14. Basen und Dimension

In diesem Kapitel wollen wir beginnen, die Struktur von Vektorräumen genauer zu untersuchen. Besonders zentral ist dabei der Begriff der Basis, den ihr ja wahrscheinlich schon aus der Schule kennt. Die Idee dabei ist, dass man aus jedem Vektorraum V eine (im Moment der Einfachheit halber als endlich angenommene) Familie von Vektoren $x_1,\dots,x_n$ auswählen kann, so dass sich jedes $x \in V$ auf eindeutige Art als eine sogenannte Linearkombination

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

dieser ausgewählten Vektoren mit geeigneten Skalaren $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ schreiben lässt. Die $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ lassen sich dann als „Koordinaten" von x bezüglich der Vektoren $x_1,\dots,x_n$ auffassen. Der Vorteil daran ist, dass man mit diesen Koordinaten in vielen Fällen deutlich einfacher rechnen kann als mit dem ursprünglichen Vektor x selbst, da sie ja einfach Elemente aus dem Grundkörper K sind und nicht aus einem abstrakten Vektorraum.

14.A Linearkombinationen und Basen

Als Erstes wollen wir den zentralen Begriff der Linearkombinationen einführen, also der Vektoren, die sich aus einer gegebenen Familie von Vektoren mit Hilfe beliebiger Skalarmultiplikationen und Vektoradditionen erzeugen lassen.

Definition 14.1 (Familien und Linearkombinationen)**.** Es sei V ein K-Vektorraum.

(a) Eine **Familie** von Vektoren in V ist eine Indexmenge I zusammen mit einem Vektor $x_i \in V$ für alle $i \in I$. Wir schreiben eine solche Familie als $B = (x_i)_{i \in I}$ und nennen die x_i ihre **Elemente**. Ist die Indexmenge I endlich, so sprechen wir auch von einer **endlichen Familie** B, wählen als Indexmenge in der Regel $I = \{1,\dots,n\}$, und schreiben die Familie dann einfach als $B = (x_1,\dots,x_n)$.

(b) Es sei $B = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V. Eine **Linearkombination** der Vektoren aus B ist ein Vektor der Form

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \in V, \qquad (*)$$

wobei $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$ gilt und nur endlich viele dieser λ_i ungleich 0 sind (so dass der Ausdruck $(*)$ nach Weglassen aller Summanden, die 0 sind, also in jedem Fall nur eine endliche Summe ist). Im Fall der endlichen Indexmenge $I = \{1,\dots,n\}$ schreibt man die Linearkombination in der Regel als $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Wir bezeichnen die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus B mit $\operatorname{Lin} B$.

Bemerkung 14.2.

(a) Beachte, dass eine *Familie* $B = (x_i)_{i \in I}$ nicht das gleiche ist wie eine *Menge* $\{x_i : i \in I\}$ von Vektoren: Im Gegensatz zu einer Menge sind die gegebenen Vektoren in einer Familie den Elementen einer Indexmenge zugeordnet, haben also z. B. im Fall einer endlichen Familie mit Indexmenge $\{1,\dots,n\}$ eine festgelegte Reihenfolge $x_1,\dots,x_n$. Für die obige Definition 14.1 (b) ist dies noch nicht wichtig (wir hätten $\operatorname{Lin} B$ genauso gut auf die gleiche Art für eine *Menge* B definieren können, und in der Tat wird das in der Literatur auch oft getan), aber später werden wir die gegebene Reihenfolge der Vektoren zwingend benötigen, um die Koordinaten eines Vektors den Elementen einer Basis zuordnen zu können.

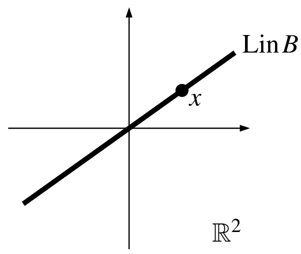
(b) Im Folgenden werden wir uns in den meisten Fällen nur mit endlichen Familien beschäftigen. In diesem Fall ist die Bedingung in Definition 14.1 (b), dass nur endlich viele der Koeffizienten λ_i ungleich 0 sein dürfen, natürlich automatisch erfüllt und kann daher auch weggelassen

werden. Im Fall unendlicher Familien ist sie jedoch sehr wichtig, da der Ausdruck $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ sonst eine unendliche Summe wäre und damit ohne Konvergenzbetrachtungen wie in Kapitel 7 (die nicht Gegenstand der linearen Algebra sind und in einem allgemeinen Körper auch
30 gar nicht definiert werden können) keinen Sinn ergeben würde.

Beispiel 14.3.

(a) Für $m \in \mathbb{R}$ und die einelementige Familie $B = (x)$ in $\mathbb{R}^2$ mit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Lin} B &= \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda m \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = m x_1 \right\} \end{aligned}$$



genau der Unterraum U_1 aus Beispiel 13.8 (a). In der Tat werden wir gleich in Lemma 14.4 sehen, dass $\operatorname{Lin} B$ wie im Bild rechts eine sehr anschauliche Bedeutung hat: Es ist immer ein Untervektorraum, und zwar der kleinste, der alle Elemente von B enthält.

(b) Für die leere Familie $B = ()$ in einem beliebigen Vektorraum V ist $\operatorname{Lin} B = \{0\}$, da die leere Summe $\sum_{i\in\emptyset} \lambda_i x_i$ analog zu Notation 3.9 (c) konventionsgemäß gleich 0 ist.

(c) Im Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 13.3 (d) betrachten wir die Familie $B = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller „Einheitsfolgen" $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, wobei die 1 jeweils an der Stelle i steht. Wegen der Endlichkeitsbedingung in Definition 14.1 (b) ist $\operatorname{Lin} B$ dann *nicht* der gesamte Raum aller Folgen, sondern nur die Menge aller Folgen, bei denen nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 sind.

Lemma 14.4 (Erzeugte Unterräume)**.** *Für jede Familie B in einem Vektorraum V gilt:*

(a) $\operatorname{Lin} B$ *ist ein Unterraum von V, der alle Elemente von B enthält.*

(b) *Ist U ein beliebiger Unterraum von V, der alle Elemente von B enthält, so ist* $\operatorname{Lin} B \subset U$.

Anschaulich ist $\operatorname{Lin} B$ *also „der kleinste Unterraum von V, der B enthält". Man nennt ihn daher auch den von B **erzeugten** oder **aufgespannten Unterraum**.*

Beweis. Es sei $B = (x_i)_{i\in I}$.

(a) Natürlich ist jedes x_i in $\operatorname{Lin} B$ enthalten, da wir es als Linearkombination mit Koeffizient 1 vor x_i und 0 vor allen anderen Elementen von B schreiben können. Wir müssen also nur noch die Unterraumkriterien aus Definition 13.5 überprüfen. Dies ist aber sehr einfach: $\operatorname{Lin} B$ enthält z. B. den Nullvektor $\sum_{i\in I} 0 \cdot x_i$ und ist damit nicht leer, und für alle $x = \sum_{i\in I} \mu_i x_i$ und $y = \sum_{i\in I} \nu_i x_i$ in $\operatorname{Lin} B$ (mit also nur endlich vielen μ_i und ν_i ungleich 0) sowie $\lambda \in K$ gilt

$$x + y = \sum_{i\in I} (\mu_i + \nu_i) x_i \quad \in V \qquad \text{und} \qquad \lambda x = \sum_{i\in I} (\lambda \mu_i) x_i \quad \in V.$$

Da auch hier natürlich wieder nur endlich viele $\mu_i + \nu_i$ bzw. $\lambda \mu_i$ ungleich 0 sind, liegen diese Elemente ebenfalls in $\operatorname{Lin} B$.

(b) Ist U ein solcher Unterraum, so enthält er also alle x_i mit $i \in I$, und damit nach Bemerkung 13.6 (a) auch jede Linearkombination dieser Vektoren, also $\operatorname{Lin} B$. □

Bemerkung 14.5 (Summen als erzeugte Unterräume)**.** Es sei V ein K-Vektorraum. Ferner seien $U_1 = \operatorname{Lin}\big((x_i)_{i\in I_1}\big)$ und $U_2 = \operatorname{Lin}\big((x_i)_{i\in I_2}\big)$ zwei Untervektorräume von V, die von Vektoren x_i mit $i \in I_1$ bzw. $i \in I_2$ erzeugt werden. Dann sind die Elemente der Summe $U_1 + U_2$ natürlich gerade die Linearkombinationen aus allen Vektoren x_i mit $i \in I_1$ oder $i \in I_2$ zusammen genommen. Es ist dann also $U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}\big((x_i)_{i\in I_1\cup I_2}\big)$.

Mit unseren Vorarbeiten können wir nun den Begriff der Basis eines Vektorraums definieren.

Definition 14.6 (Basen von Vektorräumen)**.** Es sei $B = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum V.

(a) Die Familie B heißt ein **Erzeugendensystem** von V, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, d. h. wenn sich jeder Vektor $x \in V$ als Linearkombination der Vektoren in B schreiben lässt.

(b) Die Familie B heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ des Nullvektors gibt, in der mindestens ein λ_i ungleich 0 ist (man nennt dies auch eine *nicht-triviale Linearkombination* des Nullvektors).

Ist das Gegenteil der Fall, folgt aus der Linearkombination $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ des Nullvektors mit zunächst beliebigen $\lambda_i \in K$ also bereits, dass alle λ_i gleich 0 sein müssen, so heißt B **linear unabhängig**.

(c) Die Familie B heißt eine **Basis** von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V und linear unabhängig ist.

Beispiel 14.7.

(a) Enthält eine Familie $B = (x_i)_{i \in I}$ den Nullvektor, d. h. ist $x_i = 0$ für ein $i \in I$, so ist B stets linear abhängig, denn dann ist ja $1 \cdot x_i = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors. Ebenso ist B immer linear abhängig, wenn die Familie einen Vektor mehrfach enthält, also wenn $x_i = x_j$ für gewisse $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt, da dann $1 \cdot x_i - 1 \cdot x_j = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors ist.

(b) Ist $V = K^n$ und sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

die sogenannten **Einheitsvektoren** von K^n, so ist die Familie $B = (e_1, \dots, e_n)$ aller dieser Einheitsvektoren eine Basis von V:

- B ist ein Erzeugendensystem von V, denn jeder Vektor in V hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

- B ist linear unabhängig, denn sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist natürlich notwendigerweise $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Man nennt B die **Standardbasis** von K^n.

Als Spezialfall davon für $n = 0$ ist die leere Familie eine Basis des Nullvektorraums (siehe Beispiel 14.3 (b)).

(c) In $V = \mathbb{R}^3$ ist die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

kein Erzeugendensystem, denn kein Vektor mit letztem Eintrag ungleich 0 kann eine Linearkombination der Elemente aus B sein. Die Familie B ist auch nicht linear unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ist eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors aus den Elementen von B. Anschaulich bedeutet dies gerade, dass einer der drei Vektoren in der Ebene liegt, die von den beiden anderen erzeugt wird.

Beachte auch, dass je zwei der drei Vektoren dieser Familie B jedoch stets linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit einer Familie kann also *nicht* überprüft werden, indem man immer nur zwei ihrer Vektoren miteinander vergleicht.

(d) Im Vektorraum $V \leq \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen aus Beispiel 13.8 (c) ist die Familie $B = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten eine Basis von V:

- B ist ein Erzeugendensystem, da jede Polynomfunktion nach Definition eine (endliche!) Linearkombination der Potenzfunktionen x^i ist;
- B ist linear unabhängig, da eine nicht-triviale Linearkombination der x^i nach dem Koeffizientenvergleich aus Lemma 3.21 nie die Nullfunktion sein kann.

Genauso ist natürlich $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ eine Basis des Vektorraums aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens n.

(e) Umformuliert bedeutet Beispiel 14.3 (c), dass die Einheitsfolgen $e_i = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, wobei die 1 an Position i steht, kein Erzeugendensystem des Folgenraums $\text{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ bilden. Sie sind jedoch linear unabhängig, denn ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i = (0,0,0,\dots)$ (für eine gewisse Summe mit nur endlich vielen $\lambda_i \neq 0$), so folgt durch Vergleich des i-ten Folgengliedes natürlich sofort $\lambda_i = 0$ für alle i.

Aufgabe 14.8. Untersuche die Familie B in den folgenden Fällen auf lineare Unabhängigkeit im Vektorraum V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

(b) V ein beliebiger Vektorraum; $B = (x+y, x+z, y+z)$ für drei linear unabhängige Vektoren x,y,z.

(c) $V = \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $B = (f, f')$ für ein gegebenes Polynom f (wobei f' die Ableitung von f wie in Beispiel 13.17 (d) ist).

(d) $V = \text{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $B = (f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ mit

$$f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a, \\ x-a & \text{für } x \geq a. \end{cases}$$

Wie wir in der Einleitung zu diesem Kapitel schon erwähnt haben, ist das Schöne an einer Basis eines Vektorraums V nun, dass sich jeder Vektor aus V auf eindeutige Art als Linearkombination dieser Vektoren schreiben lässt. Dies wird insbesondere bei der Untersuchung linearer Abbildungen in Abschnitt 16.B noch eine große Rolle spielen.

Lemma und Definition 14.9 (Koordinatendarstellung)**.** *Es sei $B = (x_i)_{i\in I}$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Dann lässt sich jeder Vektor $x \in V$ auf eindeutige Art als Linearkombination*

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$$

*mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ (von denen nur endlich viele ungleich 0 sind) schreiben. Man nennt die λ_i die **Koordinaten** von x bezüglich der Basis B.*

Beweis. Es sei $x \in V$. Da B ein Erzeugendensystem von V ist, ist $x \in \operatorname{Lin} B$ also auch eine Linearkombination der Vektoren aus B, d. h. es gibt eine Darstellung der gewünschten Form $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Um auch noch die Eindeutigkeit dieser Darstellung zu zeigen, sei $x = \sum_{i \in I} \mu_i x_i$ eine weitere Darstellung von x als Linearkombination der gegebenen Basisvektoren. Dann erhalten wir durch Subtraktion der beiden Darstellungen

$$0 = x - x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i - \sum_{i \in I} \mu_i x_i = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) x_i.$$

Da B linear unabhängig ist, folgt daraus für alle i aber sofort $\lambda_i - \mu_i = 0$ und damit $\lambda_i = \mu_i$, d. h. die beiden Darstellungen müssen gleich sein. □

14.B Existenz von Basen

Um Vektorräume mit Hilfe von Basen untersuchen zu können, müssen wir uns jetzt natürlich noch fragen, ob denn überhaupt jeder Vektorraum eine Basis besitzt – aus den Vektorraumaxiomen ist das ja nicht offensichtlich. In der Tat ist das aber so: Man kann beweisen, dass jeder beliebige Vektorraum eine Basis hat. Wir wollen uns beim Beweis dieser Tatsache allerdings auf Vektorräume beschränken, die von *endlich vielen* Elementen erzeugt werden können und dann auch eine *endliche* Basis besitzen (den allgemeinen Beweis könnt ihr z. B. in [GK] Proposition II.2.22 finden). Dies liegt zum einen daran, dass der Beweis für Vektorräume mit unendlichen Basen deutlich komplizierter und abstrakter ist. Zum anderen – und das ist fast der wichtigere Grund – ist der Beweis im allgemeinen Fall *nicht konstruktiv* und daher eigentlich nur von theoretischem Interesse. Betrachten wir z. B. noch einmal den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 13.3 (d) und Beispiel 14.7 (e). Wir werden in Beispiel 14.20 (c) sehen, dass dieser Vektorraum keine *endliche* Basis besitzt. Man weiß nun zwar aufgrund des oben angegebenen Satzes, dass dieser Folgenraum dennoch eine (unendliche) Basis hat, aber niemand kann eine solche Basis konkret angeben! Versucht doch einmal, eine Basis zu finden – ihr werdet sehr schnell merken, dass das aussichtslos ist. Zur Erinnerung: Ihr müsstet dazu eine (unendliche) Familie von Folgen hinschreiben, so dass *jede beliebige* Folge auf *eindeutige* Art eine *endliche* Linearkombination der Folgen ist, die ihr ausgewählt habt.

Formal bedeutet dies, dass wir uns in Zukunft in der Regel auf Vektorräume mit der folgenden Zusatzbedingung beschränken wollen.

Definition 14.10 (Endlich erzeugte Vektorräume)**.** Ein K-Vektorraum V heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Vektoren besitzt.

Für derartige Vektorräume wollen wir nun die Existenz von Basen zeigen. In der Tat werden wir die stärkeren Aussagen beweisen, dass man aus jedem Erzeugendensystem (das evtl. noch nicht linear unabhängig ist) eine Basis auswählen und jede linear unabhängig Menge (die evtl. noch kein Erzeugendensystem ist) zu einer Basis ergänzen kann.

Satz 14.11 (Basisauswahl). *Es sei B ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraums V. Dann kann man aus B eine Basis von V auswählen.*

Insbesondere besitzt also jeder endlich erzeugte Vektorraum eine (endliche) Basis.

Beweis. Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Ist B bereits linear unabhängig, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es eine Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$, bei der nicht alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gleich Null sind. Wir können also ein $i \in \{1, \dots, n\}$ wählen mit $\lambda_i \neq 0$. Mit diesem i setzen wir nun $B' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ und behaupten, dass B' immer noch ein Erzeugendensystem von V ist.

In der Tat ist dies leicht einzusehen: Wegen der vorausgesetzten Linearkombination des Nullvektors und $\lambda_i \neq 0$ ist ja

$$x_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \big(-\lambda_1 x_1 - \dots - \lambda_{i-1} x_{i-1} - \lambda_{i+1} x_{i+1} - \dots - \lambda_n x_n \big) \quad \in \operatorname{Lin}(B'),$$

da sich dieser Vektor als Linearkombination von $x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n$ darstellen lässt. Damit enthält der Unterraum $\operatorname{Lin}(B')$ alle Vektoren $x_1,\dots,x_n$, nach Lemma 14.4 (b) also auch den von diesen Vektoren erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Lin}(B) = V$. Es ist daher $\operatorname{Lin}(B') = V$, d. h. B' ist immer noch ein Erzeugendensystem von V.

Ist B' nun linear unabhängig, so sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir das obige Verfahren so lange, bis die resultierende Familie linear unabhängig und damit eine Basis von V ist (dies muss spätestens nach n Schritten passieren, da dann keine Vektoren mehr übrig sind und die leere Familie natürlich linear unabhängig ist). □

Beispiel 14.12. Beachte, dass der Beweis von Satz 14.11 auch konstruktiv ist, d. h. ein Verfahren angibt, wie man aus einem Erzeugendensystem B eine Basis bekommt: Solange es eine nicht-triviale Linearkombinationen der Null in B gibt, lässt man einen beliebigen Vektor aus B weg, der in dieser Linearkombination mit einem Vorfaktor ungleich Null auftaucht. So gibt es z. B. in dem Erzeugendensystem

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ die nicht-triviale Linearkombination

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

also können wir aus B einen der Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ weglassen. Lassen wir in diesem Fall z. B. den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ weg, so haben wir damit (nach Beispiel 14.7 (b)) bereits eine Basis von $\mathbb{R}^2$ erhalten, nämlich die Standardbasis.

Als Nächstes wollen wir unterschiedliche Basen eines Vektorraums miteinander vergleichen können. Hierfür beweisen wir zunächst ein Hilfsresultat.

Lemma 14.13 (Austauschlemma). *Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine (endliche) Basis eines Vektorraums V. Weiterhin sei $y \in V$ ein beliebiger Vektor, den wir natürlich (nach Lemma 14.9) als Linearkombination $y = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ schreiben können. Ist dann $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, so ist auch $B' = (x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$ eine Basis von V (wir können in der Basis also x_i durch y ersetzen).*

Beweis. Nach evtl. Umbenennung der Vektoren können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $i = 1$, also $\lambda_1 \neq 0$ und $B' = (y,x_2,\dots,x_n)$ annehmen. Dann gilt:

- B' erzeugt V: Wegen
$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot (y - \lambda_2 x_2 - \cdots - \lambda_n x_n) \quad \in \operatorname{Lin}(B')$$
enthält $\operatorname{Lin}(B') = \operatorname{Lin}(y,x_2,\dots,x_n)$ alle Vektoren $x_1,\dots,x_n$ und nach Lemma 14.4 (b) damit auch den davon erzeugen Unterraum $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n) = \operatorname{Lin}(B) = V$. Also ist B' ein Erzeugendensystem von V.
- B' ist linear unabhängig: Ist
$$\mu_1 y + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n = 0$$
eine Linearkombination der Null mit Vektoren aus B', so folgt daraus
$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_n x_n \\ &= (\mu_1\lambda_1)x_1 + (\mu_1\lambda_2 + \mu_2)x_2 + \cdots + (\mu_1\lambda_n + \mu_n)x_n. \end{aligned}$$
Dies ist nun eine Linearkombination der Null mit Vektoren aus B. Da B linear unabhängig ist, müssen darin alle Vorfaktoren verschwinden, d. h. es gilt $\mu_1\lambda_1 = 0$ (und damit $\mu_1 = 0$ wegen $\lambda_1 \neq 0$) und dann auch $\mu_1\lambda_i + \mu_i = \mu_i = 0$ für alle $i = 2,\dots,n$. Also ist B' linear
31 unabhängig. □

Beispiel 14.14. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$ aus Beispiel 14.7 (b). Weiterhin sei $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$. Da in dieser Linearkombination die Vektoren e_1 und e_2 mit Vorfaktoren ungleich Null vorkommen, folgt aus dem Austauschlemma 14.13 also, dass wir einen dieser Vektoren durch y ersetzen können, d. h. dass auch (y, e_2, e_3) und (e_1, y, e_3) Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Im Gegensatz dazu ist (e_1, e_2, y) jedoch keine Basis von V (wie aus der Linearkombination $e_1 + 2e_2 - y = 0$ natürlich auch sofort folgt).

Der folgende Satz ergibt sich nun einfach, indem man Lemma 14.13 mehrmals nacheinander anwendet.

Satz 14.15 (Steinitzscher Austauschsatz). *Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis und $(y_1, \dots, y_r)$ eine linear unabhängige Familie in einem Vektorraum V.*

Dann ist $r \le n$, und die $x_1, \dots, x_n$ lassen sich so umnummerieren, dass $B' = (y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ ebenfalls eine Basis von V ist (man kann in der Basis also r der Vektoren $x_1, \dots, x_n$ durch die gegebenen Vektoren $y_1, \dots, y_r$ ersetzen).

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über r; für $r = 0$ ist nichts zu zeigen.

Für den Induktionsschritt $r \to r+1$ sei nun $(y_1, \dots, y_{r+1})$ linear unabhängig. Da dann natürlich auch $(y_1, \dots, y_r)$ linear unabhängig ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung $r \le n$, und nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren in B ist $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ eine Basis von V. Wir können den Vektor y_{r+1} also als Linearkombination

$$y_{r+1} = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r + \lambda_{r+1} x_{r+1} + \cdots + \lambda_n x_n$$

schreiben. Dabei muss mindestens einer der Vorfaktoren $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ ungleich Null sein, denn andernfalls wäre

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r - y_{r+1} = 0$$

im Widerspruch dazu, dass die Familie $(y_1, \dots, y_{r+1})$ linear unabhängig ist. Insbesondere muss also $r+1 \le n$ gelten, und nach evtl. Umbenennung der $x_{r+1}, \dots, x_n$ können wir annehmen, dass $\lambda_{r+1} \ne 0$ ist. Dann ist nach dem Austauschlemma 14.13 aber auch $(y_1, \dots, y_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$ eine Basis von V. Damit ist der Satz mit Induktion bewiesen. □

Der Steinitzsche Austauschsatz hat zwei wichtige Konsequenzen: zum einen das bereits angekündigte Gegenstück zur Basisauswahl in Satz 14.11, und zum anderen die Tatsache, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Elemente haben.

Folgerung 14.16 (Basisergänzung). *Es sei B eine linear unabhängige Familie eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann ist B endlich, und man kann B zu einer endlichen Basis von V ergänzen.*

Beweis. Nach Satz 14.11 besitzt V eine endliche Basis $(x_1, \dots, x_n)$. Wegen Satz 14.15 kann es dann keine linear unabhängige Teilmenge von V mit mehr als n Elementen geben; insbesondere ist B also endlich und von der Form $B = (y_1, \dots, y_r)$ für ein $r \le n$. Satz 14.15 besagt nun, dass wir diese Vektoren $y_1, \dots, y_r$ in die Basis $(x_1, \dots, x_n)$ hineintauschen können, so dass wir also eine Basis von V bekommen, die die Vektoren aus B enthält. □

Aufgabe 14.17. Es sei $U = \mathrm{Lin}(x_1, x_2, x_3) \le \mathbb{R}^3$ mit

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finde eine Basis von U und ergänze sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Folgerung 14.18. *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums sind endlich und haben gleich viele Elemente.*

Beweis. Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum.Nach Folgerung 14.16 ist zunächst einmal jede Basis von V endlich. Sind nun $B = (x_1,\dots,x_n)$ und $B' = (y_1,\dots,y_r)$ zwei Basen von V, so folgt $r \le n$ aus Satz 14.15, und aus Symmetriegründen durch Vertauschen von B und B' dann natürlich auch $n \le r$. Also ist $n = r$, d. h. B und B' haben gleich viele Elemente. □

Da jeder endlich erzeugte Vektorraum nach Satz 14.11 auch wirklich eine Basis besitzt, können wir also definieren:

Definition 14.19 (Dimension von Vektorräumen)**.** Für einen endlich erzeugten Vektorraum V ist die **Dimension**, geschrieben $\dim_K V$ oder einfach $\dim V$, definiert als die Anzahl der Elemente in einer (beliebigen) Basis von V.

Ist V nicht endlich erzeugt (und hat damit natürlich auch keine endliche Basis), so schreiben wir formal $\dim V = \infty$. Ein endlich erzeugter Vektorraum wird daher oft auch als **endlich-dimensionaler Vektorraum** bezeichnet.

Beispiel 14.20.

(a) Nach Beispiel 14.7 (b) ist $\dim K^n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Nach Beispiel 14.7 (d) hat der Raum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens n eine Basis $(x^0, x^1, \dots, x^n)$, und damit Dimension $n+1$.

(c) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Raum aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 13.3 (d). Nach Beispiel 14.7 (d) besitzt V eine unendliche linear unabhängige Familie von Vektoren und kann somit nach Folgerung 14.16 nicht endlich erzeugt sein. Es ist also $\dim V = \infty$.

Unsere erste Anwendung des Dimensionsbegriffs ist ein vereinfachtes Kriterium dafür, ob eine gegebene Familie B eines endlich-dimensionalen Vektorraums V eine Basis ist: Wenn wir bereits wissen, dass B die richtige Anzahl von Vektoren enthält, dann brauchen wir nicht mehr zu überprüfen, dass B ein Erzeugendensystem *und* linear unabhängig ist, sondern es reicht bereits *eine* dieser beiden Eigenschaften.

Satz 14.21 (Basiskriterium)**.** *Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Familie von n Vektoren in einem endlich erzeugten Vektorraum V.*

(a) *Ist B ein Erzeugendensystem von V, so gilt $n \ge \dim V$.*

(b) *Ist B linear unabhängig, so gilt $n \le \dim V$.*

Ist eine dieser beiden Voraussetzungen erfüllt und sogar $n = \dim V$, so ist B bereits eine Basis von V.

Beweis. Dies folgt unmittelbar mit Hilfe der Basisauswahl und -ergänzung:

(a) Nach Satz 14.11 können wir aus B eine Basis B' von V auswählen. Da diese Basis B' dann aus $\dim V$ Vektoren besteht, muss natürlich $\dim V \le n$ gelten.

(b) Nach Folgerung 14.16 können wir B zu einer Basis B' von V ergänzen. Da diese Basis wieder aus $\dim V$ Vektoren besteht, folgt $\dim V \ge n$.

In beiden Fällen folgt im Fall $n = \dim V$ natürlich $B' = B$, d. h. B ist bereits eine Basis von V. □

Wir wollen nun sehen, wie man endlich erzeugte Vektorräume mit Hilfe des Dimensionsbegriffs klassifizieren kann. Immer wenn man eine neue mathematische Struktur eingeführt und ein paar Beispiele untersucht hat, fragt man sich in der Regel, ob man vielleicht sogar eine *vollständige* Liste aller Beispiele angeben kann – in unserem Fall also, ob wir eine vollständige Liste aller (endlich erzeugten) Vektorräume hinschreiben können. Dabei soll „vollständig" immer „vollständig bis auf Isomorphie" bedeuten, da wir ja in Beispiel 13.31 schon gesehen haben, dass isomorphe Vektorräume von ihrer Struktur her ohnehin ununterscheidbar sind, so dass es uns bei isomorphen Vektorräumen natürlich reichen sollte, wenn einer von ihnen in unserer Liste steht.

Bei vielen mathematischen Strukturen ist eine derartige Klassifikation schlichtweg aussichtslos, weil es viel zu viele Beispiele gibt, die auch keinem ersichtlichen Schema folgen. Dies ist z. B. bei Gruppen (siehe Definition 3.1) der Fall – niemand kann eine vollständige Liste aller Gruppen (bis auf Isomorphie) angeben. Es ist eine Besonderheit der linearen Algebra, dass dies bei endlich erzeugten Vektorräumen anders ist: Diese Vektorräume sind genau durch ihre Dimension klassifiziert, d. h. zu jedem Körper K und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie *genau einen* K-Vektorraum dieser Dimension, nämlich K^n.

Dieses Ergebnis, das wir jetzt zeigen wollen, wird uns die Arbeit später ganz wesentlich vereinfachen: Wenn wir Aussagen über beliebige endlich erzeugte Vektorräume beweisen wollen, genügt es deswegen nämlich, nur die Vektorräume K^n zu betrachten – und mit denen lässt es sich natürlich deutlich leichter arbeiten als mit abstrakten Vektorräumen.

Um dieses Klassifikationsresultat zu zeigen, beginnen wir mit der einfachen Aussage, dass isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension haben. Dies sollte, da man sich isomorphe Vektorräume ja als „ununterscheidbar" vorstellen kann, nicht weiter erstaunlich sein.

Satz 14.22. *Es seien $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen K-Vektorräumen, $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine endliche Familie in V und $f(B) := (f(x_1), \dots, f(x_n))$ die zugehörige Familie der Bildvektoren in W. Dann gilt:*

(a) *Ist f surjektiv und B ein Erzeugendensystem von V, so ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W.*

(b) *Ist f injektiv und B linear unabhängig, so ist auch $f(B)$ linear unabhängig.*

(c) *Ist f ein Isomorphismus und B eine Basis von V, so ist $f(B)$ eine Basis von W. Insbesondere haben isomorphe endlich erzeugte Vektorräume also die gleiche Dimension.*

Beweis.

(a) Es sei $y \in W$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = y$, und weil B ein Erzeugendensystem von V ist, können wir $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ schreiben. Damit ist aber auch

$$y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

eine Linearkombination von Vektoren aus $f(B)$. Also ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W.

(b) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = 0$, also (weil f ein Morphismus ist) mit

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist f injektiv, d. h. es ist $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ aufgrund von Lemma 13.24. Also folgt bereits $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ und damit auch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, da B linear unabhängig ist. Die Familie $f(B)$ ist somit linear unabhängig.

(c) ist einfach nur (a) kombiniert mit (b). □

Nach Teil (c) dieses Satzes ist also $K^n \not\cong K^m$ für $n \neq m$. Um unser angekündigtes Klassifikationsresultat zu zeigen, müssen wir also nur noch beweisen, dass jeder K-Vektorraum der Dimension n bereits isomorph zu K^n ist.

Satz 14.23 (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume)**.** *Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim V = n$. Dann ist V isomorph zu K^n.*

Beweis. Wir wählen eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V. Dann ist die Abbildung

$$f\colon K^n \to V, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

ein Isomorphismus (es ist klar, dass f linear ist, und f ist nach Lemma 14.9 bijektiv). □

Folgerung 14.24 (Dimension von Produkten)**.** *Sind V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Produkte von mehr als zwei Vektorräumen.

Beweis. Nach Satz 14.23 gibt es Isomorphismen $f\colon K^n \to V$ und $g\colon K^m \to W$ mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$. Dann ist aber auch

$$K^{n+m} = K^n \times K^m \to V \times W,\ (x, x') \mapsto (f(x), g(x'))$$

ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $(y, y') \mapsto (f^{-1}(y), g^{-1}(y'))$), und damit folgt

$$\dim(V \times W) = \dim K^{n+m} = n + m = \dim V + \dim W$$

nach Satz 14.22 (c) und Beispiel 14.20 (a). □

Aufgabe 14.25. Es sei (a_n) die sogenannte *Fibonacci-Folge*, die durch $a_0 = a_1 = 1$ sowie die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

gegeben ist, also die Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n herleiten.

Es sei dazu $V \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Unterraum aller reellen Zahlenfolgen, die die Rekursionsgleichung $(*)$ erfüllen (ihr braucht nicht nachzuweisen, dass dies wirklich ein Unterraum ist, solltet euch aber trotzdem kurz überlegen, warum das so ist).

(a) Für welche $q \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \dots)$ in V? (Die Existenz von Quadratwurzeln aus nicht-negativen reellen Zahlen wie in Folgerung 5.29 könnt ihr dabei voraussetzen.)

(b) Zeige, dass $\dim V = 2$, und bestimme eine Basis von V.

(c) Berechne eine explizite nicht-rekursive Formel für die Glieder a_n der Fibonacci-Folge.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch zeigen, dass Unterräume endlich erzeugter Vektorräume stets wieder endlich erzeugt sind, also dass wir die schöne Welt der endlich-dimensionalen Vektorräume nicht verlassen, wenn wir Teilmengen gegebener Vektorräume betrachten. Dieses Resultat ist vermutlich nicht wirklich überraschend, aber dennoch auch nicht völlig offensichtlich, da es keine einfache Möglichkeit gibt, aus einem Erzeugendensystem eines Vektorraums ein Erzeugendensystem eines gegebenen Unterraums zu konstruieren.

Lemma 14.26. *Es sei U ein Unterraum eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist auch U endlich-dimensional, und es ist $\dim U \leq \dim V$.*

Gilt sogar $\dim U = \dim V$, so ist $U = V$.

Beweis. Wäre U nicht endlich erzeugt, so könnten wir rekursiv eine (unendliche) Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ in U wählen mit $x_n \notin \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1})$ für alle $n \geq 1$, denn es ist ja stets $\mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1}) \subsetneq U$. Die Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ ist dann linear unabhängig: Gäbe es eine Relation $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, die nicht alle 0 sind, so könnten wir darin n so wählen, dass $\lambda_n \neq 0$ ist, und damit den Widerspruch $x_n = -\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) \in \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_{n-1})$ erhalten. Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ eine unendliche linear unabhängige Familie in U, und damit auch in V. Dies ist aber ein Widerspruch zu Folgerung 14.16, da V als endlich erzeugt vorausgesetzt wurde. Also ist U endlich erzeugt.

Nach Satz 14.11 gibt es damit eine (endliche) Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von U, wobei $n = \dim U$. Da diese Vektoren insbesondere linear unabhängig (in V) sind, können wir sie nach Folgerung 14.16 zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ von V ergänzen, wobei $n + m = \dim V$. Dann gilt aber

$$\dim U = n \leq n + m = \dim V.$$

Ist darüberhinaus $\dim U = \dim V$, also $m = 0$, so wird V bereits von den Vektoren $x_1, \dots, x_n$ erzeugt,
32 d. h. es gilt $V = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n) = U$. □