$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen im Startraum D ist.

Beachte jedoch, dass dies *nicht* heißen muss, dass $f^{-1}(U)$ auch offen in M ist! In der Tat ist $f^{-1}(U)$ nach Aufgabe 23.37 (b) genau dann offen in D, wenn es eine in M offene Teilmenge V gibt mit $f^{-1}(U) = V \cap D$ – man sagt in diesem Fall auch manchmal, dass $f^{-1}(U)$ *relativ offen* in D ist.

Als anschauliches Beispiel hierfür können wir die stetige Abbildung

$$f \colon K_1(0) \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1$$

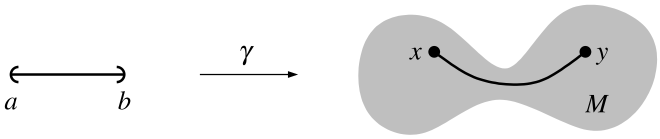
auf dem abgeschlossenen Einheitskreis $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ betrachten. Das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ unter f ist in diesem Fall (wie im Bild dunkel eingezeichnet) der rechte Halbkreis, wobei vom Rand dieses Halbkreises der Bogen mit enthalten ist, der Durchmesser jedoch nicht. Diese Menge ist wegen der enthaltenen Randpunkte auf dem Halbkreisbogen natürlich nicht offen in $\mathbb{R}^2$ – sie ist aber (relativ) offen in $K_1(0)$, denn sie ist der Durchschnitt von $K_1(0)$ mit der nach Beispiel 24.18 offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$.



Als Nächstes wollen wir untersuchen, ob wir eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes 8.21 für beliebige metrische Räume finden können, d. h. ob wir für gewisse Klassen von reellwertigen Funktionen sagen können, dass sie mit zwei Werten auch jede Zahl dazwischen annehmen müssen. Die entscheidende Frage ist hierbei, ob die Definitionsmenge „nur aus einem zusammenhängenden Teil besteht“ – denn wenn sie wie z. B. die Menge $M = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ „aus zwei unverbundenen

Teilen besteht“, können wir natürlich leicht eine stetige Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ konstruieren, die die Zwischenwertbedingung nicht erfüllt (in unserem Beispiel könnten wir dafür schon die Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ wählen, da hierfür zwar 1 und 2, aber keine der Zahlen dazwischen im Bild von f liegen). Die mathematisch korrekte Formulierung dieser Bedingung ist die folgende:

Definition 24.20 (Wegzusammenhängende Räume)**.** Ein metrischer Raum M heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x,y \in M$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to M$ eines reellen Intervalls $[a,b]$ nach M gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Man nennt γ in diesem Fall einen **Weg** von x nach y – der Raum M heißt also wegzusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte in M durch einen Weg verbinden lassen.



Beispiel 24.21.

(a) Jedes Intervall $M \subset \mathbb{R}$ aus Notation 4.17 (a) (offen, abgeschlossen, halboffen oder uneigentlich) ist wegzusammenhängend, denn für zwei beliebige Punkte $x,y \in M$ liegt die gerade Verbindungsstrecke $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x + t\,(y-x)$ von x nach y immer in M.

(b) Die Menge $M = [0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ von oben ist nicht wegzusammenhängend: Wäre $\gamma\colon [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\gamma(a) = 1$ und $\gamma(b) = 2$, so müsste γ nach dem Zwischenwertsatz 8.21 auch jeden Wert zwischen 1 und 2 annehmen – was aber nicht möglich ist, da diese Zahlen nicht in M liegen.

Für wegzusammenhängende Räume erhalten wir nun wie erwartet eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes 8.21 in $\mathbb{R}$:

Satz 24.22 (Zwischenwertsatz). *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ferner sei M wegzusammenhängend. Dann gilt:*

(a) *Das Bild $f(M) \subset N$ ist ebenfalls wegzusammenhängend.*

(b) *Im Fall $N = \mathbb{R}$ nimmt f mit je zwei Funktionswerten auch jeden Wert dazwischen an.*

Beweis. Es seien $x,y \in f(M)$ beliebig. Wir können dann $u,v \in M$ wählen mit $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Da M wegzusammenhängend ist, gibt es nun einen Weg $\gamma\colon [a,b] \to M$ von u nach v. Die Abbildung $f \circ \gamma\colon [a,b] \to f(M)$ ist dann ein Weg in $f(M)$ von x nach y, woraus sich bereits die Behauptung (a) ergibt. Im Fall $N = \mathbb{R}$ folgt zusätzlich mit dem eindimensionalen Zwischenwertsatz 8.21, dass $f \circ \gamma$ und damit auch f mit x und y auch jede reelle Zahl dazwischen als Wert annehmen müssen. □

Aufgabe 24.23. Es sei M ein metrischer Raum. Man zeige:

(a) Sind $a,b \in M$ und $A \subset M$ mit $a \in A$ und $b \notin A$, so enthält jeder Weg in M von a nach b einen Punkt in ∂A.

(b) Ist M wegzusammenhängend, so sind $\emptyset$ und M die einzigen Teilmengen von M, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die Konzepte der gleichmäßigen Stetigkeit und Konvergenz aus Abschnitt 8.C übertragen sich wie erwartet auf den Fall metrischer Räume. Mit dem gleichen Argument wie z. B. bei der Beschränktheit in Bemerkung 23.21 (b) stimmen auch sie in normierten Räumen zu äquivalenten Normen überein, obwohl sie keine topologischen Eigenschaften sind.

Definition 24.24 (Gleichmäßige Stetigkeit und Konvergenz)**.** Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen.

(a) Die Abbildung f heißt **gleichmäßig stetig**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x,a \in M : d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),f(a)) < \varepsilon$$

(der entscheidende Punkt gegenüber der „normalen“ Stetigkeit ist also wie in Definition 8.34 (a) auch hier, dass das δ nur von ε, aber nicht vom betrachteten Punkt a abhängen darf).

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Funktion $f_n \colon M \to N$ gegeben. Ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in M$, d. h. gilt

$$\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

so nennt man die Funktionenfolge $(f_n)_n$ **punktweise konvergent** gegen f. Beachte, dass das n_0 dabei nicht nur von ε, sondern auch vom betrachteten Punkt x abhängen darf. Kann man n_0 jedoch auch unabhängig von x wählen, d. h. gilt sogar

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall x \in M : d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

so heißt die Funktionenfolge $(f_n)_n$ **gleichmäßig konvergent** gegen f.

Bemerkung 24.25. Da Definition 24.24 völlig analog zum eindimensionalen Fall ist, übertragen sich auch unsere damals dazu erzielten Ergebnisse und ihre Beweise unmittelbar auf die neue Situation:

(a) Ist $f \colon M \to N$ eine stetige Funktion zwischen metrischen Räumen und ist M kompakt, so ist f sogar gleichmäßig stetig (siehe Satz 8.36). Dabei bedeutet die Kompaktheit des metrischen Raumes M, dass M als Teilmenge von sich selbst im Sinne von Definition 23.50 kompakt ist.

(b) Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon M \to N$ auf einem metrischen Raum M gleichmäßig gegen $f \colon M \to N$, so ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig (siehe Satz 8.39).

(c) Eine Folge von Funktionen $f_n \colon M \to \mathbb{K}$ auf einem metrischen Raum M konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f \colon M \to \mathbb{K}$, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in M\}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (siehe Aufgabe 8.43).

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir schließlich noch einen oft nützlichen Satz zeigen, mit dem man die Existenz von Fixpunkten gewisser (stetiger) Abbildungen nachweisen kann. Da er im eindimensionalen Fall noch nicht besonders interessant ist, haben wir ihn damals in Kapitel 8 nicht in dieser Form bewiesen; am ehesten entspricht er vermutlich der Aussage von Aufgabe 8.30 (a).

Satz 24.26 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f \colon M \to M$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass es ein $q \in [0,1)$ gibt mit*

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$$

für alle $x, y \in M$ (eine solche Abbildung bezeichnet man auch als Kontraktion*).*

Dann hat f genau einen Fixpunkt, d. h. es gibt genau ein $a \in M$ mit $f(a) = a$.

Beweis. Um die Existenz eines Fixpunktes zu zeigen, konstruieren wir zu einem beliebigen Startpunkt $x_0 \in M$ rekursiv die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $x_{n+1} = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Abstände aufeinander folgender Glieder dieser Folge gilt induktiv

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq q\, d(x_n, x_{n-1}) \leq \cdots \leq q^n\, d(x_1, x_0). \qquad (*)$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, denn wählen wir zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q^{n_0}}{1-q}\, d(x_1, x_0) < \varepsilon$, so gilt für alle $m \geq n \geq n_0$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\leq (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n)\, d(x_1, x_0) && \text{(nach } (*)) \\ &\leq q^n \cdot \frac{1}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) && \text{(geometrische Reihe)} \\ &< \varepsilon && \text{(Wahl von } n_0). \end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit von M konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also gegen ein $a \in M$.

Beachte, dass f in a stetig ist, denn zu gegebenem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt für alle $x \in M$ mit $d(x,a) < \varepsilon$, dass $d(f(x), f(a)) \leq q\, d(x,a) \leq d(x,a) < \varepsilon$. Gehen wir in der Rekursionsgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$ zum Grenzwert $n \to \infty$ über, so erhalten wir mit dem Folgenkriterium aus Satz 24.4 (b) also

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

d. h. a ist ein Fixpunkt von f.

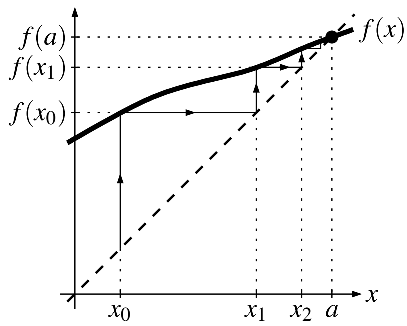
Es bleibt damit nur noch die Eindeutigkeit des Fixpunkts zu zeigen: Wäre $b \in M$ noch ein anderer Fixpunkt, so wäre $d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq q\, d(a,b)$, wegen $d(a,b) > 0$ erhalten wir dann also sofort den Widerspruch $1 \leq q$. □

Beispiel 24.27.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq q$ für ein $q \in [0,1)$ und alle $x \in \mathbb{R}$, so dass der Graph von f wie im Bild rechts also überall flacher als der der (gestrichelt eingezeichneten) Identität verläuft. Nach dem Mittelwertsatz 10.24 (a) gibt es dann für alle $x, y \in \mathbb{R}$ ein z zwischen x und y mit $f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x - y)$, und damit ist

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \leq q\,|x - y|.$$

Also ist f eine Kontraktion und hat damit nach Satz
61 24.26 genau einen Fixpunkt.



Das Bild zeigt auch sehr anschaulich die Konstruktion des Fixpunkts wie im Beweis des Satzes: Ausgehend von einem beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ bilden wir $f(x_0)$, nennen diesen Punkt x_1, bilden dann wieder $f(x_1)$ und nennen diesen Punkt x_2 usw., gehen also im Bild immer abwechselnd vertikal zum Graphen von f und horizontal zum Graphen der Identität. Auf diese Art erhalten wir eine Folge, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

(b) Der Banachsche Fixpunktsatz kann auch oft auf Funktionenräume angewendet werden und liefert dann die Existenz von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften. Als Beispiel dafür wollen wir untersuchen, ob es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \sin \varphi(x) + \sin x \quad \text{für alle } x \in [0,1].$$

Solche Gleichungen, die die Ableitung einer gesuchten Funktion durch die Funktion selbst ausdrücken, nennt man *Differentialgleichungen*, sie kommen in der Praxis an vielen Stellen vor. Sie zu lösen ist in der Regel schwierig, und in der Tat kann man für die oben angegebene Differentialgleichung mit uns bekannten Funktionen keine exakte Lösung angeben. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz können wir jedoch die Existenz einer Lösung beweisen, indem wir die Abbildung

$$f\colon C^0([0,1]) \to C^0([0,1]), \quad f(\varphi)(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \sin \varphi(t) + \sin t\right) dt$$

betrachten: Gibt es nämlich einen Fixpunkt von f, also eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = \int_0^x (\frac{1}{2} \sin \varphi(t) + \sin t)\, dt \quad \text{für alle } x \in [0,1],$$

so folgt daraus durch Differenzieren dieser Gleichung nach dem Hauptsatz 12.21 der Differential- und Integralrechnung sofort die gewünschte Differentialgleichung für φ. Da $C^0([0,1])$ mit der Maximumsnorm nach Aufgabe 23.30 (a) vollständig ist, müssen wir also nur zeigen, dass f bezüglich dieser Norm eine Kontraktion ist: Für alle $\varphi, \psi \in C^0([0,1])$ und

$x \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(\varphi)(x) - f(\psi)(x)| &= \left| \int_0^x \frac{1}{2} \big(\sin \varphi(t) - \sin \psi(t)\big)\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{2} \int_0^x |\sin \varphi(t) - \sin \psi(t)|\, dt && \text{(Satz 12.13 (d))} \\
&\le \frac{1}{2} \int_0^x |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt && \text{(Mittelwertsatz für sin wie in (a))} \\
&\le \frac{1}{2} \int_0^x \|\varphi - \psi\|_\infty\, dt \\
&\le \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_\infty, && (x \le 1)
\end{aligned}$$

und damit wie benötigt $\|f(\varphi) - f(\psi)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|_\infty$. Also ist f ist eine Kontraktion mit $q = \frac{1}{2}$, und damit hat die gegebene Differentialgleichung nach Satz 24.26 eine Lösung.

In der Vorlesung „Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen“ des zweiten Studienjahres wird dieses Beispiel zu einem der zentralen Sätze ausgebaut, der in nahezu allen praktisch relevanten Fällen die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen sichert.

Aufgabe 24.28. Es seien M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und $f\colon M \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass f einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) Die Abbildung f ist surjektiv, und es gibt ein $q > 1$ mit $d(f(x), f(y)) \ge q\, d(x,y)$ für alle $x, y \in M$.

(b) M ist kompakt, und es gilt $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x \ne y$.

Zeige ferner anhand je eines Beispiels, dass auf die Surjektivität von f bzw. die Kompaktheit von M im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

24.C Stetige Bilder kompakter Mengen

Am Anfang des letzten Abschnitts hatten wir gesehen, wie sich offene und abgeschlossene Mengen unter stetigen Abbildungen verhalten. Wir wollen dies nun auch für kompakte Mengen untersuchen. Auch sie haben eine Kompatibilitätseigenschaft mit stetigen Abbildungen – überraschenderweise allerdings nicht bezüglich Urbildern, sondern bezüglich Bildern. Der folgende Satz ist dabei die wahrscheinlich wichtigste Aussage zu kompakten Mengen überhaupt. Wir werden in diesem gesamten Abschnitt nichts weiter tun als einige der wichtigsten unmittelbaren Folgerungen daraus zu untersuchen.

Satz 24.29 (Kompakte Mengen unter stetigen Abbildungen)**.** *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ist dann $A \subset M$ kompakt, so auch $f(A) \subset N$ (man sagt: „Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen sind kompakt“).*

Beweis. Wir müssen das Kriterium aus Definition 23.50 für die Menge $f(A)$ nachprüfen. Es sei also $(y_n)_n$ eine Folge in $f(A)$. Für alle n gibt es dann Punkte $x_n \in A$ mit $y_n = f(x_n)$. Weil A kompakt ist, gibt es nun eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die gegen einen Punkt $a \in A$ konvergiert. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 24.4 (b) konvergiert dann aber auch $(y_{n_k})_k = (f(x_{n_k}))_k$ gegen $f(a) \in f(A)$. Also besitzt die ursprüngliche Folge $(y_n)_n$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $f(A)$, d. h. $f(A)$ ist kompakt. □

Bemerkung 24.30.

(a) In Gegensatz zu Lemma 24.16 und Satz 24.17 gilt in Satz 24.29 nicht die Umkehrung: Auch für die offensichtlich unstetige Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \ge 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

sind sogar Bilder beliebiger Teilmengen von $\mathbb{R}$ immer kompakt (nämlich immer $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ oder $\{0,1\}$).

(b) Ist $f\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen, so haben wir in Lemma 24.16, Satz 24.17 und Satz 24.29 jetzt also gesehen:

> *Urbilder* von Umgebungen unter f sind Umgebungen.
> *Urbilder* offener Mengen unter f sind offen.
> *Urbilder* abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.
> *Bilder* kompakter Mengen unter f sind kompakt.

In der Tat gelten die jeweils anderen Aussagen (also mit „Bild“ und „Urbild“ vertauscht) im Allgemeinen nicht: Betrachten wir die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0 \qquad \text{und} \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^x,$$

so gilt in $\mathbb{R}$ offensichtlich:

- Das Intervall $U = (-1,1)$ ist eine offene Umgebung von 0, aber das Bild $f(U) = \{0\}$ ist weder offen noch eine Umgebung von 0.
- Die Menge $A = \mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aber das Bild $g(A) = \mathbb{R}_{>0}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, aber das Urbild $f^{-1}(A) = \mathbb{R}$ ist nicht kompakt in $\mathbb{R}$.

Wir werden diese Unterschiede nun als Erstes geschickt ausnutzen, um einen Satz über die Existenz stetiger Umkehrabbildungen zu stetigen bijektiven Abbildungen zu beweisen.

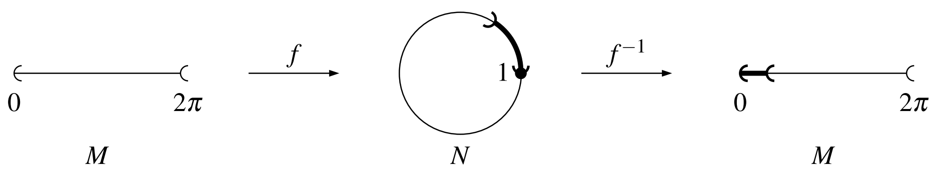
Satz 24.31 (Stetigkeit von Umkehrabbildungen)**.** *Es sei $f\colon M \to N$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen metrischen Räumen. Ist M kompakt, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ stetig.*

Beweis. Nach Satz 24.17 (c) genügt es zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen unter f^{-1}, also Bilder abgeschlossener Mengen unter f wieder abgeschlossen sind. Es sei also $A \subset M$ abgeschlossen. Nach Aufgabe 23.60 (a) ist A als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes M dann ebenfalls kompakt. Damit ist nach Satz 24.29 aber auch $f(A)$ kompakt, insbesondere also abgeschlossen nach Satz 23.51 (a). □

Beispiel 24.32. Ohne die Zusatzvoraussetzung der Kompaktheit des Definitionsbereichs ist die Aussage von Satz 24.31 im Allgemeinen falsch: Es seien $M = [0,2\pi)$, $N = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ der Rand des komplexen Einheitskreises, und f die offensichtlich stetige und bijektive Abbildung

$$f\colon M \to N,\ x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$$

mit nicht kompakter Definitionsmenge M. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon N \to M$ im Punkt $1 \in N$ nicht stetig: Wie im Bild unten dick eingezeichnet ist das halboffene Intervall $[0,1)$ eine Umgebung von $f^{-1}(1) = 0$ in M, aber sein Urbild unter f^{-1}, also $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} : 0 \le x < 1\}$, ist keine Umgebung von 1 in N, da hierfür Punkte in N unterhalb von 1 fehlen.



Mit kompakter Definitionsmenge $[0,2\pi]$ hätte dieses Beispiel natürlich nicht funktioniert, da f dann nicht mehr injektiv gewesen wäre.

Aufgabe 24.33. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_1$ die Projektion auf die erste Koordinate. Man beweise oder widerlege:

(a) Bilder offener Mengen unter f sind offen.

(b) Bilder abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.

(c) Urbilder kompakter Mengen unter f sind kompakt.

Dass stetige Abbildungen gemäß Satz 24.29 kompakte Mengen wieder auf kompakte Mengen abbilden, hat wie schon erwähnt viele weitreichende Konsequenzen. So erhalten wir z. B. die folgende wichtige Verallgemeinerung von Satz 8.25 zur Existenz von Maxima und Minima stetiger Funktionen.

Folgerung 24.34 (Satz vom Maximum und Minimum). *Es sei $f: M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nicht-leeren kompakten metrischen Raum M. Dann „nimmt f auf M ein Maximum und Minimum an", d. h. die Menge $f(M) \subset \mathbb{R}$ hat ein Maximum und Minimum. Insbesondere ist f damit also auf M beschränkt.*

Beweis. Die Menge $f(M) \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer und nach Satz 24.29 kompakt, besitzt nach Lemma 23.53 also ein Maximum und Minimum. □

Eine weitere einfache, aber überaus wichtige Folgerung hieraus ist die bereits in Beispiel 23.9 angekündigte Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{K}^n$. Nach dem Beweis dieser Aussage können wir dann also auf $\mathbb{K}^n$ für alle topologischen Konzepte (und ein paar weitere wie z. B. die Beschränktheit, siehe Bemerkung 23.21 (b)) jeweils eine beliebige Norm verwenden, ohne das Ergebnis zu verändern.

Lemma 24.35 (Stetigkeit von Normen auf $\mathbb{K}^n$)**.** *Für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ ist die Abbildung*

$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$$

stetig. (Beachte, dass wir $\mathbb{K}^n$ dabei wie üblich mit der euklidischen Norm als normierten Raum auffassen, und nicht mit der gegebenen Norm $\|\cdot\|$!)

Beweis. Es seien $a \in \mathbb{K}^n$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Nach Beispiel 24.3 (b) ist f stetig, wenn wir den Startraum als normierten Raum mit der Norm $\|\cdot\|$ versehen. Es gibt also ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt.

Nun gilt aber für alle $z \in \mathbb{K}^n$

$$\|z\| = \|z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n\| \le |z_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |z_n| \cdot \|e_n\| \le c\,\|z\|_2$$

mit $c := \|e_1\| + \cdots + \|e_n\|$. Also folgt für alle $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x - a\|_2 < \frac{\delta}{c}$ zunächst die Ungleichung $\|x - a\| \le c\,\|x - a\|_2 < c \cdot \frac{\delta}{c} = \delta$, und damit dann wieder $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Dies zeigt die behauptete Stetigkeit. □

Satz 24.36 (Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{K}^n$)**.** *Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind zueinander äquivalent.*

Beweis. Weil die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, genügt es zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ zur euklidischen Norm äquivalent ist, also dass es zu einer solchen Norm $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$a\,\|x\|_2 \le \|x\| \le b\,\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n. \tag{$*$}$$

Da man außerdem Skalare nach Definition 23.1 (a) aus beiden Normen herausziehen kann, reicht es sogar schon, diese beiden Ungleichungen für alle (euklidisch normierten) Vektoren in der Menge $A := \{x \in \mathbb{K}^n : \|x\|_2 = 1\}$ zu zeigen.

Bezüglich der euklidischen Norm ist A (also der Rand der gewöhnlichen Einheitskugel) aber offensichtlich beschränkt und abgeschlossen, also nach Satz 23.51 kompakt. Die nach Lemma 24.35 stetige Normabbildung $\|\cdot\|$ nimmt damit auf A nach Folgerung 24.34 ein Minimum a und ein Maximum b an – was sofort die behauptete Ungleichung $(*)$ zeigt. Dabei muss auch wirklich $a > 0$ sein, weil $\|x\| = 0$ nach Definition 23.1 (b) nur für $x = 0 \notin A$ gilt. □

Natürlich gilt die Äquivalenz aller Normen mit Satz 24.36 sogar auf beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen, da diese stets zu einem $\mathbb{K}^n$ isomorph sind. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die Matrizenräume $\operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn}$. Möchte man mit Normen von Vektoren und Matrizen gleichzeitig arbeiten, ist es zur Vereinfachung der Rechnungen allerdings in der Regel geschickt, die dafür gewählten Normen aufeinander abzustimmen. In der Tat zeigen der folgende Satz und die anschließende Folgerung, dass es zu einer gewählten Vektornorm immer eine besonders natürlich definierte passende Matrixnorm gibt, die neben den reinen Normeigenschaften noch weitere nützliche Rechenregeln erfüllt.

Satz und Definition 24.37 (Matrixnormen)**.** *Für gewählte Normen $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ existiert das Maximum*

$$\|A\| := \max\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}\right\} = \max\left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\| = 1\right\}. \tag{$*$}$$

*Dies definiert eine Norm auf $\operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$. Man nennt sie die von der gegebenen (Vektor-)Norm induzierte **Matrixnorm** und verwendet für sie die gleiche Bezeichnung, es ist also z. B.*

$$\|A\|_2 := \max\left\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_2 = 1\right\} \quad \text{und} \quad \|A\|_\infty := \max\left\{\|Ax\|_\infty : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_\infty = 1\right\}.$$

Beweis. Zunächst einmal stimmen die beiden in $(*)$ genannten Mengen überein: Da wir jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ als $x = \lambda y$ mit $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ und $y \in \mathbb{K}^n$ mit $\|y\| = 1$ schreiben können, ist

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}\right\} &= \left\{\frac{\|\lambda Ay\|}{\|\lambda y\|} : \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}, y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|y\| = 1\right\} \\ &\overset{23.1\,(a)}{=} \left\{\|Ay\| : y \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|y\| = 1\right\}.\end{aligned}$$

An der hinteren Darstellung dieser Menge sehen wir auch, dass sie das Bild der (nach Satz 23.51 (b)) kompakten Menge $\{x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = 1\}$ unter der (nach Beispiel 24.3 (b) und 24.11 (b)) stetigen Abbildung $x \mapsto \|Ax\|$ ist. Nach Folgerung 24.34 besitzt sie also ein Maximum, so dass der im Satz angegebene Ausdruck für $\|A\|$ existiert.

Die Normeigenschaften aus Definition 23.1 sind für diesen Ausdruck schnell überprüft:

(a) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$\|\lambda A\| = \max\{\|\lambda Ax\| : \|x\| = 1\} = |\lambda| \cdot \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

(b) Ist $A \neq 0$, so gibt es einen Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax \neq 0$ (z. B. einen Einheitsvektor zu einer Nichtnullspalte von A), also mit $\|Ax\| > 0$, und dementsprechend ist auch $\|A\| > 0$.

(c) Für eine weitere Matrix $B \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\begin{aligned}\|A + B\| &= \max\{\|(A+B)x\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \max\{\|Ax\| + \|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &\leq \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\} + \max\{\|Bx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \|A\| + \|B\|.\end{aligned}$$

62 □

Folgerung 24.38 (Eigenschaften induzierter Matrixnormen)**.** *Für die von einer Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm aus Definition 24.37 gilt für alle $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$:*

(a) *(Verträglichkeit mit der Vektornorm) Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$;*

(b) *(Submultiplikativität) Für jede weitere Matrix $B \in \operatorname{Mat}(n \times p, \mathbb{K})$ ist $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.*

Beweis.

(a) Für $x = 0$ ist diese Aussage trivial; für $x \neq 0$ folgt sie direkt aus der Definition der induzierten Matrixnorm, da dann ja stets $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ gilt.

(b) Nach Definition der induzierten Matrixnorm $\|AB\|$ gibt es ein $x \in \mathbb{K}^p \backslash \{0\}$ mit $\|x\| = 1$ und

$$\|AB\| = \|ABx\| \overset{(a)}{\leq} \|A\| \cdot \|Bx\| \overset{(a)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\| = \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

Beispiel 24.39.

(a) Nach Aufgabe 22.50 (a) ist die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm $\|A\|_2$ einer Matrix $A \neq 0$ gegeben durch den größten Singulärwert von A. Im Fall einer quadratischen, symmetrischen bzw. hermiteschen und positiv semidefiniten Matrix ist dies nach Beispiel 22.46 (a) also genau der größte Eigenwert von A. Da die Menge der Eigenwerte oft als das Spektrum der Matrix bezeichnet wird, nennt man $\|A\|_2$ auch die **Spektralnorm** von A.

Beachte, dass $\|A\|_2$ (trotz dieser Notation) damit also *nicht* die Frobenius-Norm aus Beispiel 23.3 (f) ist, also nicht die euklidische Norm, wenn man $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^{mn}$ identifiziert!

(b) Wir behaupten, dass die von der Maximumsnorm induzierte Matrixnorm einer gegebenen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ die sogenannte **Zeilensummennorm**

$$\|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i = 1, \dots, m\right\} \tag{$*$}$$

ist: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| : i = 1, \dots, m\right\} \\ &\overset{(1)}{\leq} \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| : i = 1, \dots, m\right\} && \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &\overset{(2)}{\leq} \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i = 1, \dots, m\right\}. && (|x_j| \leq 1 \text{ für alle } j) \end{aligned}$$

Außerdem können wir für ein geeignetes x bei (1) und (2) die Gleichheit erhalten:

- bei (1), indem wir für das i mit maximalem Wert von $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j|$ den Winkel in Polarkoordinaten von x_j so wählen, dass alle $a_{i,j} x_j$ reell nicht-negativ sind;
- bei (2), indem wir alle x_j vom Betrag 1 wählen.

Dies zeigt den behaupteten Ausdruck $(*)$ für $\|A\|_\infty = \max\left\{\|Ax\|_\infty : x \in \mathbb{K}^n \text{ mit } \|x\|_\infty = 1\right\}$.

Aufgabe 24.40. Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Man zeige:

(a) Die Menge

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\right\}$$

ist kompakt in $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Menge $\text{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen ist kompakt in $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$.

(c) Die Menge aller indefiniten Matrizen ist offen im Raum aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 24.41 (Abstände von Mengen)**.** Wir definieren den *Abstand* zweier nicht-leerer abgeschlossener Teilmengen A und B eines metrischen Raumes M als

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \quad \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Man zeige:

(a) Sind A und B kompakt, so ist dieses Infimum ein Minimum.

(b) Ist nur A kompakt, aber M vollständig, so ist dieses Infimum ebenfalls ein Minimum.

(c) Im Allgemeinen ist dieses Infimum kein Minimum, selbst wenn A kompakt oder M vollständig ist.

Aufgabe 24.42 (Konvergenz von Mengen)**.** Zu einem gegebenen metrischen Raum M sei $\mathscr{K}(M)$ die Menge aller nicht-leeren kompakten Teilmengen von M. Wir definieren die folgenden Abstandsfunktionen:

für $a \in M$ und $B \in \mathscr{K}(M)$ sei $d(a,B) := \min\{d(a,b) : b \in B\}$ wie in Aufgabe 24.41 (a);
für $A, B \in \mathscr{K}(M)$ sei $h(A,B) := \max(\max\{d(a,B) : a \in A\}, \max\{d(b,A) : b \in B\})$.

Man zeige:

(a) Die Maxima in der Definition von h existieren.

(b) Die Abbildung h ist eine Metrik auf $\mathscr{K}(M)$. (Man nennt sie die *Hausdorff-Metrik*; sie misst, wie verschieden zwei Mengen voneinander sind.)

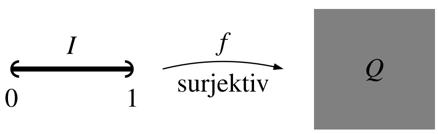
(c) Für $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik gilt $\lim\limits_{n\to\infty} K_{1+\frac{1}{n}}(0) = K_1(0)$ in $\mathscr{K}(M)$.

24.D Peano-Kurven

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir eine interessante Anwendung betrachten, in der die meisten der wichtigen Sätze dieses und des vorangegangenen Kapitels geschickt miteinander kombiniert werden, um ein sehr erstaunliches Resultat zu beweisen. Es handelt sich dabei nicht so sehr um ein Resultat, das für unser weiteres Studium der Analysis von großer Bedeutung wäre, sondern einfach nur um ein sehr „schönes" Stück Mathematik, das so verblüffend ist, dass man es fast schon als Paradoxon bezeichnen könnte: Wir werden zeigen, dass es eine stetige Abbildung vom Einheitsintervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$ (also einen Weg in der Ebene im Sinne von Definition 24.20) gibt, deren Bild das *gesamte* „Einheitsquadrat" $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ist. Wir können also mit einem "eindimensionalen Objekt" (nämlich dem Einheitsintervall) durch eine stetige Abbildung ein „zweidimensionales Objekt" (das Einheitsquadrat) komplett ausfüllen. Spätestens hier sehen wir also, dass man mit der oft gehörten Interpretation einer stetigen Abbildung in einer Variablen als etwas, das man zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen, etwas vorsichtig sein muss.

In diesem Abschnitt bezeichne stets $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ das Einheitsintervall und $Q := I \times I = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.

Satz 24.43 (Peano-Kurve). *Es gibt eine stetige surjektive Abbildung $f\colon I \to Q$. (Eine solche Abbildung wird als* Peano-Kurve *bezeichnet.)*

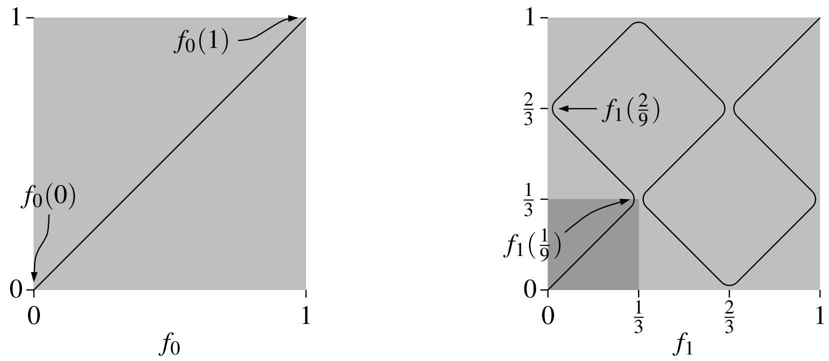


Beweis. Der Beweis dieses Satzes ist konstruktiv, gibt also eine mögliche Peano-Kurve explizit an. Sie wird als Grenzwert einer rekursiv definierten Folge von Funktionen $f_n\colon I \to Q$ konstruiert.

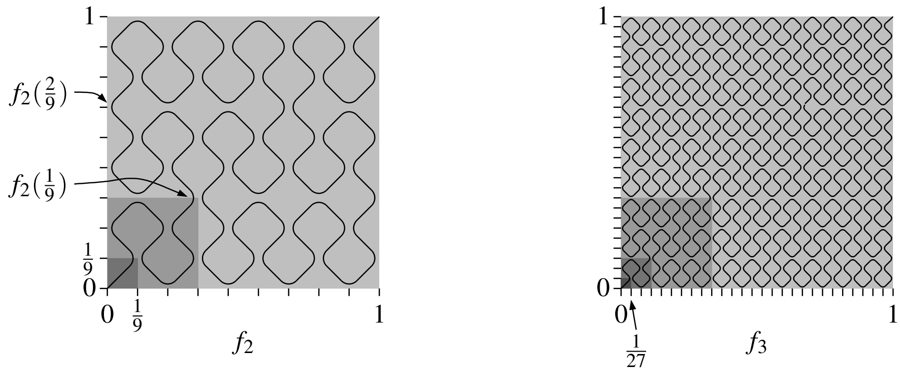
Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ wird dabei wie folgt gebildet: Die erste Funktion f_0 ist einfach die Gerade

$$f_0\colon I \to Q,\ f_0(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

die das Einheitsquadrat auf der Diagonalen von links unten nach rechts oben durchläuft. Für die nächste Funktion f_1 teilen wir Q in 9 gleich große Teilquadrate entlang der horizontalen und vertikalen Linien bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und durchlaufen nun diese 9 Teilquadrate der Reihe nach entlang ihrer Diagonalen wie im Bild unten dargestellt. Der Weg f_1 besteht also aus 9 Geradenstücken, die alle „mit gleicher Geschwindigkeit" durchlaufen werden – er ist im Bild an den Ecken nur deswegen abgerundet eingezeichnet, damit man seinen Verlauf besser erkennen kann.



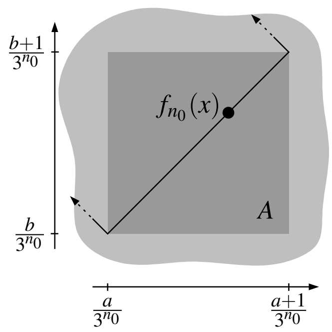
Der nächste Weg f_2 entsteht nun aus f_1, indem wir jedes der 9 Geradenstücke von f_1 (wie etwa das in dem oben dunkel eingezeichneten Teilquadrat) durch einen Weg ersetzen, der selbst wieder wie f_1 aussieht. Entsprechend ersetzen wir dann jedes der Geradenstücke von f_2 durch einen Weg wie f_1, um f_3 zu erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir eine Folge $(f_n)_n$ von Wegen $f_n \colon I \to Q$. Die Wege f_2 und f_3 sind im folgenden Bild eingezeichnet.



Wir wollen nun $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ setzen und müssen uns dazu natürlich als Erstes davon überzeugen, dass dieser Grenzwert überhaupt existiert.

Es sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. Für ein beliebiges $x \in I$ liegt $f_{n_0}(x)$ nun wie im Bild rechts auf einem der Geradenstücke, die diagonal durch eines der Teilquadrate von f_{n_0} laufen. Dieses Teilquadrat hat nach Konstruktion die Seitenlänge $\frac{1}{3^{n_0}}$ und ist von der Form

$$A = \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right] \times \left[\frac{b}{3^{n_0}}, \frac{b+1}{3^{n_0}}\right] \subset \mathbb{R}^2$$



für gewisse natürliche Zahlen $0 \le a, b < 3^{n_0}$. Nach unserer rekursiven Konstruktion der Funktionen f_n ist dann klar, dass $f_n(x)$ auch für alle $n \ge n_0$ in dem Quadrat A liegt – wir ändern den Teil des Weges f_{n_0} in A für die weiteren n ja nur noch *innerhalb dieses Quadrates A* ab.

Für alle $n, m \ge n_0$ liegen $f_n(x)$ und $f_m(x)$ also innerhalb eines Quadrates mit Seitenlänge $\frac{1}{3^{n_0}}$, d. h. es ist

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_\infty \le \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon \qquad (*)$$

für alle $n, m \ge n_0$. Dies bedeutet genau, dass die Folge $(f_n(x))_n$ für festes x eine Cauchyfolge in Q ist. Als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist Q nach Satz 23.29 und Folgerung 23.43 nun aber vollständig – d. h. diese Cauchyfolge konvergiert für alle x gegen einen Punkt in Q, und wir können unsere Funktion $f\colon I \to Q$ damit in der Tat wie gewünscht durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

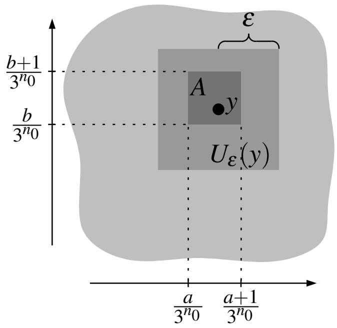
definieren. Es bleibt jetzt nur noch zu zeigen, dass f auch stetig und surjektiv ist.

Für die Stetigkeit nehmen wir den Grenzwert von $(*)$ für $m \to \infty$ und erhalten für alle $x \in I$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \le \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$$

(beachte, dass die Normfunktion nach Beispiel 24.3 (b) stetig ist und wir die Grenzwertbildung damit nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 24.4 (b) in die Normstriche hineinziehen dürfen). Dies sagt uns noch einmal, dass $f_n(x)$ für $n \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert – der entscheidende Punkt ist nun aber, dass unser oben gewähltes n_0 nur von ε und nicht vom betrachteten Punkt x abhängt. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist also sogar gleichmäßig konvergent. Nach Bemerkung 24.25 (b) ist die Grenzfunktion f als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen damit stetig.

Für die Surjektivität erinnern wir uns daran, dass nach Satz 24.29 mit I auch das Bild $f(I)$ unter der stetigen Abbildung f kompakt ist. Nach Satz 23.51 (a) ist $f(I)$ also insbesondere abgeschlossen, d. h. das Komplement $\mathbb{R}^2\backslash f(I)$ ist offen. Angenommen, f würde nun nicht surjektiv auf das Einheitsquadrat Q abbilden, d. h. es gäbe einen Punkt $y \in Q\backslash f(I)$. Da $\mathbb{R}^2\backslash f(I)$ offen ist, gäbe es dann eine Umgebung $U_\varepsilon(y)$ von y, die ganz in $\mathbb{R}^2\backslash f(I)$ liegt. Wir verwenden dabei wieder die Maximumsnorm, so dass diese Umgebung wie im Bild rechts ein (offenes) Quadrat mit Seitenlänge 2ε ist.



Wählen wir nun wieder unser $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$, so muss dann mindestens ein Quadrat

$$A = \left[\frac{a}{3^{n_0}}, \frac{a+1}{3^{n_0}}\right] \times \left[\frac{b}{3^{n_0}}, \frac{b+1}{3^{n_0}}\right] \subset \mathbb{R}^2$$

der zu f_{n_0} gehörigen Unterteilung von Q ganz in $U_\varepsilon(y)$ liegen, enthält also ebenfalls keinen Punkt des Weges f. Dies ist aber ein Widerspruch, da f nach unserer Konstruktion natürlich durch jedes solche Quadrat irgendwie hindurch läuft, also insbesondere einen Punkt in A enthalten muss. Also war unsere Annahme falsch, und f ist in der Tat surjektiv. □

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass es eine stetige surjektive Abbildung $I \to Q$ gibt, würde man vielleicht vermuten, dass es umgekehrt auch eine stetige injektive Abbildung $Q \to I$ gibt. Wie wir jetzt sehen wollen, ist dies jedoch erstaunlicherweise falsch. Das gleiche Argument zeigt dann auch, dass keine *bijektive* Peano-Kurve existiert.

Satz 24.44.

(a) *Es gibt keine stetige injektive Abbildung $Q \to I$.*

(b) *Es gibt keine stetige bijektive Abbildung $I \to Q$ (also keine bijektive Peano-Kurve).*

Beweis.

(a) Angenommen, $f\colon Q \to I$ wäre stetig und injektiv. Mit Q wäre dann nach Satz 24.29 und 24.22 (a) auch das Bild $f(Q) \subset I$ kompakt und wegzusammenhängend, also ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$. Damit ist die Einschränkung $f\colon Q \to [a,b]$ stetig und bijektiv.

Wir nehmen nun aus dem Intervall $[a,b]$ den Mittelpunkt $c := \frac{a+b}{2}$ heraus, und dementsprechend aus dem Quadrat Q den Urbildpunkt $f^{-1}(c)$. Die dadurch entstehende Einschränkung $f|_{Q\backslash f^{-1}(c)}\colon Q\backslash f^{-1}(c) \to [a,b]\backslash\{c\}$ ist dann natürlich immer noch stetig (und bijektiv). Dies ist aber ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz 24.22 (a), da $Q\backslash\{f^{-1}(c)\}$ immer noch wegzusammenhängend ist, $[a,b]\backslash\{c\}$ aufgrund des fehlenden Mittelpunkts jedoch nicht.

(b) Da I kompakt ist, wäre nach Satz 24.31 mit einer stetigen bijektiven Abbildung $I \to Q$ auch ihre Umkehrung $Q \to I$ stetig und bijektiv, im Widerspruch zu (a). □

Aufgabe 24.45. Es sei $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Gibt es eine stetige, surjektive Abbildung ...

(a) von I nach $I \times I \times I \subset \mathbb{R}^3$;

(b) von I nach $\mathbb{R}^2$;

(c) von $[0,1)$ nach $\mathbb{R}^2$;

(d) von I in den abgeschlossenen Einheitskreis $K_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$?

(Hinweis: In allen Fällen oben, in denen eine solche Abbildung existiert, lässt sie sich explizit durch die Peano-Kurve $f : I \to I \times I$ aus Satz 24.43 ausdrücken, ohne diese aufwändige Konstruktion noch einmal zu wiederholen.) 63