17. Das Gauß-Verfahren

Nachdem wir jetzt viele Probleme der linearen Algebra (z. B. Basen von Vektorräumen zu konstruieren, Morphismen durch lineare Abbildungen darzustellen oder den Rang einer Matrix zu bestimmen) theoretisch lösen können, wollen wir in diesem Kapitel sehen, wie man alle diese Rechnungen mit Hilfe des sogenannten Gauß-Verfahrens auch dann praktisch durchführen kann, wenn sie numerisch so kompliziert werden, dass man das Ergebnis nicht mehr einfach sehen kann.

17.A Lineare Gleichungssysteme

Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, führen alle bisher betrachteten konkreten Rechnungen der linearen Algebra letztlich auf *lineare Gleichungssysteme*, d. h. auf die folgende Situation: Für eine gegebene Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $b_1, \dots, b_m \in K$ suchen wir alle $x_1, \dots, x_n \in K$, für die die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

gelten. Mit Hilfe des Matrixprodukts ausgedrückt wollen wir also die Gleichung $Ax = b$ nach x auflösen, wobei $b_1, \dots, b_m$ und $x_1, \dots, x_n$ die Komponenten der Vektoren $b \in K^m$ und $x \in K^n$ bezeichnen. Bevor wir aber konkret angeben, wie man ein solches Gleichungssystem numerisch lösen kann, wollen wir zunächst etwas über die Struktur der Lösungsmenge dieses Systems aussagen.

Satz 17.1 (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Gleichungssysteme)**.** *Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $b \in K^m$ gilt:*

(a) *(Existenz) Das Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung $x \in K^n$, wenn $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = \mathrm{rk}A$ gilt, wobei $(A\,|\,b)$ die sogenannte* erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}(m \times (n+1), K)$$

bezeichnet.

(b) *(Eindeutigkeit) Ist das Gleichungssystem lösbar und $v \in K^n$ eine Lösung (d. h. gilt $Av = b$), so ist die gesamte Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch*

$$\{x \in K^n : Ax = b\} = v + \mathrm{Ker}A.$$

Die Lösungsmenge ist dann also ein verschobener Unterraum der Dimension

$$\dim \mathrm{Ker}A = n - \mathrm{rk}A.$$

Insbesondere ist die Lösung v des Gleichungssystems also genau dann eindeutig, wenn $\mathrm{rk}A = n$.

Beweis.

(a) Bezeichnen wir mit $x_1, \dots, x_n$ die Komponenten von x und mit $a_i \in K^m$ die i-te Spalte von A (für $i = 1, \dots, n$), so können wir das Gleichungssystem $Ax = b$ auch schreiben als

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b \quad \in K^m.$$

Es gilt dann

$$
\begin{aligned}
Ax=b \text{ lösbar } &\Leftrightarrow \text{ es gibt } x_1,\dots,x_n \text{ mit } x_1a_1+\dots+x_na_n=b \\
&\Leftrightarrow b\in \operatorname{Lin}(a_1,\dots,a_n) \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Lin}(a_1,\dots,a_n,b)=\operatorname{Lin}(a_1,\dots,a_n) \\
&\Leftrightarrow \dim\operatorname{Lin}(a_1,\dots,a_n,b)=\dim\operatorname{Lin}(a_1,\dots,a_n) \quad \text{(Lemma 14.26)} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{rk}(A\,|\,b)=\operatorname{rk}A \quad \text{(Bemerkung 16.39 (c)).}
\end{aligned}
$$

(b) Ist $Av=b$, so ist für ein $x\in K^n$ genau dann $Ax=b$, wenn $A(x-v)=0$ gilt, also $x-v\in \operatorname{Ker}A$ und damit $x\in v+\operatorname{Ker}A$ ist. □

Bemerkung 17.2 (Eindeutige Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)**.**

(a) Fassen wir die beiden Teile von Satz 17.1 zusammen, so sehen wir, dass das lineare Gleichungssystem $Ax=b$ mit $A\in \operatorname{Mat}(m\times n,K)$ und $b\in K^m$ genau dann eine eindeutige Lösung $x\in K^n$ besitzt, wenn $\operatorname{rk}(A\,|\,b)=\operatorname{rk}A=n$ ist.

(b) Im Fall $m=n$ eines Gleichungssystems mit genau so vielen Variablen wie Gleichungen vereinfacht sich das Kriterium aus (a) noch etwas: Da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ nicht kleiner als $\operatorname{rk}A$ und (nach Bemerkung 16.39 (a)) nicht größer als $m=n$ sein kann, ist die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax=b$ in diesem Fall bereits äquivalent zur Bedingung $\operatorname{rk}A=n$ — was nach Bemerkung 16.39 (b) genau bedeutet, dass A invertierbar ist.

In der Tat können wir die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $Ax=b$ dann natürlich durch Multiplikation mit A^{-1} von links auch sofort als $x=A^{-1}b$ schreiben. Momentan hilft uns dies allerdings nicht besonders viel, weil wir noch nicht wissen, wie man die inverse Matrix A^{-1} im Allgemeinen konkret berechnen kann.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist es nun zu sehen, wie man lineare Gleichungssysteme explizit numerisch lösen kann. Wie ihr natürlich wisst, besteht die Strategie hierbei darin, die gegebenen Gleichungen auf geschickte Art z. B. durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation mit Skalaren so umzuformen und zu kombinieren, dass hinterher ein äquivalentes Gleichungssystem entsteht, von dem man die Lösung leicht ablesen kann. Schreiben wir das Gleichungssystem in Matrixform als $Ax=b$, so entspricht nun jede Gleichung einer Zeile der Matrix A, und demzufolge wollen wir also die Zeilen der Matrix umformen und miteinander kombinieren können. Diese Zeilenumformungen entsprechen in unserer Schreibweise einfachen Matrixmultiplikationen, die wir jetzt untersuchen wollen.

Konstruktion 17.3 (Elementarmatrizen)**.** Es sei $A\in \operatorname{Mat}(m\times n,K)$.

(a) Für $k\in\{1,\dots,m\}$ und $\lambda\in K\backslash\{0\}$ setzen wir

$$
F_k(\lambda):=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(m\times m,K),
$$

wobei der Eintrag λ in Zeile und Spalte k steht. Die Matrix $F_k(\lambda)$ ist also nichts weiter als die Einheitsmatrix, bei der der Eintrag 1 in der k-ten Zeile und Spalte durch ein $\lambda\neq 0$ ersetzt wurde.

Mit dieser Matrix ist das Produkt $F_k(\lambda) \cdot A$ nun gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k,1} & \cdots & \lambda a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ mit $F_k(\lambda)$ von links entspricht genau der Multiplikation der k-ten Zeile von A mit λ.

(b) Für $k, l \in \{1, \dots, m\}$ mit $k \neq l$ und $\lambda \in K$ setzen wir

$$F_{k,l}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(m \times m, K),$$

wobei der Eintrag λ in Zeile k und Spalte l steht, d. h. diesmal haben wir in der Einheitsmatrix den Eintrag 0 in Zeile k und Spalte l durch λ ersetzt. (Beachte, dass der Eintrag λ für $k < l$ oberhalb und für $k > l$ unterhalb der Diagonalen steht; wir haben in der Matrix oben der Einfachheit halber nur den Fall $k < l$ dargestellt.) In diesem Fall ist das Matrixprodukt $F_{k,l}(\lambda) \cdot A$ gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} + \lambda a_{l,1} & \cdots & a_{k,n} + \lambda a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ mit $F_{k,l}(\lambda)$ von links entspricht genau der Addition des λ-fachen von Zeile l zu Zeile k.

Die Matrizen $F_k(\lambda)$ für $\lambda \in K \backslash \{0\}$ sowie $F_{k,l}(\lambda)$ für $k \neq l$ und $\lambda \in K$ heißen **Elementarmatrizen**. Es gibt sie in jeder (quadratischen) Größe $m \times m$; zur Vereinfachung der Schreibweise deuten wir diese Größe in der Notation $F_k(\lambda)$ bzw. $F_{k,l}(\lambda)$ aber nicht an.

Man sagt, dass $F_k(\lambda) \cdot A$ und $F_{k,l}(\lambda) \cdot A$ aus A durch eine **elementare Zeilenumformung** entstehen.

Bemerkung 17.4.

(a) Die Elementarmatrizen sind invertierbar mit

$$(F_k(\lambda))^{-1} = F_k\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad (F_{k,l}(\lambda))^{-1} = F_{k,l}(-\lambda).$$

Dies folgt auch ohne weitere Rechnung direkt aus Konstruktion 17.3: Wenn wir z. B. das Matrixprodukt $F_k(\frac{1}{\lambda}) \cdot F_k(\lambda) = F_k(\frac{1}{\lambda}) \cdot F_k(\lambda) \cdot E$ bilden, multiplizieren wir die k-te Zeile in der Einheitsmatrix zuerst mit λ und dann mit $\frac{1}{\lambda}$, d. h. es kommt insgesamt wieder die Einheitsmatrix heraus — also ist $F_k(\frac{1}{\lambda}) \cdot F_k(\lambda) = E$. Genauso ergibt sich auch $F_k(\lambda) \cdot F_k(\frac{1}{\lambda})$, und damit ist $F_k(\frac{1}{\lambda})$ das Inverse von $F_k(\lambda)$. Analog erhält man auch das Produkt $F_{k,l}(-\lambda) \cdot F_{k,l}(\lambda)$, indem man in der Einheitsmatrix das λ-fache der l-ten Zeile zur k-ten addiert und dann gleich wieder davon subtrahiert, so dass auch hier wieder die Einheitsmatrix herauskommt.

(b) Führen wir mit einer Matrix A mehrere elementare Zeilenumformungen aus, so ist das Ergebnis nach Konstruktion 17.3 eine Matrix $F_1 \cdot \dots \cdot F_r \cdot A$ mit Elementarmatrizen $F_1, \dots, F_r$. Da diese Elementarmatrizen nach (a) invertierbar sind, ist das Produkt $F := F_1 \cdot \dots \cdot F_r$ nach Lemma 16.20 (a) ebenfalls wieder invertierbar. Das Ergebnis der Zeilenumformungen ist also die Matrix FA, d. h. wir haben A von links mit einer invertierbaren Matrix multipliziert.

(c) Das Vertauschen zweier Zeilen $k, l \in \{1, \dots, m\}$ mit $k \neq l$ in einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ lässt sich als Folge von elementaren Zeilenumformungen realisieren: Sind $a_1, \dots, a_m$ die Zeilen von A, so erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{l,k}(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_l(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(d) Man kann die Elementarmatrizen auch verwenden, um analog *elementare Spaltenumformungen* durchzuführen: Multipliziert man eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ mit einer Elementarmatrix $F_k(\lambda)$ (der Größe n) von *rechts*, so entspricht dies der Multiplikation der k-ten *Spalte* von A mit λ. Analog addiert man das λ-fache von Spalte k zu Spalte l von A, wenn man das Produkt $A \cdot F_{k,l}(\lambda)$ bildet. Wie in (b) lassen sich elementare Spaltenumformungen also durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von rechts beschreiben.

Mit derartigen Zeilenumformungen wollen wir jetzt eine Matrix bzw. ein lineares Gleichungssystem auf eine möglichst einfache Form bringen. Die folgende Form wird dabei herauskommen.

Definition 17.5 (Zeilenstufenform)**.** Wir sagen, dass eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ **Zeilenstufenform** hat, wenn sie von der Form

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_1 & k_2 & & k_r \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \lfloor 1 & & & \\ & \lfloor 1 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lfloor 1 \end{array} \right) \end{array}$$

ist, wobei das Symbol „$*$" für beliebige Einträge steht. Mit anderen Worten gibt es ein $r \in \{1, \dots, m\}$ und Spalten $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ (die sogenannten **Stufenspalten**), so dass gilt:

- $a_{i,k_i} = 1$ für alle $i = 1, \dots, r$;
- rechts hiervon stehen beliebige Einträge (d. h. $a_{i,j}$ ist beliebig falls $i \leq r$ und $j > k_i$);
- alle anderen Einträge sind 0.

Sind zusätzlich noch außer den geforderten Einsen alle anderen Einträge in den Stufenspalten gleich Null, ist A also sogar von der Form

$$\left(\begin{array}{ccccccc} \lfloor 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & & \lfloor 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & \lfloor 1 & * \cdots * \end{array} \right)$$

37 (d. h. $a_{l,k_i} = 0$ für alle $l < i \leq r$) so sagt man, dass A **reduzierte Zeilenstufenform** hat.

Der wesentliche Satz in diesem Kapitel besagt nun, dass man jede Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf diese Formen bringen kann. Dabei sind beide Formen in der Praxis wichtig: Die reduzierte Zeilenstufenform ist natürlich „schöner", weil sie mehr Nullen enthält und damit einfacher ist — andererseits werden wir aber sehen, dass die normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform für viele Zwecke ausreichend und mit weniger Rechenaufwand zu erzielen ist.

Satz 17.6 (Gauß-Verfahren). *Jede Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen. Mit anderen Worten gibt es also ein Produkt $F \in \operatorname{GL}(m, K)$ von Elementarmatrizen, so dass FA (reduzierte) Zeilenstufenform hat (siehe Bemerkung 17.4 (b)).*

Bei diesem Satz ist der Beweis — also das Verfahren, wie man die (reduzierte) Zeilenstufenform erreicht — mindestens genauso wichtig wie die eigentliche Aussage:

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über die Zahl n der Spalten von A. Da für $n = 0$ nichts zu zeigen ist, müssen wir nur den Induktionsschritt durchführen. Es sei also $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ beliebig vorgegeben. Wir wollen A mit elementaren Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen und nehmen nach Induktionsvoraussetzung an, dass wir dies für alle Matrizen mit weniger als n Spalten bereits können. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall 1: Alle Einträge in der ersten Spalte von A sind 0, d. h. A hat die Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array} \right)$$

für eine Matrix $A' \in \operatorname{Mat}(m \times (n-1), K)$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir A' dann durch Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen. Da diese Zeilenumformungen an der ersten Nullspalte aber nichts ändern, haben wir damit auch A auf (reduzierte) Zeilenstufenform gebracht.

Fall 2: Es sind nicht alle Einträge in der ersten Spalte von A gleich 0.

(a) Falls der Eintrag $a_{1,1}$ links oben in A gleich Null ist, vertauschen wir zwei Zeilen von A so, dass dieser Eintrag nicht mehr gleich 0 ist (nach Bemerkung 17.4 (c) ist dies durch elementare Zeilenumformungen machbar).

(b) Wir dividieren die erste Zeile durch $a_{1,1}$ und erhalten eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ a_{2,1} & \\ \vdots & * \\ a_{m,1} & \end{array} \right).$$

(c) Wir subtrahieren von jeder Zeile $k \in \{2, \dots, m\}$ das $a_{k,1}$-fache der ersten Zeile und bekommen dadurch

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array} \right)$$

mit einer Matrix $A' \in \operatorname{Mat}((m-1) \times (n-1), K)$.

(d) Nach Induktionsvoraussetzung können wir jetzt A' durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Damit hat aber auch die gesamte Matrix bereits Zeilenstufenform — wollen wir also nur diese normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform erreichen, so sind wir damit fertig. Andernfalls bringen wir A' gemäß der Induktionsvoraussetzung sogar auf reduzierte Zeilenstufenform und bekommen eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & * \cdots * & * & * \cdots * & & * & * \cdots * \\ \hline 0 & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ \vdots & & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & 1 & * \cdots * \\ 0 & & & & & & \end{array} \right).$$

Subtrahieren wir nun geeignete Vielfache der Zeilen $2,\dots,m$ von der ersten Zeile, so können wir damit dann noch die Einträge in den Stufenspalten der ersten Zeile zu Null machen und erhalten so auch die reduzierte Zeilenstufenform. □

Beispiel 17.7. Wir wollen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Dazu können wir nach dem Verfahren im Beweis von Satz 17.6 wie folgt vorgehen (die Notation $Z3 \to Z3 - 3Z2$ bedeutet z. B., dass wir das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten subtrahieren):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \to -Z1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - Z1]{Z2 \to Z2 + Z1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - 3Z2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Möchten wir eine reduzierte Zeilenstufenform, so addieren wir schließlich noch das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein erster Nutzen einer Zeilenstufenform besteht darin, dass wir an ihr sofort den Rang einer Matrix ablesen können:

Algorithmus 17.8 (Rang einer Matrix)**.** Haben wir eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ wie in Satz 17.6 mit einem Produkt $F \in \mathrm{GL}(m, K)$ von Elementarmatrizen auf Zeilenstufenform FA gebracht, so ist FA äquivalent zu A und hat damit nach Lemma 16.41 insbesondere auch den gleichen Rang wie A. Der Rang (also nach Bemerkung 16.39 (c) und Folgerung 16.44 die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen) von FA ist aber natürlich einfach die Zahl r der Stufen wie in Definition 17.5:

Der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der Stufen in einer Zeilenstufenform von A.

Für die Matrix A aus Beispiel 17.7 gilt demnach z. B. $\operatorname{rk} A = 2$.

Die wichtigste Anwendung des Gauß-Verfahrens ist aber sicher, dass wir damit wie folgt sehr einfach lineare Gleichungssysteme lösen können.

Algorithmus 17.9 (Lineare Gleichungssysteme)**.** Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $b \in K^m$.

Um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, bringen wir die Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform und führen dabei alle Zeilenumformungen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b) \in \mathrm{Mat}(m \times (n+1), K)$ durch. Wir erhalten am Ende also eine Matrix $(FA\,|\,Fb)$, wobei $F \in \mathrm{GL}(m, K)$ ein Produkt von Elementarmatrizen ist und FA reduzierte Zeilenstufenform hat.

Da F invertierbar ist, ist das ursprüngliche lineare Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent zu $FAx = Fb$, d. h. wir haben die Lösungsmenge des Gleichungssystems durch den Übergang von $(A\,|\,b)$ zu $(FA\,|\,Fb)$ nicht geändert. Das neue Gleichungssystem lässt sich nun aber leicht lösen: Die resultierende Matrix ist von der Form

$$\begin{array}{ccccc} k_1 & & k_2 & & k_r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * & b'_1 \\ & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * & b'_2 \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & * \cdots * & b'_r \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & b'_m \end{array}\right),$$

wobei $b'_1, \ldots, b'_m \in K$ die Komponenten von Fb sind. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(a) Ist $b'_i \neq 0$ für ein $i \in \{r+1, \ldots, m\}$, so liefert die i-te Zeile des umgeformten Gleichungssystems den Widerspruch $0 = b'_i$. Das Gleichungssystem ist dann also nicht lösbar.

(b) Ist $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$, so sind die letzten $m - r$ Gleichungen des umgeformten Systems einfach $0 = 0$ und damit immer erfüllt. Wir brauchen also nur die ersten r Zeilen zu betrachten. Von diesen drückt die i-te Zeile offensichtlich die Stufenvariable x_{k_i} eindeutig durch die Variablen x_j mit $j \notin \{k_1, \ldots, k_r\}$ aus. Wir können also alle Variablen, die nicht an den Stufenspalten stehen, frei wählen, und erhalten dann für jede solche Wahl genau eine Lösung, bei der die restlichen Variablen $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ durch Verwendung der ersten r Gleichungen eindeutig bestimmt sind.

Alternativ kann man A auch nur mit elementaren Zeilenumformungen auf nicht notwendig reduzierte Zeilenstufenform bringen (was natürlich weniger Arbeit ist). Dann drückt die i-te Zeile der Zeilenstufenform die Variable x_{k_i} durch alle freien Variablen x_j mit $j \notin \{k_1, \ldots, k_r\}$ *und die weiter rechts stehenden Stufenvariablen* $x_{k_{i+1}}, \ldots, x_{k_r}$ aus. Wir müssen diese Zeilen dann also von unten nach oben durchgehen und so der Reihe nach $x_{k_r}, \ldots, x_{k_1}$ aus den freien Variablen *und den bereits bestimmten Stufenvariablen* berechnen (was dann wieder etwas mehr Arbeit ist).

Beispiel 17.10. Wir wollen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \phantom{{}+ x_3} + 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 7x_4 &= 3 \\ 2x_3 - 6x_4 &= 2 \end{aligned}$$

über $\mathbb{R}$ lösen, also das System $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dazu bringen wir die Matrix A auf reduzierte Zeilenstufenform, führen aber alle Umformungen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ durch:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2 \to Z2 - 2Z1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z3 \to Z3 - 2Z2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad (1)$$

Wir haben also das neue äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \quad + 5x_4 &= 1 \\ x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

erhalten, das wir sofort lösen können: Die Variablen x_2 und x_4 (die nicht an den Stufenspalten stehen) können wir als freie reelle Parameter wählen, und die beiden nicht-trivialen Gleichungen des umgeformten Systems bestimmen dann die restlichen beiden Variablen eindeutig zu $x_1 = 1 - 4x_2 - 5x_4$ bzw. $x_3 = 1 + 3x_4$. Wir erhalten also die allgemeine Lösung

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{2}$$

Algorithmus 17.11 (Basis vom Kern einer Matrix)**.** Ein unmittelbarer Spezialfall von Algorithmus 17.9 zur Lösung eines linearen Gleichungssystems ist die Berechnung des Kerns einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, denn $\mathrm{Ker} A$ ist ja genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$. Im Gauß-Verfahren ist also die rechte Seite immer 0 (weswegen wir sie natürlich gar nicht erst mit hinschreiben müssen).

Die Dimension des Kerns ist offensichtlich gleich der Anzahl der freien Parameter in der Lösung, also die Anzahl der Nichtstufenspalten $j \notin \{k_1, \dots, k_r\}$ in der Notation von Algorithmus 17.9 (beachte, dass diese Anzahl in Übereinstimmung mit Bemerkung 16.16 (a) und Algorithmus 17.8 genau $n - r = n - \mathrm{rk} A = \dim \mathrm{Ker} A$ ist). Um eine Basis von $\mathrm{Ker} A$ zu bestimmen, können wir für jedes solche j den Vektor der Lösungsmenge bilden, bei dem wir $x_j = 1$ und alle anderen freien Variablen gleich 0 setzen. Im Beispiel 17.10 ist für die dort angegebene Matrix A z. B.

$$\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(also die Vektoren, die in der Lösungsmenge (2) bei den freien Variablen x_2 und x_4 stehen) eine Basis von $\mathrm{Ker} A$.

Dieses Verfahren lässt sich durch einen kleinen Rechentrick noch etwas vereinfachen. Dazu seien $a_{i,j}$ die Einträge der reduzierten Zeilenstufenform von A. Wenn wir jetzt für den Basisvektor zur Nichtstufenspalte j die freie Variable x_j gleich -1 statt 1 setzen (was den Basisvektor nur mit -1 multipliziert), bestimmt die i-te Zeile des umgeformten Systems für $i = 1, \dots, r$ die zugehörige i-te Stufenvariable zu

$$1 \cdot x_{k_i} + a_{i,j} x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k_i} = -a_{i,j} x_j = -a_{i,j} \cdot (-1) = a_{i,j},$$

also genau zu einem der Einträge der umgeformten Matrix. Schreibt man die i-te Zeile dieser reduzierten Zeilenstufenform nun noch in Zeile k_i einer $n \times n$-Matrix A' (so dass also die 1 der Stufe auf der Diagonalen dieser Matrix steht), so steht dieser Eintrag $x_{k_i} = a_{i,j}$ jetzt statt in Zeile i und Spalte j in Zeile k_i und Spalte j, und damit bereits an der richtigen Stelle dafür, dass sich der konstruierte Basisvektor in Spalte j dieser neuen Matrix ergibt. Wir erhalten damit das folgende nützliche „Kochrezept“:

> Zur Berechnung einer Basis von $\mathrm{Ker} A$ bringe man A auf reduzierte Zeilenstufenform. Man schreibe die Stufenzeilen dieser Matrix dann so in eine $n \times n$-Matrix A', dass die Einsen der Stufen auf der Diagonalen der Matrix stehen; die restlichen Zeilen fülle man mit -1 auf der Diagonalen und 0 sonst auf. Die Spalten von A' mit den Einträgen -1 auf der Diagonalen bilden dann eine Basis von $\mathrm{Ker} A$.

In unserem obigen Zahlenbeispiel bilden wir also eine neue 4×4-Matrix, in der wir die beiden Zeilen der reduzierten Zeilenstufenform (1) in Zeile 1 und 3 schreiben (damit die Einsen der Stufen auf der Diagonalen der Matrix sind, unten im Bild grau hinterlegt) und die restlichen Einträge mit -1 auf der Diagonalen und 0 sonst aufgefüllt sind. Die zweite und vierte Spalte (unten im Bild eingekreist) bilden dann eine Basis B des Kerns:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{4} & 0 & \boxed{5} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 17.12 (Eindeutigkeit der reduzierten Zeilenstufenform)**.** Zeige die folgende Verallgemeinerung von Lemma 17.17 (b): Führt man mit einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ auf verschiedene Arten elementare Zeilenumformungen durch, so dass das Ergebnis jeweils eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform ist, so ergibt sich dabei immer dieselbe Matrix.

17.B Weitere Algorithmen mit dem Gauß-Verfahren

Wie bereits erwähnt lassen sich alle konkreten Rechnungen der linearen Algebra letztlich auf das Gauß-Verfahren zurückführen. Im Rest dieses Kapitels wollen wir dies für noch ein paar weitere häufig auftretende Aufgabenstellungen explizit tun. Das wichtigste Grundprinzip hierbei ist:

Lemma 17.13. *Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ gilt:*

(a) *Elementare Zeilenumformungen in A ändern den Kern von A nicht.*

(b) *Elementare Spaltenumformungen in A ändern das Bild von A nicht.*

Beweis.

(a) Nach Bemerkung 17.4 (b) erhalten wir durch die Zeilenumformungen eine Matrix FA mit $F \in \mathrm{GL}(m, K)$. Dann ist aber
$$\mathrm{Ker}(FA) = \{x \in K^n : FAx = 0\} = \{x \in K^n : Ax = 0\} = \mathrm{Ker}\, A.$$

(b) In diesem Fall erhalten wir nach Bemerkung 17.4 (d) eine Matrix AF mit $F \in \mathrm{GL}(n, K)$. Mit der Substitution $y = Fx$, also $x = F^{-1}y$, ist dann
$$\mathrm{Im}(AF) = \{AFx : x \in K^n\} = \{Ay : y \in K^n\} = \mathrm{Im}\, A. \qquad \square$$

Algorithmus 17.14 (Basis vom Bild einer Matrix)**.** Die Bestimmung einer Basis von $\mathrm{Im}\, A$ für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist einfacher als die einer Basis von $\mathrm{Ker}\, A$. Es gibt dafür zwei Möglichkeiten:

(a) Nach Lemma 17.13 (b) können wir A mit elementaren Spaltenumformungen auf eine „Spaltenstufenform“ mit $r = \mathrm{rk}\, A$ Stufen bringen, ohne das Bild der Matrix zu ändern. Die ersten r Spalten (die nicht 0 sind) sind dann offensichtlich linear unabhängig und bilden damit eine Basis von $\mathrm{Im}\, A$. Alternativ können wir natürlich auch Zeilenumformungen mit der transponierten Matrix A^T durchführen.

Als Beispiel dafür betrachten wir noch einmal die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$$
aus Beispiel 17.7 und bringen A^T mit Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1 \to -Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3 \to Z3 - 4Z1]{Z2 \to Z2 - 2Z1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{Z3 \to Z3 - 3Z2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist also $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Im}\, A$.

(b) (Basisauswahl) Nach Bemerkung 16.16 (b) wird $\operatorname{Im} A$ von den Spalten von A erzeugt. Wollen wir nicht nur eine beliebige Basis von $\operatorname{Im} A$ bestimmen, sondern wie in Satz 14.11 eine Basis aus den Spalten von A auswählen, so können wir alternativ folgendes Verfahren anwenden: Es seien $x_1, \dots, x_n$ die Spalten von A. Wir bringen nun A mit einem Produkt F von Elementarmatrizen auf Zeilenstufenform FA mit Stufenspalten $k_1 < \cdots < k_r$ wie in Definition 17.5; natürlich ist dabei $r = \operatorname{rk} A$ nach Algorithmus 17.8.

Hätten wir diese Zeilenumformungen nur mit den Stufenspalten $k_1, \dots, k_r$ durchgeführt, so hätten wir stattdessen auch von der Zeilenstufenform nur diese Stufenspalten erhalten, also eine Matrix der Form

$$F \cdot (x_{k_1} \mid \cdots \mid x_{k_r}) = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(m \times r, K)$$

bekommen, die offensichtlich denselben Rang r wie A besitzt. Also ist auch

$$\dim \operatorname{Lin}(x_{k_1}, \dots, x_{k_r}) = r = \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A.$$

Da der Teilraum von $\operatorname{Im} A$, der von den ausgewählten Spalten $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ erzeugt wird, dieselbe Dimension wie $\operatorname{Im} A$ hat, muss er nach Lemma 14.26 gleich $\operatorname{Im} A$ sein, d. h. $(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$ ist ein Erzeugendensystem und nach Satz 14.21 (a) wegen $r = \dim \operatorname{Im} A$ sogar eine Basis von $\operatorname{Im} A$.

So haben wir z. B. für die Matrix A aus (a) bereits in 17.7 eine (reduzierte) Zeilenstufenform berechnet und gesehen, dass die ersten beiden Spalten dabei die Stufenspalten waren. Also sind die ersten beiden Spalten

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von A eine Basis von $\operatorname{Im} A$.

Algorithmus 17.15 (Basisergänzung)**.** Genau wie die Basisauswahl in Algorithmus 17.14 (b) lässt sich auch die Basisergänzung mit dem Gauß-Verfahren explizit durchführen. Hat man nämlich mit Algorithmus 17.11 oder 17.14 (a) eine Basis vom Kern oder Bild einer Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$ bestimmt, so ist es in beiden Fällen sehr einfach, diese zu einer Basis vom gesamten Raum K^n bzw. K^m zu ergänzen:

(a) In Algorithmus 17.11 sind alle Spalten der quadratischen Matrix A' linear unabhängig (weil A' stets Einträge ± 1 auf der Diagonalen und nur Einträge 0 darunter hat). Die Einheitsvektoren e_i für alle Stufenspalten i (also die im Bild nicht eingekreisten Spalten in A') ergänzen damit die gefundene Basis von $\operatorname{Ker} A$ zu einer Basis von K^n — im konkreten Beispiel in Algorithmus 17.11 also e_1 und e_3.

(b) In Algorithmus 17.14 (a) ist aus der Form der gefundenen Basis B klar, dass B durch die Einheitsvektoren, die nicht zu den Stufenzeilen von A^{T} gehören, zu einer Basis von K^m ergänzt wird — im konkreten Beispiel oben also durch e_3.

Algorithmus 17.16 (Operationen mit Unterräumen)**.** Wir betrachten zwei durch erzeugende Vektoren gegebene Unterräume $U_1 = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_k)$ und $U_2 = \operatorname{Lin}(y_1, \dots, y_l)$ von K^n. Mit Hilfe des Gauß-Verfahrens können wir dann die folgenden Konstruktionen explizit durchführen:

(a) (Basis eines Unterraums) Um eine Basis von U_1 zu bestimmen, berechnen wir einfach mit Algorithmus 17.14 eine Basis von $U_1 = \operatorname{Im}(x_1 \mid \cdots \mid x_k)$.

(b) (Komplement von U_1, Quotientenraum K^n/U_1) Aufbauend auf (a) ergänzen wir die gefundene Basis von U_1 wie in Algorithmus 17.15 durch geeignete Einheitsvektoren zu einer Basis von K^n. Diese hinzugenommenen Einheitsvektoren bilden dann nach Bemerkung 15.11 eine Basis eines Komplements von U_1, ihre Klassen in K^n/U_1 nach Bemerkung 15.19 eine Basis von K^n/U_1.

(c) (Summe U_1+U_2) Nach Bemerkung 14.5 ist

$$U_1+U_2=\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l)=\mathrm{Im}\,(\,x_1\mid\cdots\mid x_k\mid y_1\mid\cdots\mid y_l\,).$$

Um eine Basis der Summe zu finden, können wir wie in (a) also wieder Algorithmus 17.14 anwenden.

(d) (Durchschnitt $U_1\cap U_2$) Die Vektoren im Schnitt $U_1\cap U_2$ erhält man offensichtlich durch Gleichsetzen

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k=-\mu_1y_1-\cdots-\mu_ly_l \tag{1}$$

der Elemente von U_1 und U_2, und damit durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k+\mu_1y_1+\cdots+\mu_ly_l=0 \tag{2}$$

(die Vorzeichen spielen hierbei keine Rolle, da mit $y\in U_2$ auch $-y\in U_2$ liegt, und sind daher so gewählt, dass sie sich im resultierenden Gleichungssystem wegheben). Die sich als Lösung ergebenden Werte für $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ können dann in die linke Seite von (1) eingesetzt werden und liefern die gesuchten Vektoren im Schnitt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Unterräume

$$U_1=\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\quad\text{und}\quad U_2=\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$. Der Ansatz (2) führt zum folgenden Gleichungssystem in $\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow{Z3\to Z3-Z2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{Z2\to Z2-Z3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist also eindimensional und wird (z. B. nach Algorithmus 17.11) von $(\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2)=(1,-1,2,-1)$ erzeugt. Einsetzen von λ_1 und λ_2 (oder alternativ μ_1 und μ_2) in (1) zeigt also, dass der eindimensionale Unterraum $U_1\cap U_2$ erzeugt wird von

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$ 38

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch untersuchen, wie inverse Matrizen algorithmisch bestimmt werden können. Dazu benötigen wir zunächst das folgende oft nützliche Kriterium für Invertierbarkeit.

Lemma 17.17. *Für eine quadratische Matrix $A\in\mathrm{Mat}(n\times n,K)$ sind äquivalent:*

(a) $A\in\mathrm{GL}(n,K)$.

(b) *Bringt man A durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform, so ist das Ergebnis stets die Einheitsmatrix E_n.*

(c) *A ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist $A\in\mathrm{GL}(n,K)$, so gilt $\mathrm{rk}\,A=n$ nach Bemerkung 16.39 (b). Bringt man A auf reduzierte Zeilenstufenform, so hat das Resultat nach Algorithmus 17.8 also n Stufen. Die einzige $n\times n$-Matrix in reduzierter Zeilenstufenform, die n Stufen hat, ist aber die Einheitsmatrix E_n.

(b) $\Rightarrow$ (c): Nach Voraussetzung können wir A mit elementaren Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix bringen, d. h. es gibt Elementarmatrizen $F_1,\dots,F_m$ mit $F_1\cdots F_m A = E_n$. Nach Bemerkung 17.4 (a) sind Elementarmatrizen aber invertierbar und ihre Inversen wieder Elementarmatrizen, und damit ist auch $A = F_m^{-1}\cdots F_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen.

(c) $\Rightarrow$ (a): Dies haben wir bereits in Bemerkung 17.4 (b) gesehen. □

Algorithmus 17.18 (Inverse Matrix)**.** Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n\times n, K)$. Wir wollen überprüfen, ob A invertierbar ist, und in diesem Fall die inverse Matrix A^{-1} berechnen. Dazu starten wir mit der $n\times(2n)$-Matrix $(A\,|\,E_n)$, in der wir A und die Einheitsmatrix der gleichen Größe nebeneinander schreiben. Wir bringen dann die Matrix A mit dem Gauß-Verfahren auf reduzierte Zeilenstufenform, machen die dafür benötigten Zeilenumformungen aber in allen $2n$ Spalten der Matrix. Ist $F \in \mathrm{GL}(n,K)$ das Produkt der Elementarmatrizen, das den durchgeführten Umformungen entspricht, so erhalten wir also die Matrix $(FA\,|\,FE_n) = (FA\,|\,F)$, wobei in der linken Hälfte die reduzierte Zeilenstufenform FA von A steht.

Nach Lemma 17.17 ist A genau dann invertierbar, wenn für diese reduzierte Zeilenstufenform die Einheitsmatrix herausgekommen ist, wenn also $FA = E_n$ ist. In diesem Fall ist aber offensichtlich $F = A^{-1}$ die gesuchte inverse Matrix — und diese steht nach den Umformungen genau in der rechten Hälfte unseres Diagramms.

Als konkretes Beispiel wollen wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$$

wählen. Wir wenden also wie gewohnt das Gauß-Verfahren auf die Matrix A an, führen aber alle Umformungen mit der 2×4-Matrix $(A\,|\,E_2)$ durch:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2\to Z2-3Z1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1\to Z1-Z2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Da die herausgekommene reduzierte Zeilenstufenform von A (die linke Hälfte dieser Matrix) die Einheitsmatrix ist, ist A invertierbar. Die inverse Matrix steht nun in der rechten Hälfte des Diagramms: Es ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.19.

(a) Berechne Basen von $\mathrm{Im}\,A$ und $\mathrm{Ker}\,A$ für die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne den Rang der reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a,b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 17.20. In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Unterräume $U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ und $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = x_1 + x_2 - 3x_4 = 0\}$, wobei $x_1,\dots,x_4$ wie üblich die Koordinaten von $x \in \mathbb{R}^4$ sind. Berechne Basen von U_1, U_2, $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$, und einem Komplement von $U_1 + U_2$.

Aufgabe 17.21. Untersuche, ob die reellen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zueinander äquivalent sind, und finde gegebenenfalls invertierbare Matrizen S und T mit $B = SAT$.

Aufgabe 17.22 (Elementare Codierungstheorie)**.** In dieser Aufgabe sei $K = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit 2 Elementen aus Beispiel 3.6 (b).

(a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(7 \times 4, K)$. Berechne eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(3 \times 7, K)$ mit $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Ker}\, B$.

(b) Zeige: Für alle $y \in K^7$ gibt es genau ein $x \in K^4$, für das sich y von Ax in höchstens einer Koordinate unterscheidet. (Hinweis: der Vektor $By \in K^3$ sollte erkennen lassen, wo dieser Unterschied liegt.)

Diese Aufgabe beinhaltet die Grundidee der sogenannten Codierungstheorie. Angenommen, wir wollen einen Vektor $x \in K^4$ (also 4 Bits) über eine gestörte Leitung an einen Empfänger übertragen. Wenn wir dann statt der 4 Bits x die 7 Bits Ax übertragen und beim Empfänger statt Ax fälschlicherweise y ankommt, kann dieser nach (b) die ursprüngliche Information x auch dann noch aus y rekonstruieren, wenn bei ihm ein Bit falsch angekommen ist. Auf jeder CD oder DVD sind die Daten in einer solchen Art codiert, damit z. B. durch Kratzer verursachte Lesefehler korrigiert werden können.

Aufgabe 17.23. Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Zeige, dass die Matrix

$$(a_j^i)_{0 \le i,j \le n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

genau dann invertierbar ist, wenn alle $a_0, \dots, a_{n-1}$ verschieden sind.

Aufgabe 17.24 (Basiswechselmatrix für K^n)**.** Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_n)$ zwei Basen von K^n. Wir bilden daraus die Matrix $A = (\, y_1 \mid \cdots \mid y_n \mid x_1 \mid \cdots \mid x_n\,) \in \mathrm{Mat}(n \times 2n, K)$. Nun bringen wir die linke Hälfte dieser Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform, führen die Umformungen dabei aber wieder mit allen Spalten der Matrix durch.

Zeige, dass dann in der rechten Hälfte der Matrix genau die Basiswechselmatrix $A^{B,C}$ aus Definition 16.28 steht.