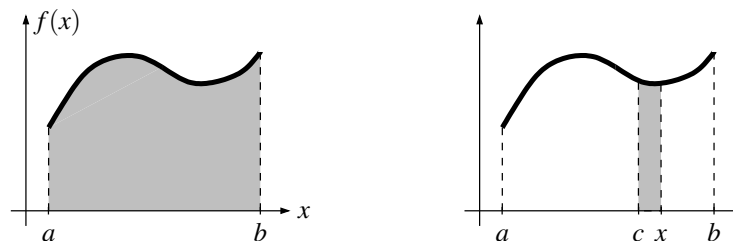


12. Integralrechnung

Als Abschluss der Analysis in einer Veränderlichen wollen wir nach der Differentiation nun noch die Integration betrachten. Da die Integralrechnung über \mathbb{R} sehr verschieden von der über \mathbb{C} ist, werden wir uns dabei nur mit reellen Integralen beschäftigen. In der Tat sind komplexe Integrale (oder allgemein die komplexe Analysis) der wesentliche Inhalt der Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“, die ihr im zweiten Studienjahr hören könnt.

Die Integralrechnung kann man auf zweierlei Arten motivieren. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, so können wir die folgenden beiden Fragestellungen betrachten:

- (Flächenberechnung) Wie groß ist die Fläche, die unter dem Graphen von f liegt (im Bild unten links grau eingezeichnet) – oder allgemeiner, wie kann man den Flächeninhalt gekrümmter Flächen berechnen?



- (Umkehrung der Differentiation) Gibt es eine differenzierbare Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitung F' gleich f ist – und wenn ja, wie können wir ein solches F bestimmen? Diese Frage hat oft auch eine anschauliche Bedeutung: Beschreibt eine Funktion z. B. die Position eines Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit, so ist die Ableitung dieser Funktion, also die lokale Positionsänderung pro Zeiteinheit, natürlich einfach die Geschwindigkeit des Gegenstandes. Wenn wir von der Ableitung auf die ursprüngliche Funktion zurück schließen wollen, möchten wir anschaulich also aus der Kenntnis der Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt die von dem Gegenstand zurückgelegte Wegstrecke berechnen können.

Es ist leicht einzusehen, dass diese beiden Probleme sehr eng miteinander zusammenhängen: Bezeichnen wir für $c \in [a, b]$ mit $F(c)$ die Fläche, die über dem Intervall $[a, c]$ unter dem Graphen von f liegt, so ist $F(x) - F(c)$ für $x \in [a, b]$ natürlich gerade die Fläche unter f zwischen c und x (im Bild oben rechts grau eingezeichnet). Für x nahe bei c ist dies näherungsweise eine Rechteckfläche der Breite $x - c$ und Höhe $f(c)$, d. h. es ist

$$F(x) - F(c) \approx (x - c) \cdot f(c), \quad \text{und damit} \quad \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \approx f(c).$$

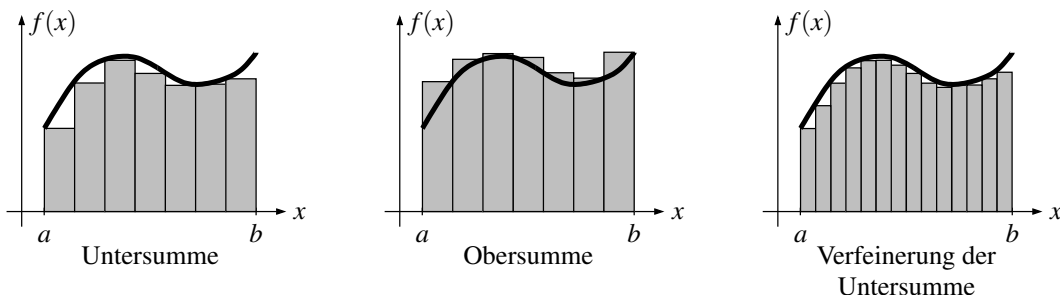
Im Grenzfall $x \rightarrow c$ sollte also $F' = f$ gelten, d. h. das Problem der Flächenberechnung unter dem Graphen einer Funktion sollte automatisch auch zur Umkehrung der Differentiation führen.

Wir werden uns im Folgenden zunächst in Abschnitt 12.A mit dem ersten Problem der Flächenberechnung beschäftigen, und daraufhin dann in Abschnitt 12.B den Zusammenhang zur Umkehrung der Differentiation herstellen.

12.A Das Riemann-Integral

Um den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ untersuchen zu können, müssen wir natürlich zunächst erst einmal mit einer exakten Definition dieses Konzepts beginnen. Die Idee hierfür ist einfach: Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in viele kleine Teilintervalle, und approximieren die Fläche unter dem Graphen von f durch Rechteckflächen über diesen Teilintervallen,

indem wir wie im Bild unten als Höhe der Rechtecke einmal das Minimum und einmal das Maximum von f auf den betrachteten Teilintervallen wählen. Auf diese Art erhalten wir leicht zu berechnende Flächen, die im Fall des Minimums etwas kleiner und im Fall des Maximums etwas größer als die gesuchte Fläche sind. Wenn wir die Zerlegung in die Teilintervalle immer feiner machen (wie z. B. im Bild unten rechts), sollten diese Flächen dann von unten bzw. oben gegen den gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von f konvergieren.



Wir wollen diese Idee nun mathematisch exakt definieren. Um die Theorie möglichst allgemein zu halten, wollen wir uns dabei nicht auf stetige Funktionen beschränken. Dies heißt natürlich, dass f auf den betrachteten Teilintervallen nicht mehr notwendig ein Minimum und Maximum hat (siehe Satz 8.25), sondern dass wir im Allgemeinen nur ein Infimum und Supremum erhalten – und das auch nur dann, wenn wir voraussetzen, dass f beschränkt ist.

Definition 12.1 (Zerlegungen, Unter- und Obersummen). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

- (a) Eine endliche Teilmenge $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von Punkten in $[a, b]$ mit $a, b \in Z$ bezeichnen wir als eine **Zerlegung** des Intervalls $[a, b]$. Wir vereinbaren, dass wir in dieser Schreibweise die x_0, \dots, x_n immer so anordnen wollen, dass $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gilt. Sind Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a, b]$ mit $Z \subset Z'$, so nennen wir Z' eine **Verfeinerung** von Z .
- (b) Ist $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so heißt

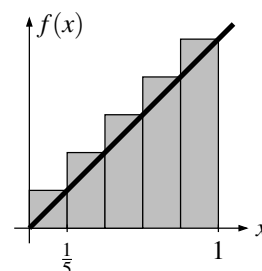
$$\text{US}(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) \quad \text{die \underline{U}ntersumme, und analog}$$

$$\text{OS}(f, Z) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup f([x_{i-1}, x_i]) \quad \text{die \underline{O}bersumme}$$

von f bezüglich Z .

Beispiel 12.2. Wir betrachten die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, und für gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$. Natürlich ist das Supremum von f auf einem Teilintervall $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ genau der Funktionswert $\frac{i}{n}$ an der rechten Intervallgrenze, und damit ist die Obersumme von f bezüglich Z_n (also die für den Fall $n = 5$ im Bild rechts eingezeichnete graue Fläche) gleich

$$\text{OS}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \stackrel{3.13}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$



Analog müssen wir für die Untersumme jeweils den Funktionswert $\frac{i-1}{n}$ an der linken Intervallgrenze nehmen, und erhalten

$$\text{US}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Lemma 12.3 (Eigenschaften von Unter- und Obersummen). Es seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a, b]$. Dann gilt:

- (a) Ist Z' eine Verfeinerung von Z , so ist $US(f, Z') \geq US(f, Z)$ und $OS(f, Z') \leq OS(f, Z)$.
 (b) $US(f, Z) \leq OS(f, Z')$.

25

Beweis.

- (a) Da jede Verfeinerung von Z durch endliches Hinzufügen von weiteren Unterteilungspunkten entsteht, genügt es, den Fall zu betrachten, dass Z' durch Hinzufügen eines weiteren Punktes aus Z entsteht, also dass $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ und $Z' = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x', x_k, \dots, x_n\}$ ist. Nach Definition ist dann

$$US(f, Z') = \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) \\ + (x' - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x']) + (x_k - x') \cdot \inf f([x', x_k]).$$

In dieser Summe sind nun die beiden Infima in der zweiten Zeile größer oder gleich dem Infimum der größeren Menge $f([x_{k-1}, x_k])$. Also erhalten wir wie gewünscht

$$US(f, Z') \geq \sum_{i \neq k} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf f([x_{i-1}, x_i]) + (x_k - x_{k-1}) \cdot \inf f([x_{k-1}, x_k]) = US(f, Z).$$

Die Aussage über die Obersumme beweist man natürlich analog.

- (b) Da $Z \cup Z'$ eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z' ist, erhalten wir mit (a)

$$US(f, Z) \leq US(f, Z \cup Z') \leq OS(f, Z \cup Z') \leq OS(f, Z'),$$

wobei die mittlere Ungleichung gilt, weil das Infimum einer Menge immer kleiner oder gleich dem Supremum ist. \square

Aufgabe 12.4. Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen, Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Man zeige:

- (a) $OS(f + g, Z) \leq OS(f, Z) + OS(g, Z)$;
 (b) $OS(cf, Z) = c \cdot OS(f, Z)$;
 (c) $OS(|f|, Z) - US(|f|, Z) \leq OS(f, Z) - US(f, Z)$.

Lemma 12.3 (b) besagt insbesondere, dass jede Obersumme eine obere Schranke für alle Untersummen ist. Die Menge aller Untersummen ist also nach oben beschränkt. Wir können damit das Supremum aller Untersummen (und genauso das Infimum aller Obersummen) bilden:

Definition 12.5 (Unter- und Oberintegral). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt

$$UI(f) := \sup \{US(f, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \quad \text{das \underline{U}nterintegral, und analog}$$

$$OI(f) := \inf \{OS(f, Z) : Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \quad \text{das \underline{O}berintegral}$$

von f .

Anschaulich bedeutet dies im Fall des Unterintegrals einfach, dass wir – wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt erklärt – versuchen, die Untersummen (durch fortgesetztes Verfeinern der Zerlegungen) möglichst groß zu machen, so dass wir uns letztlich immer mehr dem eigentlich gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von f nähern. Das Supremum dieser Untersummen, also das Unterintegral, sollte demnach bereits der gesuchte Flächeninhalt unter dem Graphen von f sein. Das gleiche gilt natürlich auch für das Oberintegral, so dass wir insgesamt erwarten würden, dass Unter- und Oberintegral übereinstimmen und gleich dem gesuchten Flächeninhalt sind.

Leider ist dies unter den schwachen Voraussetzungen, die wir bisher an f gestellt haben, im Allgemeinen nicht der Fall, wie wir gleich in Beispiel 12.9 (d) sehen werden. Für beliebiges f erhalten wir zunächst nur die folgende Ungleichung.

Lemma 12.6. Für jede beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $UI(f) \leq OI(f)$.

Beweis. Angenommen, es wäre $UI(f) > OI(f)$. Wir wählen dann eine beliebige Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit $UI(f) > c > OI(f)$. Da $UI(f)$ die kleinste obere Schranke für die Untersummen ist, ist c keine obere Schranke mehr, d. h. es gibt eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $US(f, Z) > c$. Analog finden wir auch eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ mit $OS(f, Z') < c$. Dann ist im Widerspruch zu Lemma 12.3 (b) aber $US(f, Z) > c > OS(f, Z')$. \square

Definition 12.7 (Integrierbarkeit). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Gilt dann $UI(f) = OI(f)$, so nennen wir f **(Riemann-)integrierbar**, und definieren das **Integral** von f als diesen Wert

$$\int_a^b f(x) dx := UI(f) = OI(f).$$

Bemerkung 12.8.

- (a) Die Schreibweise $\int_a^b f(x) dx$ ist an die Differentialschreibweise aus Notation 10.14 angelehnt und soll andeuten, dass man sich das Integral entsprechend unserer Konstruktion anschaulich als eine „unendliche Summe kleiner Rechteckflächen“ vorstellen kann. Dabei steht das Integralzeichen \int als stilisiertes S weiterhin für eine Summe, und die aufsummierten Rechtecke haben die Höhe $f(x)$ und Breite dx (siehe Notation 10.14), also die Fläche $f(x) dx$. Die Integrationsvariable x ist damit analog zur Laufvariablen in einer Summe und kann daher auch durch einen anderen Buchstaben ersetzt werden, darf aber natürlich nicht gleichzeitig noch für etwas anderes (z. B. die Ober- oder Untergrenze) verwendet werden: Ein Ausdruck z. B. der Form $\int_a^x f(x) dx$ ergibt keinen Sinn, genauso wenig wie eine Summe $\sum_{n=1}^n a_n$.
- (b) Es gibt mehrere Arten, den Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion zu definieren. Neben der hier behandelten Riemannsches Integrationstheorie über Unter- und Obersummen, die wohl die einfachste Herangehensweise ist, ist die „zweitwichtigste“ Möglichkeit das sogenannte *Lebesgue-Integral*, das zwar komplizierter zu definieren ist, dafür aber allgemeiner ist in dem Sinne, dass eine größere Klasse von Funktionen integrierbar wird. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch nur die Riemannsches Integrationstheorie behandeln und daher statt von Riemann-Integrierbarkeit einfach immer nur von Integrierbarkeit reden. Die Lebesguesche Integrationstheorie könnt ihr im zweiten Studienjahr in der Vorlesung „Maß- und Integrationstheorie“ kennenlernen.

Beispiel 12.9.

- (a) Ist $f(x) = c$ (mit $c \in \mathbb{R}$) eine konstante Funktion, so sind die Infima und Suprema von f auf allen Teilintervallen gleich c . Damit ist dann $US(f, Z) = OS(f, Z) = c(b - a)$ für alle Unterteilungen Z und somit auch $UI(f) = OI(f) = c(b - a)$. Also ist f integrierbar mit $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$ (was natürlich auch genau der Flächeninhalt für $x \in [a, b]$ unter dem Graphen von f ist).
- (b) Wie in Beispiel 12.2 betrachten wir noch einmal die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ mit den Zerlegungen $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\}$. Da das Unterintegral nach Definition eine obere Schranke für alle Untersummen (und analog das Oberintegral eine untere Schranke für alle Obersummen) ist, folgt aus der Rechnung von Beispiel 12.2 sowie Lemma 12.6

$$\frac{n-1}{2n} = US(f, Z_n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z_n) = \frac{n+1}{2n},$$

und damit durch Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$ nach Satz 5.23 (a)

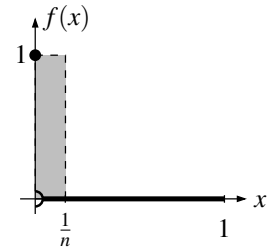
$$\frac{1}{2} \leq UI(f) \leq OI(f) \leq \frac{1}{2},$$

d. h. $UI(f) = OI(f) = \frac{1}{2}$. Also ist f integrierbar mit $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ – was anschaulich ja auch die Dreiecksfläche unter dem Graphen von f ist.

(c) Es sei f die (unstetige) Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für die gleiche Zerlegung $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ wie in (b) ist diesmal $US(f, Z_n) = 0$ und $OS(f, Z_n) = \frac{1}{n}$ (im Bild rechts ist die Obersumme eingezeichnet). Also folgt wieder



$$0 = US(f, Z_n) \leq UI(f) \leq OI(f) \leq OS(f, Z_n) = \frac{1}{n},$$

und damit wie in (b) durch Grenzwertbildung für $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq UI(f) \leq OI(f) \leq 0 \Rightarrow UI(f) = OI(f) = 0.$$

Damit ist f integrierbar mit $\int_0^1 f(x) dx = 0$ – was auch anschaulich einleuchtend ist, denn unter dem einen Punkt, an dem der Funktionswert gleich 1 ist, liegt ja kein Flächeninhalt größer als Null.

(d) Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da in jedem Teilintervall von $[0, 1]$ nach Aufgabe 5.35 sowohl rationale als auch irrationale Zahlen liegen, ist auf jedem solchen Teilintervall das Infimum von f gleich 0 und das Supremum gleich 1. Damit folgt $US(f, Z) = 0$ und $OS(f, Z) = 1$ für jede Zerlegung Z , d. h. es ist auch $UI(f) = 0$ und $OI(f) = 1$. Also ist f nicht integrierbar – mit unseren Definitionen können wir den Flächeninhalt unter dem Graphen von f nicht sinnvoll definieren.

Aufgabe 12.10. Zeige durch eine explizite Berechnung von Ober- und Untersummen, dass

$$(a) \int_0^a e^x dx = e^a - 1 \qquad (b) \int_0^a x^n dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}$$

für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Aufgabe 4.11 ist für (b) nützlich.)

Bevor wir die wichtigsten Eigenschaften integrierbarer Funktionen untersuchen, wollen wir zunächst noch ein einfaches Kriterium für die Integrierbarkeit beweisen, das implizit auch bereits in unseren Rechnungen von Beispiel 12.9 versteckt ist.

Lemma 12.11 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.*

- (a) f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt mit $OS(f, Z) - US(f, Z) < \varepsilon$.
- (b) f ist genau dann integrierbar mit Integral $\int_a^b f(x) dx = c$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Zerlegungen Z und Z' von $[a, b]$ gibt mit $OS(f, Z) < c + \varepsilon$ und $US(f, Z') > c - \varepsilon$.

Beweis.

„ \Rightarrow “ Es sei f integrierbar mit $\int_a^b f(x) dx = UI(f) = OI(f) = c$. Da $OI(f)$ nach Definition die größte untere Schranke für die Obersummen von f ist, ist $c + \frac{\varepsilon}{2}$ keine untere Schranke mehr, d. h. es gibt eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $OS(f, Z) < c + \frac{\varepsilon}{2}$. Analog gibt es eine Zerlegung Z' von $[a, b]$ mit $US(f, Z') > c - \frac{\varepsilon}{2}$, was bereits (b) zeigt. Außerdem erfüllt die Zerlegung $Z \cup Z'$ dann auch die Eigenschaft von (a), denn nach Lemma 12.3 (a) ist

$$OS(f, Z \cup Z') - US(f, Z \cup Z') \leq OS(f, Z) - US(f, Z') < \left(c + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

„ \Leftarrow “ Für Teil (a) haben wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z wie in der Voraussetzung, und damit

$$\text{OI}(f) - \text{UI}(f) \leq \text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) < \varepsilon,$$

da das Ober- bzw. Unterintegral eine untere bzw. obere Schranke für die Ober- bzw. Untersummen sind. Nimmt man hier den Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$, so ergibt sich $\text{OI}(f) - \text{UI}(f) \leq 0$, mit Lemma 12.6 also $\text{OI}(f) = \text{UI}(f)$. Damit ist f dann integrierbar.

Für Teil (b) gilt stattdessen für jedes $\varepsilon > 0$

$$c - \varepsilon < \text{US}(f, Z) \leq \text{UI}(f) \leq \text{OI}(f) \leq \text{OS}(f, Z) < c + \varepsilon,$$

woraus im Grenzfalle $\varepsilon \rightarrow 0$ die Ungleichungskette $c \leq \text{UI}(f) \leq \text{OI}(f) \leq c$ folgt, d. h. f ist integrierbar mit Integral c . \square

Als erste Anwendung dieses Kriteriums wollen wir nun untersuchen, wie die Integrierbarkeit mit der Stetigkeit einer Funktion zusammenhängt. Dazu haben wir in Beispiel 12.9 (c) schon gesehen, dass integrierbare Funktionen nicht notwendig stetig sein müssen. Die Umkehrung ist jedoch immer richtig:

Satz 12.12. *Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f auch integrierbar auf $[a, b]$.*

Beweis. Nach Satz 8.23 ist f beschränkt, so dass wir also die Begriffe dieses Kapitels anwenden können. Wir zeigen die Integrierbarkeit von f mit dem Kriterium aus Lemma 12.11 (a).

Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist, ist f dort nach Satz 8.36 sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass $|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $y, z \in [a, b]$ mit $|y - z| < \delta$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ für alle i , d. h. alle Teilintervalle sollen kürzer als δ sein. Dann gilt

$$\text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (\sup f([x_{i-1}, x_i]) - \inf f([x_{i-1}, x_i])).$$

Als stetige Funktion nimmt f auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ nach Satz 8.25 an einer Stelle y_i ein Maximum und an einer Stelle z_i ein Minimum an. Da y_i und z_i beide im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ liegen, dessen Länge ja kleiner als δ ist, ist natürlich auch $|y_i - z_i| < \delta$ und damit $|f(y_i) - f(z_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ nach Wahl von δ . Wir können oben also weiterrechnen und erhalten

$$\text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (f(y_i) - f(z_i)) < \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

woraus nun mit Lemma 12.11 (a) die Behauptung folgt. \square

Als Nächstes wollen wir die wichtigsten elementaren Eigenschaften von integrierbaren Funktionen herleiten.

Satz 12.13 (Eigenschaften des Integrals). *Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $f + g$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(b) cf ist ebenfalls integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt

$$\int_a^b cf(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

(c) Ist $f \leq g$, d. h. $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(d) $|f|$ ist ebenfalls integrierbar auf $[a, b]$, und es gilt die **Dreiecksungleichung**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis. Wir verwenden das Riemannsche Integrabilitätskriterium aus Lemma 12.11.

- (a) Da f und g integrierbar sind, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ nach Lemma 12.11 (b) Zerlegungen Z und Z' von $[a, b]$ mit

$$\text{OS}(f, Z) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \text{OS}(g, Z') < \int_a^b g(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Aufgabe 12.4 (a) und Lemma 12.3 (a) folgt daraus

$$\begin{aligned} \text{OS}(f+g, Z \cup Z') &\leq \text{OS}(f, Z \cup Z') + \text{OS}(g, Z \cup Z') \leq \text{OS}(f, Z) + \text{OS}(g, Z') \\ &< \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog finden wir für die Untersummen Zerlegungen \tilde{Z} und \tilde{Z}' mit

$$\text{US}(f+g, \tilde{Z} \cup \tilde{Z}') > \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx - \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Lemma 12.11 (b) angewendet auf $f+g$.

- (b) Für $c = 0$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $c > 0$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann wieder eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $\text{OS}(f, Z) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{c}$. Damit folgt aus Aufgabe 12.4 (b) dann

$$\text{OS}(cf, Z) = c \cdot \text{OS}(f, Z) < c \cdot \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

Eine analoge Abschätzung bekommen wir natürlich auch wieder für die Untersummen. Damit folgt die Behauptung für $c > 0$ aus Lemma 12.11 (b).

Für $c < 0$ ergibt sich die Behauptung genauso aus der analog zu zeigenden Aussage $\text{OS}(cf, Z) = c \cdot \text{US}(f, Z)$.

- (c) Aus $f \leq g$ folgt sofort $\text{OS}(f, Z) \leq \text{OS}(g, Z)$ für jede Zerlegung Z , und damit durch Übergang zum Infimum über alle Z auch $\int_a^b f(x) dx = \text{OI}(f) \leq \text{OI}(g) = \int_a^b g(x) dx$.
- (d) Wir zeigen zunächst die Integrierbarkeit von $|f|$. Dazu sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben; nach Lemma 12.11 (a) können wir eine Zerlegung Z von $[a, b]$ wählen mit $\text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) < \varepsilon$. Mit Aufgabe 12.4 (c) folgt dann aber auch

$$\text{OS}(|f|, Z) - \text{US}(|f|, Z) \leq \text{OS}(f, Z) - \text{US}(f, Z) < \varepsilon,$$

und damit ist $|f|$ nach Lemma 12.11 (a) integrierbar. Die Abschätzung des Integrals erhalten wir nun aus (c): Wegen $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ ist sowohl

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{als auch} \quad - \int_a^b f(x) dx \stackrel{(b)}{=} \int_a^b -f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

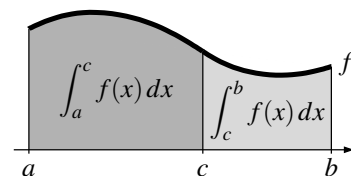
woraus sich die Behauptung ergibt, da $|\int_a^b f(x) dx|$ in jedem Fall eine dieser beiden linken Seiten ist. □

26

Eine weitere sehr anschauliche Eigenschaft von Integralen ist die sogenannte Additivität: für jede Zwischenstelle $c \in (a, b)$ ist die Fläche unter dem gesamten Graphen von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleich der Summe der Flächen von a bis c und von c bis b .

Satz 12.14 (Additivität des Integrals). *Es seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $c \in (a, b)$. Ist f dann sowohl auf $[a, c]$ als auch auf $[c, b]$ integrierbar, so auch auf $[a, b]$, und es gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



Beweis. Der Beweis ist sehr ähnlich zu dem von Satz 12.13 (a). Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f auf $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist, gibt es Zerlegungen Z bzw. Z' dieser beiden Intervalle, so dass

$$\text{OS}(f|_{[a,c]}, Z) < \int_a^c f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \text{OS}(f|_{[c,b]}, Z') < \int_c^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Obersumme von f bezüglich der Zerlegung $Z \cup Z'$ ist dann offensichtlich gerade die Summe dieser beiden Teilobersummen, d. h. wir haben

$$\text{OS}(f, Z \cup Z') = \text{OS}(f|_{[a,c]}, Z) + \text{OS}(f|_{[c,b]}, Z') < \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \varepsilon,$$

und eine analoge Aussage auch genauso für die Untersummen. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 12.11 (b). \square

Notation 12.15 (Integrale mit vertauschten Grenzen). Bisher haben wir Integrale $\int_a^b f(x) dx$ nur für $a \leq b$ definiert. Ist hingegen $a > b$, so vereinbaren wir die Notation

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx, \tag{*}$$

wenn f auf $[b, a]$ integrierbar ist. Dies hat den Vorteil, dass die Formel aus Satz 12.14 (im Fall der Integrierbarkeit) dann nicht nur für $a \leq c \leq b$, sondern für beliebige a, b, c gilt: Ist z. B. $a < b < c$, so ist nach Satz 12.14

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

was (durch Subtraktion von $\int_b^c f(x) dx$ auf beiden Seiten) mit der Konvention (*) wieder die gleiche Form

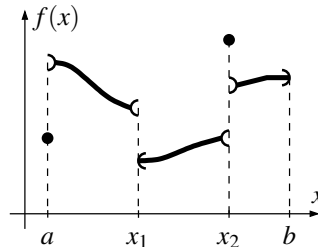
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

wie in Satz 12.14 hat.

Beispiel 12.16 (Stückweise stetige Funktionen). Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen einen Punkt $c \in [a, b]$ eine **Sprungstelle** von f , wenn die drei Zahlen

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \quad \text{und} \quad f(c)$$

existieren, aber nicht alle gleich sind (falls c einer der Randpunkte des Intervalls ist, gibt es den Grenzwert natürlich nur von einer der beiden Seiten). Man nennt f **stückweise stetig**, wenn f wie im Bild rechts stetig bis auf endlich viele Sprungstellen ist.



Eine solche stückweise stetige Funktion ist stets integrierbar:

- (a) Es seien $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ die Sprungstellen und Randpunkte des Definitionsintervalls. Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ für $i = 1, \dots, n$ ist f dann eine stetige Funktion mit evtl. abgeänderten Funktionswerten an den Rändern, also die Summe aus einer stetigen Funktion und geeigneten Vielfachen der „Sprungfunktionen“

$$[x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{i-1}, \\ 0 & \text{für } x > x_{i-1} \end{cases} \quad \text{und} \quad [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_i, \\ 0 & \text{für } x < x_i. \end{cases}$$

Da eine stetige Funktion und diese Sprungfunktionen nach Satz 12.12 und Beispiel 12.9 (c) integrierbar sind, ist nach Satz 12.13 (a) und (b) auch $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ integrierbar.

- (b) Nach der Additivität aus Satz 12.14 ist f damit auch auf $[a, b]$ integrierbar.

Aufgabe 12.17. Zeige, dass die folgenden Funktionen integrierbar sind:

- (a) eine beliebige monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;

(b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0; \end{cases}$

$$(c) f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x \in \mathbb{Q} \text{ mit gekürzter Darstellung } x = \frac{p}{q} \text{ für } p \in \mathbb{N} \text{ und } q \in \mathbb{N}_{>0}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Aufgabe 12.18. Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_k\}$ eines Intervalls $[a, b]$ definieren wir die *Feinheit* $l(Z)$ als den größten Abstand $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, k\}$ zwischen zwei benachbarten Punkten von Z .

Es seien nun eine Folge (Z_n) von Zerlegungen $Z_n = \{x_{n,0}, \dots, x_{n,k_n}\}$ von $[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} l(Z_n) = 0$ sowie Zwischenpunkte $\xi_{n,i} \in [x_{n,i-1}, x_{n,i}]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, k_n$ gegeben. Zeige, dass dann für jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} (x_{n,i} - x_{n,i-1}) f(\xi_{n,i})$$

gilt, also dass man das Integral statt mit Ober- und Untersummen auch mit einer beliebigen „Zwischensumme“ berechnen kann.

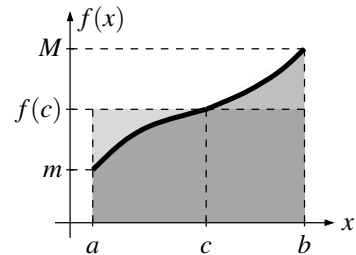
12.B Stammfunktionen

Unsere bisherigen Ergebnisse erlauben es uns zwar, von vielen Funktionen die Integrierbarkeit nachzuweisen, aber noch nicht, den Wert des Integrals dann auch explizit zu berechnen. Wie wir in der Einleitung dieses Kapitels schon motiviert haben, ist das zentrale Resultat für solche Berechnungen die Aussage, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist. Um dies zu zeigen, benötigen wir zur Vorbereitung noch einen kleinen und sehr anschaulichen Hilfssatz.

Satz 12.19 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

(d. h. die Fläche unter dem Graphen ist wie im Bild rechts gleich der Fläche eines Rechtecks, dessen Höhe ein Funktionswert $f(c)$ auf dem betrachteten Intervall ist).



Beweis. Nach Satz 8.25 nimmt f als stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ein Maximum M und Minimum m an. Also folgt aus Beispiel 12.9 (a) und Satz 12.13 (c)

$$m(b - a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b - a),$$

und damit

$$m \leq \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Da f stetig ist, gibt es nun nach dem Zwischenwertsatz 8.21 ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ – was genau die Behauptung war. \square

Bemerkung 12.20. Mit Notation 12.15 gilt die Gleichung $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ für ein c zwischen a und b auch für den Fall $a > b$: Anwenden des Mittelwertsatzes 12.19 auf das Intervall $[b, a]$ liefert dann zunächst $\int_b^a f(x) dx = f(c)(a - b)$, woraus wir aber durch Multiplikation mit -1 wieder die Form $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ erhalten können.

Satz 12.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion*

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

(bei der wir also das Integral von f berechnen und dabei die Obergrenze als Variable nehmen) differenzierbar mit $F' = f$.

Beweis. Wir zeigen die Differenzierbarkeit von F in einem Punkt $c \in [a, b]$ mit dem Folgenkriterium. Es sei also $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in $[a, b] \setminus \{c\}$ mit $x_n \rightarrow c$. Dann gilt für alle n

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(c) &= \int_a^{x_n} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \\ &= \int_c^{x_n} f(t) dt && \text{(Satz 12.14 bzw. Notation 12.15)} \\ &= f(z_n)(x_n - c) && \text{(Satz 12.19 bzw. Bemerkung 12.20)} \end{aligned}$$

für ein z_n zwischen c und x_n . Beachte, dass wegen $x_n \rightarrow c$ auch $z_n \rightarrow c$ gilt, da z_n ja immer zwischen c und x_n liegt. Da f stetig ist, haben wir damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(c)}{x_n - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(c)$$

nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit aus Satz 8.11 (b). Wiederum nach dem Folgenkriterium gemäß Satz 8.11 (a) bedeutet dies nun aber gerade wie gewünscht

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c). \quad \square$$

Beispiel 12.22. Die Voraussetzung der Stetigkeit im Hauptsatz 12.21 ist wirklich notwendig: Betrachten wir z. B. noch einmal die unstetige Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 12.9 (c), so ist hier

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, hat als Ableitung jedoch die Nullfunktion und nicht f .

Für die Integralberechnung benötigen wir also Funktionen, deren Ableitung die ursprünglich gegebene Funktion ist. Wir geben solchen Funktionen daher einen besonderen Namen. Wegen Beispiel 12.22 beschränken wir uns dabei auf stetige Funktionen.

Definition 12.23 (Stammfunktionen). Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt eine differenzierbare Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ eine **Stammfunktion** von f .

Folgerung 12.24 (Integralberechnung mit Stammfunktionen). *Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:*

- (a) f besitzt eine Stammfunktion.
- (b) Sind F und G zwei Stammfunktionen von f , so unterscheiden sich diese nur um eine additive Konstante, d. h. es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F - G = c$.
- (c) Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis.

- (a) folgt unmittelbar aus Satz 12.21: Die dort angegebene Funktion $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion von f .
- (b) Nach Voraussetzung ist $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. Damit ist $F - G$ nach Folgerung 10.25 (c) konstant.
- (c) Nach dem Hauptsatz 12.21 sind sowohl F als auch $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ Stammfunktionen von f . Also gibt es nach (b) eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) - \int_a^x f(t) dt = c$$

für alle $x \in [a, b]$. Einsetzen von $x = a$ liefert $F(a) = c$, und damit

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt.$$

Für $x = b$ ergibt sich nun die Behauptung. \square

Notation 12.25 (Unbestimmte Integrale). Man schreibt die Differenz $F(b) - F(a)$ in Folgerung 12.24 (c) oft auch als $[F(x)]_{x=a}^b$ oder $F(x)|_{x=a}^b$ (wenn die Integrationsvariable aus dem Zusammenhang klar ist, auch als $[F(x)]_a^b$ oder $F(x)|_a^b$), und die dortige Gleichung damit als

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Da dies für beliebige Integrationsgrenzen a und b gilt, vereinfacht man diese Notation oft noch weiter und schreibt gemäß Folgerung 12.24 einfach

$$\int f(x) dx = F(x), \quad (*)$$

für die Aussage, dass F eine Stammfunktion von f ist. Man bezeichnet dies dann auch als ein **unbestimmtes Integral**. Beachte aber, dass $(*)$ nur eine symbolische Schreibweise ist, die erst nach dem Einsetzen von Grenzen zu einer echten Gleichheit in \mathbb{R} wird! Dies kann man alleine schon daran sehen, dass x von der Notation her auf der linken Seite eine Integrationsvariable ist, auf der rechten Seite aber wie eine freie Variable aussieht (siehe Bemerkung 12.8 (a)). Außerdem ist mit F z. B. auch $F + 1$ eine Stammfunktion von f , d. h. wir können sowohl

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{als auch} \quad \int f(x) dx = F(x) + 1$$

schreiben – was natürlich sofort zum Widerspruch $F(x) = F(x) + 1$ führen würde, wenn man dies als echte Gleichungen von Funktionen betrachten dürfte.

Beispiel 12.26. Wir können nun viele Integrale konkret berechnen, indem wir vom Integranden eine Stammfunktion suchen:

- (a) Ist $f(x) = x^a$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, so ist $F(x) = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ nach Beispiel 10.30 (d) eine Stammfunktion von f , d. h. mit Notation 12.25 gilt

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} \quad \text{für } a \neq -1.$$

Konkret können wir damit z. B. das Integral aus Beispiel 12.9 (b) auch ohne komplizierte Berechnung von Ober- und Untersummen bestimmen: Es ist einfach

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

- (b) Für $a = -1$ ist die Formel aus (a) natürlich nicht anwendbar. Wir haben aber glücklicherweise mit dem Logarithmus schon eine Funktion kennengelernt, deren Ableitung nach Beispiel 10.30 (c) gleich $\frac{1}{x}$ ist: Es ist also

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

für Integrationsintervalle in $\mathbb{R}_{>0}$ (so dass der Logarithmus dort definiert ist). Falls das Integrationsintervall in $\mathbb{R}_{<0}$ liegt, können wir als Stammfunktion $\log(-x)$ nehmen, denn auch die Ableitung dieser Funktion ist ja gleich $\frac{1}{x}$. Insgesamt ist damit

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|.$$

- (c) Durch die Ableitungen der speziellen Funktionen, die wir in Beispiel 10.30 berechnet haben, sehen wir genauso z. B.

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x \quad \text{und} \quad \int \sin x dx = -\cos x.$$

Nach der Einführung von Stammfunktionen wollen wir unseren Integralbegriff nun noch etwas erweitern. Bisher konnten wir Integrale nur auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ im Definitionsbereich des Integranden berechnen. Oft treten allerdings Fälle auf, in denen eine oder beide Integrationsgrenzen entweder nicht mehr im Definitionsbereich liegen oder aber gleich $\pm\infty$ sind. Auch in diesen Fällen kann man durch eine einfache Grenzwertbildung das Integral definieren.

Definition 12.27 (Uneigentliche Integrale).

- (a) Es sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion (wobei der Fall $b = \infty$ zugelassen ist). Wir nehmen weiterhin an, dass f auf jedem abgeschlossenen Intervall $[a, c]$ mit $a \leq c < b$ integrierbar ist. Existiert dann der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ c < b}} \int_a^c f(x) dx \quad \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

so nennen wir ihn das **uneigentliche Integral** von f auf $[a, b)$. Liegt dieser Grenzwert zusätzlich in \mathbb{R} , so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ **konvergent**, andernfalls **divergent**. Analog definiert man uneigentliche Integrale im Fall $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (b) Es sei nun $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei die Fälle $a = -\infty$ bzw. $b = \infty$ wieder zugelassen sind. Für ein $c \in (a, b)$ setzen wir dann

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

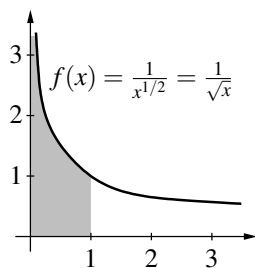
sofern die rechte Summe (von zwei uneigentlichen Integralen gemäß (a)) in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert. Beachte, dass diese Summe dann wegen der Additivität des Integrals aus Satz 12.14 nicht von der Wahl des Zwischenpunktes c abhängt. Wie im Fall (a) spricht man auch hier von einem (beidseitig) uneigentlichen Integral bzw. von der Konvergenz oder Divergenz dieses Integrals.

Beispiel 12.28.

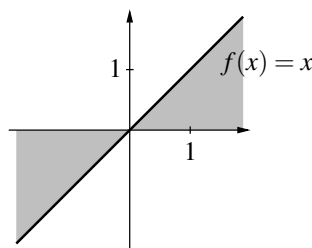
- (a) Für $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^a} dx &= \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} \int_c^1 \frac{1}{x^a} dx = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} \left[\frac{1}{1-a} x^{1-a} \right]_c^1 = \frac{1}{1-a} \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c > 0}} (1 - c^{1-a}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral konvergiert also genau für $a < 1$. Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche von 0 bis 1 unter dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ in diesem Fall (wie im Bild unten links für $a = \frac{1}{2}$ dargestellt) endlich ist, obwohl sie nach oben eine unendliche Ausdehnung hat.



(a)



(b)

- (b) Das uneigentliche Integral der Identität $f(x) = x$ auf $(-\infty, \infty)$ existiert nicht, denn bei der Wahl des Zwischenpunktes 0 erhalten wir den unbestimmten Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= \int_{-\infty}^0 x dx + \int_0^{\infty} x dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 x dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c x dx \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_c^0 + \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^c = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow -\infty} -c^2 + \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow \infty} c^2 \\ &= -\infty + \infty. \end{aligned}$$

Auch anschaulich ist im Bild oben rechts ersichtlich, dass sich dieser Flächeninhalt aus einer unendlich großen negativen und positiven Fläche zusammensetzt. Beachte, dass wir nicht das gleiche Ergebnis erhalten hätten, wenn wir das uneigentliche Integral symmetrisch um die vertikale Achse als

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-c}^c = \frac{1}{2} \lim_{c \rightarrow \infty} (c^2 - c^2) = 0$$

definiert hätten!

27

12.C Integrationsregeln

In Abschnitt 12.B haben wir alle Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen letztlich „durch Zufall“ gefunden – also weil wir uns einfach an eine Funktion erinnern konnten, deren Ableitung wir schon einmal berechnet haben und bei der für diese Ableitung dann die gegebene Funktion herauskam. Daher müssen wir uns jetzt natürlich fragen, wie man Stammfunktionen berechnen kann, wenn man nicht gerade zufällig eine solche sieht. Gibt es analog zur Berechnung von Ableitungen auch Regeln, mit denen man, wenn man die Stammfunktionen einiger spezieller Funktionen kennt, auch die Stammfunktionen z. B. ihrer Produkte, Quotienten oder Verkettungen berechnen kann?

Leider gibt es keine solchen universellen Regeln. Dies ist auch der Grund dafür, dass in mathematischen Formelsammlungen oft seitenweise Tabellen von Stammfunktionen stehen, während man für das Differenzieren aufgrund der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel keine derartigen Tabellen benötigt. Es gibt jedoch auch für die Integration ein paar Regeln, mit denen man Integrale oft berechnen kann – nur ist es je nach der betrachteten Funktion mehr oder weniger schwierig (oder evtl. sogar unmöglich), einen Weg zu finden, um mit diesen Regeln ans Ziel zu kommen.

Wir wollen nun die wichtigsten derartigen Regeln behandeln. Die erste ist im wesentlichen nur die „umgekehrte Richtung“ der Produktregel der Differentiation:

Satz 12.29 (Partielle Integration bzw. Produktintegration). *Es seien $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

(bzw. als unbestimmtes Integral $\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$).

Beweis. Nach der Produktregel aus Satz 10.8 (b) ist uv eine Stammfunktion von $(uv)' = u'v + uv'$. Also ist $\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx = [u(x)v(x)]_a^b$. Die Behauptung folgt dann durch Subtraktion von $\int_a^b u(x)v'(x) dx$ nach Satz 12.13. \square

Beispiel 12.30. Die Regel aus Satz 12.29 nennt sich „partielle Integration“, weil bei der Berechnung des Integrals auf der linken Seite mit Hilfe der rechten neben einem „ausintegrierten Anteil“ noch ein anderes Integral übrig bleibt – nämlich eines, bei dem wir von einem Faktor des ursprünglichen Integrals die Ableitung und vom anderen eine Stammfunktion gebildet haben. Die Anwendung dieser Regel ist also vor allem dann sinnvoll, wenn dieses neue Integral bereits bekannt oder zumindest einfacher als das ursprüngliche ist. Hier sind zwei Beispiele dafür.

- (a) Zur Berechnung von
- $\int x \cos x \, dx$
- setzen wir (mit den Notationen von Satz 12.29)

$$\begin{array}{ll} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = x & v'(x) = 1 \end{array}$$

und erhalten

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Wir haben bei der Anwendung der partiellen Integration also den Faktor x differenziert und den Faktor $\cos x$ integriert. Möchte man dies in der Rechnung deutlich machen (und die Funktionen u, u', v, v' nicht explizit hinschreiben), so notiert man dies auch oft als

$$\int \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{\cos x} \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x.$$

Beachte, dass die umgekehrte Wahl hier nicht zum Ziel geführt hätte: Die Rechnung

$$\int \underset{\uparrow}{x} \underset{\downarrow}{\cos x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx$$

ist zwar korrekt, aber das neue Integral ist hier komplizierter als das ursprüngliche.

- (b) Das Integral
- $\int \log x \, dx$
- lässt sich mit einem Trick ebenfalls durch partielle Integration berechnen:

$$\int \log x \, dx = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\log x} \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x.$$

Dieser Trick funktioniert hier, weil aus der (komplizierten) Logarithmusfunktion beim Ableiten die sehr viel einfachere Funktion $\frac{1}{x}$ entsteht. Auf die gleiche Art kann man übrigens auch die Integrale der Arkusfunktionen aus Definition 9.24 berechnen, da auch diese bei der Differentiation sehr viel einfacher werden (siehe Beispiel 10.30 (c)).

Die zweite wichtige Integrationsregel ergibt sich analog aus der Kettenregel der Differentiation.

Satz 12.31 (Substitutionsregel). *Es seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset D$. Dann gilt*

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy.$$

Beweis. Nach Folgerung 8.26 ist $f([a, b])$ ein abgeschlossenes Intervall, und damit hat g nach Folgerung 12.24 (a) dort eine Stammfunktion G . Die Kettenregel aus Satz 10.10 liefert dann $(G \circ f)'(x) = g(f(x)) f'(x)$. Damit ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b (G \circ f)'(x) \, dx = [G(f(x))]_{x=a}^b = G(f(b)) - G(f(a)),$$

und die rechte Seite ebenfalls

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy = [G(y)]_{y=f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)). \quad \square$$

Bemerkung 12.32. Die Substitutionsregel nimmt in der Differential Schreibweise aus Notation 10.14 eine besonders einfache Form an: Setzen wir $y = f(x)$ und damit $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, und bezeichnen wir die Integrationsgrenzen mit $x_1 = a$ und $x_2 = b$ bzw. $y_1 = f(a)$ und $y_2 = f(b)$, so schreibt sich die Substitutionsregel als

$$\int_{x_1}^{x_2} g(y) \frac{dy}{dx} \, dx = \int_{y_1}^{y_2} g(y) \, dy,$$

oder analog zu Notation 12.25 einfach als

$$\int g(y) \frac{dy}{dx} \, dx = \int g(y) \, dy,$$

wenn man darauf achtet, dass die Grenzen passend zur Integrationsvariablen gewählt werden. Die Regel sieht dann also einfach wie ein „formales Erweitern mit dx “ aus.

Beispiel 12.33. Die Substitutionsregel bietet sich natürlich immer dann an, wenn die zu integrierende Funktion eine Verkettung von zwei anderen Funktionen ist oder enthält – und insbesondere dann, wenn die Ableitung der inneren Funktion zusätzlich auch noch als Faktor im Integranden steht.

- (a) Beim Integral $\int x e^{x^2} dx$ stellen wir fest, dass sich im Integranden eine verkettete Funktion e^{x^2} befindet, und dass die Ableitung $2x$ der inneren Funktion x^2 auch (bis auf die Konstante 2) zusätzlich noch als Faktor im Integranden steht. Wir substituieren also $y = x^2$, so dass $\frac{dy}{dx} = 2x$ in der Notation von Bemerkung 12.32 gilt. Damit folgt also

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{dx} e^y dx \stackrel{12.31}{=} \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

Im Fall eines bestimmten Integrals hätten wir bei der Anwendung von Satz 12.31 die Grenzen mitsubstituieren müssen:

$$\int_a^b x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dy}{dx} e^y dx \stackrel{12.31}{=} \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} e^y dy = \frac{1}{2} [e^y]_{y=a^2}^{b^2} = \frac{1}{2} (e^{b^2} - e^{a^2}).$$

Beachte, dass der Faktor x im Integranden bei diesem Beispiel ganz wesentlich dafür war, dass die Substitutionsregel zum Ziel geführt hat: Ohne diesen Faktor hätten wir mit derselben Substitution

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{1}{2x} \cdot \frac{dy}{dx} e^y dx = \frac{1}{2} \int \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy$$

erhalten – was zwar auch richtig ist, aber nicht weiter hilft, weil das neue Integral auch nicht einfacher als das ursprüngliche zu berechnen ist. In der Tat kann man zeigen, dass sich die Stammfunktion von e^{x^2} nicht durch die uns bisher bekannten „speziellen Funktionen“ ausdrücken lässt.

- (b) Besonders einfach wird die Substitutionsregel im Fall der sogenannten *linearen Substitution*: Ist f eine beliebige stetige Funktion, deren Stammfunktion F wir kennen, so können wir damit immer auch die Stammfunktion von $f(ax+b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ bestimmen, da die innere Ableitung hier eine Konstante ist: Substituieren wir $y = ax+b$, so ergibt sich wegen $\frac{dy}{dx} = a$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(y) \frac{dy}{dx} dx \stackrel{12.31}{=} \frac{1}{a} \int f(y) dy = \frac{1}{a} F(y) = \frac{1}{a} F(ax+b).$$

Konkret ist also z. B.

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \log|2x+3|,$$

da $x \mapsto \log|x|$ nach Beispiel 12.26 (b) eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist.

Wir hatten in Beispiel 12.33 (a) bereits erwähnt, dass sich die Stammfunktionen von Funktionen, die aus unseren speziellen Funktionen zusammengesetzt sind, manchmal nicht wieder auf diese Art schreiben lassen. Für viele Klassen von Funktionen ist dies aber doch der Fall – z. B. für rationale Funktionen der Form $\frac{p}{q}$ für zwei Polynome p und q . Wir wollen dies hier nun zeigen, der Einfachheit halber allerdings nur für den Fall, dass das Nennerpolynom q in verschiedene Linearfaktoren zerfällt und größeren Grad als das Zählerpolynom p hat. Der Trick besteht in diesem Fall darin, den Ausdruck $\frac{p}{q}$ als Summe von Brüchen zu schreiben, die nur eine Konstante im Zähler und einen einzigen Linearfaktor im Nenner haben. Derartige Funktionen der Form $\frac{c}{x-a}$ lassen sich mit einer linearen Substitution wie in Beispiel 12.33 (b) dann einfach zu $c \log|x-a|$ integrieren.

Lemma 12.34 (Partialbruchzerlegung). Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ verschieden. Ferner sei p ein reelles Polynom mit $\deg p < n$. Dann gilt

$$\frac{p(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x-a_i} \quad \text{für} \quad c_i := \frac{p(a_i)}{(a_i-a_1) \cdots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \cdots (a_i-a_n)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$.

Beweis. Offensichtlich ist

$$f(x) := p(x) - \sum_{i=1}^n p(a_i) \cdot \frac{(x-a_1) \cdots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \cdots (x-a_n)}{(a_i-a_1) \cdots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \cdots (a_i-a_n)} \quad (*)$$

ein Polynom mit $\deg f < n$. Es hat aber jedes a_k für $k = 1, \dots, n$ als Nullstelle, denn es gilt

$$f(a_k) = p(a_k) - p(a_k) \cdot \frac{(a_k-a_1) \cdots (a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1}) \cdots (a_k-a_n)}{(a_k-a_1) \cdots (a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1}) \cdots (a_k-a_n)} = 0,$$

da nach Einsetzen von $x = a_k$ in der Summe über i in (*) alle Terme mit $i \neq k$ einen Faktor 0 im Zähler haben und damit verschwinden. Nach Satz 3.18 (b) ist f also das Nullpolynom. Division von (*) durch $(x-a_1) \cdots (x-a_n)$ liefert damit wie behauptet

$$0 = \frac{p(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_n)} - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{x-a_i}. \quad \square$$

Bemerkung 12.35. Die Formel für die Koeffizienten c_i in Lemma 12.34 lässt sich leicht merken: Man erhält c_i , indem man $x = a_i$ im ursprünglichen Ausdruck $\frac{p(x)}{(x-a_1) \cdots (x-a_i) \cdots (x-a_n)}$ einsetzt – bis auf den Linearfaktor $x - a_i$ im Nenner, den man dabei weglassen muss, da er ansonsten ja auch zu einem Faktor 0 im Nenner führen würde.

Beispiel 12.36. Um das Integral $\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx$ zu berechnen, führen wir eine Partialbruchzerlegung des Integranden durch: Mit $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ ist

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x+2},$$

wobei sich $c_1 = \frac{-1}{1} = -1$ durch Einsetzen von $x = -1$ in $\frac{x}{x+2}$ und $c_2 = \frac{-2}{-1} = 2$ durch Einsetzen von $x = -2$ in $\frac{x}{x+1}$ ergibt. Also ist

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + 2 \frac{1}{x+2} \right) dx = -\log|x+1| + 2 \log|x+2|$$

nach einer linearen Substitution wie in Beispiel 12.33 (b).

Als letzte Rechenregel zur Bestimmung von Integralen wollen wir nun noch untersuchen, wie man Integrale von Funktionen berechnen kann, die als Grenzwerte von Funktionenfolgen entstehen – also z. B. von Potenzreihen. Die Situation ist hier sehr viel einfacher als sie es bei der Differentiation in Satz 10.27 war.

Satz 12.37 (Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung). *Es seien $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen eine (nach Satz 8.39 dann automatisch ebenfalls stetige) Grenzfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt*

$$\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

d. h. „Grenzwertbildung und Integration können vertauscht werden“.

Beweis. Die erste behauptete Gleichheit ist natürlich nichts weiter als die Definition von f . Für die zweite sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_n$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für alle $x \in [a, b]$ und $n \geq n_0$. Damit ergibt sich nach Satz 12.13

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Definition des Grenzwerts bedeutet dies genau $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ für $n \rightarrow \infty$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 12.38 (Integration von Potenzreihen). Insbesondere bedeutet Satz 12.37, dass Potenzreihen (die in jedem abgeschlossenen Intervall innerhalb des Konvergenzgebiets nach Satz 8.37 ja gleichmäßig konvergieren) gliedweise integriert werden können: Sind $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe und $f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ ihre Partialsummen, so folgt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} \right]_a^b = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} \right]_a^b$$

(sofern $[a, b]$ komplett im Konvergenzintervall der Potenzreihe liegt), d. h. als unbestimmtes Integral geschrieben ist

$$\int f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Dies zeigt noch einmal deutlich die besonders schönen Eigenschaften von Potenzreihen: Innerhalb ihres Konvergenzgebiets kann man mit ihnen praktisch „wie mit Polynomen rechnen“, d. h.

- sie können wie erwartet addiert und multipliziert werden (Lemma 7.4 und Bemerkung 7.36);
- sie sind beliebig oft differenzierbar und ihre Ableitungen können gliedweise berechnet werden (Folgerung 10.28 und Satz 11.9);
- Integrale können gliedweise berechnet werden;
- „viele Funktionen“ können als Potenzreihe (nämlich als ihre Taylor-Reihe, siehe Kapitel 11) geschrieben werden.

Beispiel 12.39.

- (a) Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$. Die Ableitung dieser Funktion ist natürlich $f'(x) = \frac{1}{x}$. Nun können wir dies für $|x-1| < 1$ mit Hilfe der geometrischen Reihe (siehe Beispiel 7.3 (a)) als

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 \pm \dots$$

schreiben. Diese Potenzreihe kann jetzt aber nach Bemerkung 12.38 gliedweise integriert werden, und darum ist

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \dots$$

für $|x-1| < 1$, also auf $(0, 2)$, eine Stammfunktion von f' . Nach Folgerung 12.24 (b) kann sich diese von der ursprünglichen Funktion f nur um eine additive Konstante unterscheiden – Einsetzen von $x=1$ liefert aber auch sofort, dass diese Konstante gleich 0 ist. Also erhalten wir die Darstellung

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \pm \dots$$

für alle $x \in (0, 2)$ (die wir in Beispiel 11.16 (a) bereits für $x \in [1, 2]$ bewiesen hatten).

- (b) Eine analoge Rechnung können wir auch mit der Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan x$ durchführen: Hier ist die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots,$$

und damit ist

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

eine Stammfunktion von f' , die sich von f wiederum nur um eine additive Konstante unterscheiden kann. Auch hier ist diese Konstante wegen $\arctan 0 = 0$ wieder gleich 0, und wir

erhalten auf $(-1, 1)$ ohne irgendwelche komplizierte Rechnungen die Potenzreihendarstellung der Arkustangens-Funktion

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots$$

Aufgabe 12.40. Berechne die folgenden (z. T. unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx & \text{(b)} \int_0^\infty x^2 e^{-2x} dx & \text{(c)} \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3 - x} dx \\ \text{(d)} \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x \log x} dx & \text{(e)} \int \frac{1}{1 + e^x} dx & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^3 x dx \end{array}$$

Aufgabe 12.41. Zeige mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 12.42 (Integralkriterium für Reihen). Es sei $f: \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige und monoton fallende Funktion. Man zeige:

- Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) dx$ hat das gleiche Konvergenzverhalten wie die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$, d. h. es sind entweder beide konvergent oder beide divergent.
- Für $a \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^a}$ genau dann, wenn $a > 1$. (Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel 7.3 (c) und 7.19 auf reelle Exponenten.)

Gilt die Aussage (a) auch ohne die Voraussetzung, dass f monoton fallend ist?

Aufgabe 12.43. Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) x^n dx = 0$.
- Gilt $f(x) = f(1-x)$ für alle $x \in [0, 1]$, so ist $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$.

Aufgabe 12.44. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{> 0}$ und $f: [0, a] \rightarrow [0, b]$ eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man zeige:

- Ist f monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und $f(a) = b$, dann gilt $\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(x) dx = ab$.
- Ist f monoton fallend mit $f(0) = b$ und $f(a) = 0$, dann gilt $\int_0^a f(x) dx = \int_0^b f^{-1}(x) dx$.

Was bedeuten diese Aussagen geometrisch?

Aufgabe 12.45 (Binomische Reihe). Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die **verallgemeinerten Binomialkoeffizienten** durch

$$\binom{a}{n} := \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten nun auf $D = (-1, 1)$ die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^a$. Man zeige:

- Die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 ist gegeben durch $T_{f,0}(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^n$ und konvergiert auf D .
- Es gilt sogar $(1+x)^a = \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^n$ für alle $x \in D$, d. h. die Taylor-Reihe stellt wirklich die ursprüngliche Funktion dar. (Hinweis: Zeige zunächst, dass die Ableitung von $\frac{T_{f,0}}{f}$ gleich 0 ist.)
- Die Funktion \arcsin lässt sich auf D als Potenzreihe schreiben. Berechne diese Potenzreihe explizit!

Was ergibt sich aus der binomischen Reihe in den Spezialfällen $a \in \mathbb{N}$ bzw. $a = -1$?