Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra

13. Vektorräume

Ausgehend von den elementaren Konzepten in den Kapiteln 1 bis 3 wollen wir in dieser Vorlesung zwei grundlegende Gebiete der Mathematik entwickeln: die Analysis und die lineare Algebra. Während sich die eindimensionale Analysis in den Kapiteln 4 bis 12 dabei hauptsächlich mit allgemeinen (in der Regel stetigen oder sogar differenzierbaren) Funktionen in einer reellen Variablen beschäftigt, wollen wir unabhängig davon im folgenden Teil des Skripts zunächst *lineare* Funktionen in *mehreren* Variablen studieren, wie sie in der Praxis z. B. in Form von linearen Gleichungssystemen auftreten. Dabei werden sich die ersten drei Kapitel 13 bis 15 hauptsächlich mit der allgemeinen Theorie beschäftigen, während in den folgenden drei Kapiteln 16 bis 18 auch die Frage konkreter Berechnungsmethoden eine zentrale Rolle spielt. Später werden wir die erarbeiteten Resultate dann mit der Analysis kombinieren, um Funktionen in mehreren Variablen mit Hilfe von Ableitungen linear approximieren zu können.

In der Analysis arbeitet man ja hauptsächlich über den reellen Zahlen, und das ist in der linearen Algebra auch nicht viel anders. Allerdings haben wir in Kapitel 3 ja auch schon gesehen, dass viele Dinge auch über einem beliebigen Körper funktionieren. Die lineare Algebra verhält sich hier sehr „gutartig“: Da wir letztlich nur lineare Funktionen bzw. Gleichungen betrachten werden, benötigen wir gar nicht mehr Struktur der reellen Zahlen als die Körperaxiome. Wir können daher nahezu die gesamte lineare Algebra über einem beliebigen Grundkörper studieren, also z. B. auch über $\mathbb{Q}$, dem Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b), oder anderen Körpern, die ihr vielleicht inzwischen kennt. Im Folgenden sei daher K immer ein fest gewählter Grundkörper (den ihr euch beim ersten Lesen aber durchaus gerne einfach als $\mathbb{R}$ vorstellen könnt).

13.A Der Vektorraumbegriff

Wie ihr ja sicher aus der Schule wisst, werden die Elemente von $\mathbb{R}^n$, die uns im Folgenden hauptsächlich interessieren werden, in der Regel *Vektoren* genannt. Aber was genau ist im Allgemeinen eigentlich ein Vektor? Genau wie bei Gruppen und Körpern in Kapitel 3.A werden Vektoren über die Operationen definiert, die man mit ihnen durchführen kann: In einer Gruppe gibt es *eine* Verknüpfung, die gewisse Eigenschaften erfüllt (siehe Definition 3.1), in einem Körper *zwei* Verknüpfungen „+“ und „ · “ mit den erwarteten Eigenschaften (siehe Definition 3.5). Was sind nun die analogen definierenden Verknüpfungen und Eigenschaften für Vektoren? Wir wissen alle aus der Schule, dass man Vektoren addieren und „strecken“, also mit einer reellen Zahl (bzw. mit einer Zahl des gewählten Grundkörpers K) multiplizieren kann. Genau diese beiden Strukturen definieren einen allgemeinen Vektorraum:

Definition 13.1 (Vektorräume)**.** Es sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** über K (oder K-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$
\begin{aligned}
&+ : V \times V \to V \quad (\textit{Vektoraddition}) \\
\text{und} \quad &\cdot : K \times V \to V \quad (\textit{Skalarmultiplikation})
\end{aligned}
$$

so dass gilt:

(a) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe (siehe Definition 3.1).

(b) (1. Distributivität) Für alle $\lambda,\mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

(c) (2. Distributivität) Für alle $\lambda \in K$ und $x,y \in V$ gilt $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y$.

(d) (Assoziativität) Für alle $\lambda,\mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda\cdot\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

(e) Für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$.

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**.

Bemerkung 13.2.

(a) Beachte, dass man einen Vektorraum nur dann definieren kann, wenn man vorher einen Körper K gewählt hat. Wenn klar ist, welcher Körper gemeint ist, werden wir jedoch auch oft nur von einem Vektorraum (statt einem K-Vektorraum) sprechen.

(b) In Definition 13.1 haben wir mehrfach die gleichen Symbole für unterschiedliche Dinge verwendet: Es gibt z. B. zwei Additionen, die wir beide mit „+“ bezeichnet haben, nämlich die Addition $+\colon K \times K \to K$ zweier Körperelemente und die Addition $+\colon V \times V \to V$ der Vektoren. Da man aus der Art der verknüpften Elemente eindeutig ablesen kann, um welche Verknüpfung es sich handeln muss, können dadurch aber keine Mehrdeutigkeiten entstehen: So werden z. B. beim ersten Pluszeichen in Definition 13.1 (b) zwei Skalare, beim zweiten jedoch zwei Vektoren addiert. Nur wenn wir auch in der Notation explizit deutlich machen wollen, um welche der beiden Verknüpfungen es sich handelt, schreiben wir diese als $+_K$ bzw. $+_V$. Analog gibt es auch die Multiplikation zweimal, einmal als Multiplikation $\cdot_K$ in K und einmal als Skalarmultiplikation $\cdot_V$, und auch zweimal die Null, nämlich einmal als Null 0_K im Körper K und einmal als *Nullvektor* 0_V, d. h. als das neutrale Element von $(V,+)$. In dieser ausführlichen Notation könnte man z. B. die Bedingung aus Definition 13.1 (b) als

$$(\lambda +_K \mu) \cdot_V x = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V x$$

schreiben. In der Regel werden wir diese Indizes K und V jedoch weglassen, genauso wie die Malzeichen sowohl für $\cdot_K$ als auch für $\cdot_V$.

Beispiel 13.3.

(a) Für jeden Körper K ist $V = \{0\}$ (mit den trivialen Verknüpfungen) ein K-Vektorraum, der sogenannte **Nullvektorraum**.

(b) Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Menge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-mal}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

aller „geordneten n-Tupel in K“, d. h. ein Element von K^n wird dadurch angegeben, dass man n Elemente $x_1, \dots, x_n$ von K angibt (die nicht notwendig verschieden sein müssen und auf deren Reihenfolge es ankommt). Dass wir die Elemente $x_1, \dots, x_n$ dabei untereinander und nicht nebeneinander schreiben, ist momentan eine reine Konvention, die sich später bei der Einführung von Matrizen in Abschnitt 16.A als nützlich erweisen wird. Definiert man nun auf K^n die komponentenweisen Verknüpfungen

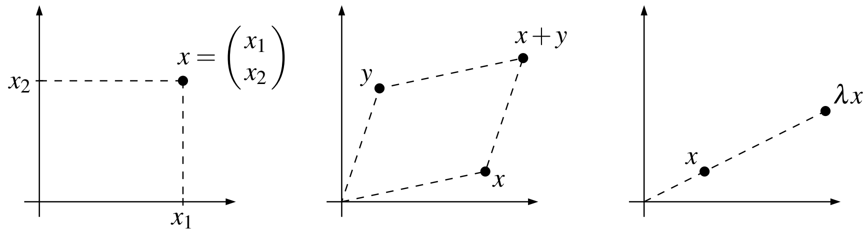
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in K$, so ist K^n mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum. In der Tat folgen die Vektorraumeigenschaften alle aus den Körpereigenschaften von K; wir zeigen hier exemplarisch Teil (b) der Definition 13.1: Für alle $\lambda, \mu, x_1, \dots, x_n \in K$ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu) x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen genau die Distributivität in K ist und die beiden anderen aus der Definition der Vektoraddition und Skalarmultiplikation in K^n folgen.

Im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ ist $K^n = \mathbb{R}^2$ einfach die bekannte reelle Ebene, und die beiden Verknüpfungen entsprechen natürlich wie im folgenden Bild der aus der Schule bekannten Vektoraddition und Skalarmultiplikation.



Wenn wir im Folgenden vom Vektorraum K^n sprechen, werden wir diesen Raum immer als Vektorraum über dem Körper K betrachten (sofern wir nichts anderes angeben). Diese Vektorräume K^n für $n \in \mathbb{N}$ sind sicher die wichtigsten Beispiele für K-Vektorräume. Im Fall $n = 1$ erhält man $K^1 = K$, also K selbst als K-Vektorraum; der Fall $n = 0$ wird konventionsgemäß als der Nullvektorraum $K^0 = \{0\}$ aufgefasst.

(c) Sind V und W zwei K-Vektorräume, so ist (in Verallgemeinerung von (b)) auch ihr Produkt $V \times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum.

(d) Es seien K ein Körper und M eine Menge. Dann ist die Menge $\text{Abb}(M,K) := \{f : M \to K\}$ aller Abbildungen von M nach K ein K-Vektorraum, indem wir Addition und Multiplikation punktweise definieren als

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für alle $\lambda \in K$, $x \in M$ und $f, g \colon M \to K$. In der Tat haben wir in Aufgabe 3.12 (a) bereits gesehen, dass $\text{Abb}(M,K)$ eine abelsche Gruppe ist (der Nullvektor ist hierbei die Funktion, die jedes Element von M auf 0 abbildet, und das zu einer Funktion $f \colon M \to K$ additive Inverse die Funktion $-f \colon M \to K$, $x \mapsto -f(x)$). Die anderen Vektorraumeigenschaften zeigt man wieder analog.

Ein Spezialfall hiervon ist der Raum $\text{Abb}(\mathbb{N},K)$, dessen Elemente $f \in \text{Abb}(\mathbb{N},K)$ wir in Verallgemeinerung von (b) als „unendliche Folgen“ $(f(0), f(1), f(2), \dots)$ mit Elementen in K schreiben können. Im Fall $K = \mathbb{R}$ sind dies gerade die in der Analysis betrachteten reellen Zahlenfolgen.

Darüber hinaus lässt sich auf die gleiche Art auch die Menge $\text{Abb}(M,W)$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge M in einen K-Vektorraum W zu einem Vektorraum machen.

(e) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. In der Tat kann man reelle Zahlen addieren und mit einer rationalen multiplizieren, und es ist klar, dass mit diesen Definitionen alle Vektorraumeigenschaften erfüllt sind.

Wir wollen nun zunächst ein paar elementare Eigenschaften von Vektorräumen zeigen. Sie haben einen ähnlichen Charakter wie die Axiome in Definition 13.1, folgen aber bereits aus diesen (so dass man sie nicht separat als Axiome fordern muss).

Lemma 13.4 (Eigenschaften von Vektorräumen)**.** *In jedem K-Vektorraum V gilt für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$:*

(a) $0_K \cdot x = \lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(b) *Ist $\lambda \cdot x = 0_V$, so ist $\lambda = 0_K$ oder $x = 0_V$.*

(c) $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis.

(a) Der Beweis ist ganz analog zu dem von Lemma 3.8 (a): Wegen der Distributivität aus Definition 13.1 (b) gilt $0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$, nach Subtraktion von

$0_K \cdot x$ also wie behauptet $0_V = 0_K \cdot x$. Genauso erhalten wir mit der 2. Distributivität $\lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V$, nach Subtraktion von $\lambda \cdot 0_V$ also $0_V = \lambda \cdot 0_V$.

(b) Ist $\lambda x = 0_V$ und $\lambda \neq 0_K$, so folgt

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) x \\ &= \lambda^{-1}(\lambda x) && \text{(Definition 13.1 (d))} \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)).} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x + x &= (-1) \cdot x + 1 \cdot x && \text{(Definition 13.1 (e))} \\ &= (-1+1) \cdot x && \text{(Definition 13.1 (b))} \\ &= 0_K \cdot x = 0_V && \text{(Teil (a)),} \end{aligned}$$

also ist $(-1) \cdot x$ das additive Inverse zu x. □

Sehr viele weitere Beispiele von Vektorräumen können wir erhalten, indem wir in bereits bekannten Vektorräumen nach Teilmengen suchen, die mit der gegebenen Vektoraddition und Skalarmultiplikation selbst wieder die Axiome aus Definition 13.1 erfüllen. Solche Teilmengen werden als Untervektorräume bezeichnet.

Definition 13.5 (Untervektorräume)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt **Untervektorraum** oder **Unterraum** von V, in Zeichen $U \leq V$, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(a) $U \neq \emptyset$;

(b) für alle $x, y \in U$ ist $x + y \in U$;

(c) für alle $\lambda \in K$ und $x \in U$ ist $\lambda x \in U$.

Man sagt für (b) und (c) auch, dass U bezüglich Vektoraddition bzw. Skalarmultiplikation *abgeschlossen* ist.

Bemerkung 13.6.

(a) Durch fortgesetztes Anwenden der Eigenschaften (b) und (c) von Definition 13.5 sieht man sofort, dass in einem Unterraum U von V auch für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$\text{Für alle } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ und } x_1, \dots, x_n \in U \text{ ist } \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in U.$$

Beachte, dass $x_1, \dots, x_n$ hierbei im Gegensatz zu Beispiel 13.3 (b) verschiedene Vektoren, und nicht die Komponenten *eines* Vektors in K^n sind. In der Tat ist diese Indexnotation in der Praxis für beide Bedeutungen üblich. Aus dem Zusammenhang ist aber immer offensichtlich, was gemeint ist, da $x_1, \dots, x_n$ in Beispiel 13.3 (b) Elemente des Grundkörpers sind, hier jedoch Elemente des betrachteten Vektorraums.

(b) Jeder Unterraum U von V muss den Nullvektor enthalten: Nach Definition 13.5 (a) ist U nicht leer, enthält also ein Element $x \in U$. Damit liegt nach Definition 13.5 (c) auch $0 \cdot x = 0$ in U.

Die Abgeschlossenheit eines Untervektorraums bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation bedeutet gerade, dass sich diese beiden Verknüpfungen zu Verknüpfungen

$$+ : U \times U \to U \qquad \text{und} \qquad \cdot : K \times U \to U$$

auf U einschränken lassen. Wie oben bereits angekündigt wollen wir nun sehen, dass dies die Menge U selbst wieder zu einem Vektorraum macht.

Lemma 13.7. *Jeder Untervektorraum eines K-Vektorraums ist (mit den eingeschränkten Verknüpfungen) selbst wieder ein K-Vektorraum.*

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 13.1 für U nachweisen. Dazu beginnen wir mit (a) und zeigen zunächst, dass $(U,+)$ eine Gruppe ist.

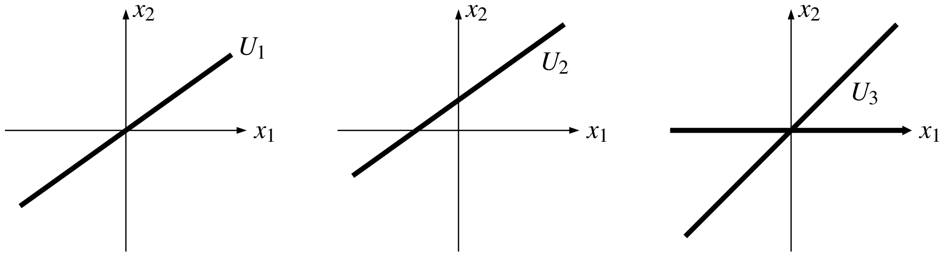
- (Assoziativität der Vektoraddition) Weil V ein Vektorraum ist, gilt $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in V$ und damit erst recht für alle $x,y,z \in U$. Die Assoziativität der Addition überträgt sich also direkt von V auf U.
- (Additives neutrales Element) Nach Bemerkung 13.6 (b) liegt der Nullvektor in U. Dieser erfüllt $x+0 = 0+x = x$ für alle $x \in V$ und damit auch für alle $x \in U$, und ist damit ein neutrales Element für die Addition in U.
- (Additive inverse Elemente) Für jedes $x \in U$ gilt nach Definition 13.5 (c) auch $(-1)\cdot x \in U$, und dies ist ja nach Lemma 13.4 (c) genau das additive inverse Element zu x.

Die übrigen Vektorraumeigenschaften sind alle von der Form, dass für alle Vektoren aus U eine bestimmte Gleichung gelten muss – und dies folgt nun genauso wie die Assoziativität oben sofort daraus, dass die betreffenden Gleichungen sogar für alle Vektoren aus V gelten. □

Beispiel 13.8.

(a) Für jeden Vektorraum V sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset V$ und der gesamte Raum $V \subset V$ natürlich stets Unterräume von V. Sie werden die **trivialen Unterräume** genannt.

(b) Es seien $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Für ein gegebenes $m \in \mathbb{R}$ betrachten wir die folgenden Teilmengen U_1, U_2, U_3 von V:



$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = m x_1 \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = m x_1 + 1 \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = x_1 \text{ oder } x_2 = 0 \right\}$$

Die Ursprungsgerade U_1 ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$: Natürlich ist $U_1 \neq \emptyset$, und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

- Sind $x,y \in U_1$, also $x_2 = m x_1$ und $y_2 = m y_1$, so ist $x_2 + y_2 = m x_1 + m y_1 = m(x_1+y_1)$ und damit auch $x+y \in U_1$.
- Ist $x \in U_1$, also $x_2 = m x_1$, so ist auch $\lambda x_2 = m \lambda x_1$, also $\lambda x \in U_1$.

U_2 ist nach Bemerkung 13.6 (b) kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$, da $0 \notin U_2$. U_3 ist ebenfalls kein Unterraum, denn es liegen zwar $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in U_3, nicht aber deren Summe $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beachte, dass man hier nicht nur an den Formeln, sondern auch an den Bildern oben schon sehen kann, ob die gegebenen Teilmengen abgeschlossen bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation, also ob sie Untervektorräume sind.

(c) Für eine gegebene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $U \subset \mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen $f : D \to \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$ aus Beispiel 13.3 (d), denn mit f und g sind auch $f+g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Genauso ist für festes $k \in \mathbb{N}$ auch die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens k ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(D,\mathbb{R})$.

Bemerkung 13.9 (Durchschnitt und Vereinigung von Unterräumen)**.** Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V.

(a) Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls wieder ein Unterraum von V:

- $U_1 \cap U_2$ ist nicht leer, denn nach Bemerkung 13.6 (b) liegt der Nullvektor in U_1 und U_2, und damit auch in $U_1 \cap U_2$.
- Sind $x, y \in U_1 \cap U_2$, so gilt insbesondere $x, y \in U_1$ und damit auch $x + y \in U_1$, da U_1 ein Unterraum ist. Genauso ergibt sich $x + y \in U_2$, insgesamt also $x + y \in U_1 \cap U_2$.
- Ist $x \in U_1 \cap U_2$ und $\lambda \in K$, so gilt insbesondere $x \in U_1$ und damit dann auch $\lambda x \in U_1$, da U_1 ein Unterraum ist. Genauso ergibt sich auch $\lambda x \in U_2$ und damit dann $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

Analog sieht man natürlich, dass auch der Durchschnitt $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ von mehr als zwei Unterräumen wieder ein Unterraum ist.

(b) Die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum von V: Wir haben z. B. in Beispiel 13.8 (a) (mit $m = 1$ bzw. $m = 0$) gesehen, dass die beiden Geraden

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = x_1 \right\} \qquad \text{und} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = 0 \right\}$$

Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind, ihre Vereinigung jedoch nicht.

Es gibt jedoch trotzdem eine Möglichkeit, aus zwei Unterräumen einen neuen zu erzeugen, der beide von ihnen enthält. Die korrekte Konstruktion hierfür ist nur nicht die Vereinigung, sondern ihre sogenannte Summe.

Lemma und Definition 13.10 (Summe von Unterräumen)**.** *Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V. Dann ist ihre* ***Summe***

$$U_1 + U_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$$

ebenfalls ein Unterraum von V.

Beweis. Beachte zunächst, dass $U_1 + U_2$ nicht leer ist, weil beide Unterräume nach Bemerkung 13.6 (b) den Nullvektor enthalten und damit auch $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$ gilt. Wir überprüfen nun die Kriterien aus Definition 13.5 für $U_1 + U_2$:

(a) Sind $x, y \in U_1 + U_2$, also $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in U_1$ und $x_2, y_2 \in U_2$, so folgt auch

$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \quad \in U_1 + U_2,$$

da wegen der Abgeschlossenheit von U_1 und U_2 auch $x_1 + y_1 \in U_1$ und $x_2 + y_2 \in U_2$ gilt.

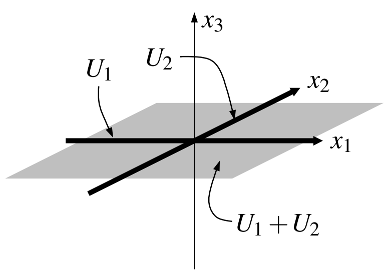
(b) Sind analog $\lambda \in K$ und $x \in U_1 + U_2$, also wieder $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$, so ist auch

$$\lambda x = \lambda (x_1 + x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in U_2} \quad \in U_1 + U_2. \qquad \square$$

Bemerkung 13.11. Analog zu Definition 13.10 kann man natürlich auch die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von mehr als zwei Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines Vektorraums V definieren.

Beispiel 13.12. Für die Unterräume

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$



von $\mathbb{R}^3$ ist ihre Summe wie im Bild rechts dargestellt die (x_1, x_2)-Ebene

$$U_1 + U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 13.13. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$;

(b) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + a x_3 = 1 - a\}$ für ein festes, gegebenes $a \in \mathbb{R}$;

(c) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^3 = x_2^3 = x_3^3\}$;

(d) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$.

Hierbei sei jeweils $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, d. h. x_1, x_2, x_3 seien die Koordinaten des Vektors x.

Aufgabe 13.14. Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Aufgabe 13.15. Es seien

$$\begin{aligned} & U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad & V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ die Mengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(a) U und V sind Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(b) $U \cap V = \{0\}$;

(c) $U + V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 29

13.B Lineare Abbildungen

Im letzten Abschnitt haben wir Vektorräume eingeführt – also die grundlegende Struktur, mit der sich die lineare Algebra befasst. Um nun verschiedene Vektorräume miteinander in Verbindung setzen zu können, müssen wir als Nächstes Abbildungen zwischen Vektorräumen untersuchen, die mit den gegebenen Verknüpfungen (also der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation) verträglich sind. Dies wollen wir in diesem Abschnitt tun.

In der Tat ist dies eine sehr allgemeine Vorgehensweise der Mathematik: Immer wenn man eine neue mathematische Struktur (wie z. B. Gruppen, Körper, oder jetzt hier die Vektorräume) einführt, wird man als Erstes zwei Dinge untersuchen:

- die sogenannten *Unterstrukturen*, d. h. Teilmengen, die selbst wieder die betrachtete Struktur haben (in unserem momentanen Fall also die Untervektorräume), und
- die sogenannten *Morphismen*, d. h. Abbildungen, die diese Struktur erhalten.

Wir haben dies in Abschnitt 3.A nur deswegen für Gruppen und Körper nicht getan, weil wir in dieser Vorlesung nur Vektorräume, aber nicht Gruppen und Körper ausführlich studieren wollen. Diejenigen von euch, die auch die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen" hören, werden dort aber z. B. auch Untergruppen und Morphismen von Gruppen untersuchen (oder haben dies bereits getan) – und dann feststellen, dass sich Untervektorräume und Morphismen von Vektorräumen, die wir nun studieren werden, eigentlich „fast genauso" verhalten.

Definition 13.16 (Lineare Abbildungen bzw. Morphismen)**.** Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Grundkörper K. Man nennt eine Abbildung $f\colon V \to W$ eine **lineare Abbildung** (oder **Morphismus** oder **(Vektorraum-)Homomorphismus**), wenn gilt:

(a) Für alle $x,y \in V$ ist $f(x+y) = f(x) + f(y)$ („f ist verträglich mit der Vektoraddition").

(b) Für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$ ist $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ („f ist verträglich mit der Skalarmultiplikation").

Die Menge aller solchen Morphismen mit Startraum V und Zielraum W wird mit $\operatorname{Hom}_K(V,W)$ bezeichnet (oder auch nur mit $\operatorname{Hom}(V,W)$, wenn der Grundkörper aus dem Zusammenhang klar ist).

Ist $V = K^n$, so schreiben wir statt $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ der Einfachheit halber oft nur $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Beispiel 13.17.

(a) Für beliebige K-Vektorräume ist die Nullabbildung $f\colon V \to W$, $x \mapsto 0$ natürlich immer ein Morphismus, da sie die beiden Eigenschaften (a) und (b) aus Definition 13.16 erfüllt.

(b) Die Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

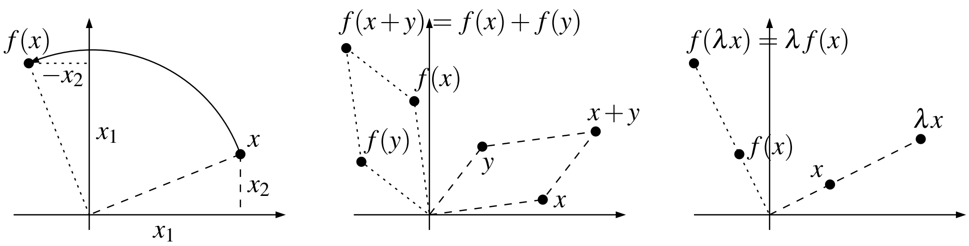
ist ein Morphismus, denn für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2-y_2 \\ x_1+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = f(x)+f(y)$$

und

$$f(\lambda x) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_2 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \lambda f(x).$$

Geometrisch beschreibt diese Abbildung wie im Bild unten links eine Vierteldrehung um den Ursprung. An den anderen beiden Bildern kann man die Morphismuseigenschaft auch gut anschaulich ablesen: Im mittleren Bild z. B. ist das gepunktete Parallelogramm aus der Drehung des gestrichelten entstanden, und der äußerste Punkt ergibt sich damit sowohl durch Addition der Punkte $f(x)$ und $f(y)$ als auch durch Drehung des Punktes $x+y$, d. h. es ist $f(x)+f(y) = f(x+y)$. Entsprechendes gilt für die Skalarmultiplikation im rechten Bild.



Anschaulich ist damit auch schon erkennbar, dass Drehungen um andere Winkel (um den Ursprung) ebenfalls Morphismen sind. Wir werden solche allgemeinen Drehungen später in Beispiel 19.13 und Abschnitt 22.A untersuchen.

(c) Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2$$

ist kein Morphismus, denn es ist z. B.

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(Beachte, dass es genügt, ein Gegenbeispiel anzugeben, um zu zeigen, dass die Verträglichkeiten aus Definition 13.16 nicht allgemein gelten.)

Wir werden in Abschnitt 16.A noch sehen, wie man *alle* Morphismen $f\colon K^n \to K^m$ beschreiben kann.

(d) Es sei $V \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen aus Beispiel 13.8 (c). Wir betrachten die Abbildung $f\colon V \to V$, $\varphi \mapsto \varphi'$, die jedem Polynom $\varphi\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ seine *Ableitung*

$$\varphi'\colon x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\, a_k x^{k-1} \qquad (*)$$

zuordnet.

Wenn ihr die Ableitung bereits aus der Analysis kennt, wisst ihr aus den Regeln in Beispiel 10.9 (c) schon, dass die Ableitung eines Polynoms durch $(*)$ gegeben ist, und dass f eine lineare Abbildung ist, da nach Satz 10.8 (a) und Beispiel 10.9 (b) für alle differenzierbaren Funktionen φ und ψ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi'$ als auch $(\lambda\varphi)' = \lambda\,\varphi'$ gilt.

Wenn ihr die Ableitung aus der Analysis noch nicht kennt, könnt ihr $(*)$ für die Zwecke der linearen Algebra einfach als *Definition* der Ableitung eines Polynoms ansehen. Man rechnet dann schnell nach, dass f wirklich eine lineare Abbildung ist: Für zwei Polynome $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $\psi(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ (wobei n der größere der beiden Grade ist, so dass sowohl φ als auch ψ so geschrieben werden können) sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(\varphi+\psi)'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,(a_k+b_k)x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\,a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k\,b_k x^{k-1} = \varphi'(x)+\psi'(x)$$

$$\text{und}\quad (\lambda\varphi)'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,(\lambda a_k)x^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} k\,a_k x^{k-1} = \lambda\,\varphi'(x).$$

(e) Für den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 13.3 (d) sind die „Verschiebeabbildungen“

$$f\colon V \to V,\ (a_0,a_1,a_2,\dots) \mapsto (0,a_0,a_1,a_2,\dots)$$
$$\text{und}\quad g\colon V \to V,\ (a_0,a_1,a_2,\dots) \mapsto (a_1,a_2,a_3,\dots)$$

Morphismen.

Bemerkung 13.18. Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus von K-Vektorräumen.

(a) Durch fortgesetztes Anwenden der Eigenschaften aus Definition 13.16 erhält man sofort, dass auch für alle $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ und $x_1,\dots,x_n \in V$

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

gilt.

(b) Setzt man $\lambda = 0$ in der Eigenschaft 13.16 (b) ein, so erhält man mit Lemma 13.4 (a) sofort $f(0) = 0$.

Bemerkung 13.19 ($\mathrm{Hom}(V,W)$ als Vektorraum)**.** Die Menge $\mathrm{Hom}(V,W)$ der *linearen* Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen V und W ist ein Unterraum des Vektorraums $\mathrm{Abb}(V,W)$ *aller* Abbildungen von V nach W aus Beispiel 13.3 (d):

- Nach Beispiel 13.17 (a) liegt die Nullabbildung in $\mathrm{Hom}(V,W)$.
- Sind $f,g\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so gilt für ihre Summe $f+g$ für alle $x+y \in V$ und $\mu \in K$

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &= f(x+y)+g(x+y) && \text{(Definition von } f+g)\\ &= f(x)+f(y)+g(x)+g(y) && (f \text{ und } g \text{ sind linear})\\ &= (f+g)(x)+(f+g)(y) && \text{(Definition von } f+g)\end{aligned}$$

  sowie analog

$$(f+g)(\mu x) = f(\mu x)+g(\mu x) = \mu\,f(x)+\mu\,g(x) = \mu\,(f+g)(x).$$

  Also ist dann auch $f+g$ linear.
- Genauso zeigt man die Morphismuseigenschaften auch für die Abbildung λf mit $\lambda \in K$.

Gemäß Definition 13.5 ist $\mathrm{Hom}(V,W)$ damit ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$, also insbesondere nach Lemma 13.7 selbst wieder ein K-Vektorraum.

Aufgabe 13.20. Untersuche, ob die folgenden Abbildungen f zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto ax_1 + bx_2 + c$ für fest gegebene $a,b,c \in \mathbb{R}$.

(b) V sei der Vektorraum der Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$, und

$$f\colon V \to V,\ \varphi \mapsto f(\varphi) \quad \text{mit} \quad f(\varphi)(x) = x^2\,\varphi(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir nun einige elementare Eigenschaften von Morphismen zeigen.

Lemma 13.21 (Bilder und Urbilder von Unterräumen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist U ein Unterraum von V, so ist $f(U)$ ein Unterraum von W,*

(b) *Ist U ein Unterraum von W, so ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V,*

wobei $f(U)$ und $f^{-1}(U)$ das Bild bzw. Urbild von U unter f aus Definition 2.11 sind.

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 13.5 überprüfen.

(a) Wegen $0 \in U$ ist nach Bemerkung 13.18 (b) zunächst $0 = f(0) \in f(U)$, also ist $f(U) \neq \emptyset$. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $f(U)$ bezüglich der Vektoraddition. Es seien dazu $x,y \in f(U)$, d. h. $x = f(u)$ und $y = f(v)$ für gewisse $u,v \in U$. Dann ist auch $u+v \in U$, und damit folgt $x+y = f(u)+f(v) = f(u+v) \in f(U)$. Genauso zeigt man die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.

(b) Wegen $f(0) = 0 \in U$ ist zunächst einmal $0 \in f^{-1}(U)$, d. h. es ist $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Wir zeigen jetzt die Abgeschlossenheit von $f^{-1}(U)$ unter der Vektoraddition. Dazu seien $x,y \in f^{-1}(U)$, d. h. $x,y \in V$ mit $f(x), f(y) \in U$. Dann ist auch $f(x+y) = f(x)+f(y) \in U$, also $x+y \in f^{-1}(U)$. Analog ergibt sich die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation. □

Die wichtigsten Spezialfälle dieses Lemmas sind die folgenden:

Definition 13.22 (Bild und Kern eines Morphismus)**.** Es sei $f\colon V \to W$ ein lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

(a) Die Menge $\mathrm{Im}\, f := f(V) = \{f(x) : x \in V\}$ heißt das **Bild** von f.

(b) Die Menge $\mathrm{Ker}\, f := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : f(x) = 0\}$ heißt der **Kern** von f.

Die Bezeichnungen kommen von den englischen Begriffen „image“ und „kernel“. Nach Lemma 13.21 gilt offensichtlich $\mathrm{Im}\, f \leq W$ und $\mathrm{Ker}\, f \leq V$.

Beispiel 13.23. Für die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2$$

ist

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ x_1 + x_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathrm{Ker}\, f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Offensichtlich ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ nach Definition genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Im}\, f = W$. Ein analoges Kriterium gibt es auch für die Injektivität:

Lemma 13.24. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn* $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Ist f injektiv, so hat der Nullvektor höchstens ein Urbild unter f. Wegen $f(0) = 0$ ist das Urbild des Nullvektors also genau der Nullvektor, d. h. es ist $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

„$\Leftarrow$“ Es sei $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Weiterhin seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Linearität von f gilt dann $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, mit $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ also $x - y = 0$. Damit folgt $x = y$, d. h. f ist injektiv. □

Lemma 13.25 (Umkehrabbildungen und Verkettungen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus von K-Vektorräumen. Dann gilt:*

(a) *Ist f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} ein Morphismus.*

(b) *Ist $g\colon W \to Z$ ein weiterer Morphismus von K-Vektorräumen, so ist auch $g \circ f\colon V \to Z$ ein Morphismus.*

Beweis.

(a) Es seien $x, y \in W$; wir setzen $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, also $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(u)+f(v)) \\ &= f^{-1}(f(u+v)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= u+v && (f^{-1} \text{ ist Umkehrabbildung von } f) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.

(b) Für $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} g(f(x+y)) &= g(f(x)+f(y)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) && (g \text{ ist ein Morphismus}). \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation. □

Aufgabe 13.26. Man zeige: Sind $f, g\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so gilt

(a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$;

(b) $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Weiterhin gebe man in beiden Fällen ein Beispiel an, das zeigt, dass man im Allgemeinen nicht „$\subset$“ durch „$=$“ ersetzen kann.

Aufgabe 13.27. Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Ferner sei U ein Unterraum von V mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.

Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ bijektiv ist.

Aufgabe 13.28. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $V \le \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto (\varphi(1), \dots, \varphi(n)).$$

linear ist, und bestimme Kern und Bild von f.

Aufgabe 13.29. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *Projektion*, wenn $f \circ f = f$.

(a) Gib für den Fall $V = \mathbb{R}^2$ ein Beispiel für eine Projektion an, bei der sowohl $\operatorname{Ker} f$ als auch $\operatorname{Im} f$ nicht-triviale Unterräume von V sind.

(b) Man zeige: Ist $f\colon V \to V$ eine Projektion, so gilt $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ und $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$.

(c) Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei Projektionen. Beweise, dass $f + g$ genau dann ebenfalls eine Projektion ist, wenn $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ und $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

Gilt diese Aussage auch für Vektorräume über einem beliebigen Körper?

Bijektive Morphismen wie in Lemma 13.25 (a) haben in der Praxis eine besondere Bedeutung, und daher auch einen besonderen Namen.

Definition 13.30 (Isomorphismen)**.** Es seien V und W zwei K-Vektorräume.

(a) Einen bijektiven Morphismus $f: V \to W$ (der nach Lemma 13.25 (a) also einen Umkehrmorphismus $f^{-1}: W \to V$ besitzt) bezeichnet man als **(Vektorraum-)Isomorphismus**.

(b) V und W heißen **isomorph** (in Zeichen: $V \cong W$), wenn es einen Isomorphismus $f: V \to W$ zwischen ihnen gibt.

Beispiel 13.31. Anschaulich bedeutet ein Isomorphismus f zwischen zwei Vektorräumen V und W, dass diese beiden Räume „als Vektorräume ununterscheidbar" sind: Die Objekte in V und W sind zwar unterschiedlich benannt, aber in allen Rechnungen können wir jederzeit mit der bijektiven Abbildung f bzw. der inversen Abbildung f^{-1} zwischen den beiden Darstellungen in V und W hin- und herwechseln, ohne das Endergebnis zu ändern. Die folgenden beiden Beispiele verdeutlichen dies.

(a) Der Unterraum
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ist mit} \quad f: V \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
isomorph zu $\mathbb{R}^2$. In der Tat ist in diesem Beispiel offensichtlich, dass f linear und bijektiv ist. Auch anschaulich ist in diesem Fall klar, dass V und $\mathbb{R}^2$ „im Prinzip ununterscheidbar" sind, denn beide Räume sind einfach die reelle Ebene – die im Fall von V lediglich als Koordinatenebene in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

(b) Der Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 ist mit der linearen Abbildung
$$f: V \to \mathbb{R}^3,\ a_0 + a_1x + a_2x^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
isomorph zu $\mathbb{R}^3$. Auch hier ist wieder klar, dass f linear ist, und dass der Vektor der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 dieselben Informationen enthält wie das Polynom $a_0 + a_1x + a_2x^2$ (siehe Bemerkung 3.22).