11. Anwendungen der Differentialrechnung

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie wir von „nahezu allen“ Funktionen ihre Ableitung berechnen können und welche elementaren Eigenschaften der Funktion man daran ablesen kann. In diesem Kapitel wollen wir nun zwei weitere Anwendungen vorstellen, die sich aus der Differentialrechnung ergeben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf reelle Funktionen.

11.A Die Regel von de l'Hôpital

Als Erstes wollen wir eine einfache Regel vorstellen, mit der man oft Grenzwerte berechnen kann, die anders nur schwer zu bestimmen wären: nämlich Grenzwerte der Form $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, bei denen die normalen Grenzwertsätze aus Satz 8.13 bzw. Bemerkung 8.20 nicht anwendbar sind, weil sich die unbestimmten Quotienten „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ ergeben würden.

Es gibt viele Varianten dieser Regel, je nachdem, bei welchen der im folgenden Satz vorkommenden Grenzwerten auch uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ zugelassen sind. In der Praxis treten alle diese Varianten auch oft auf. Um die Beweisidee des Satzes klar herauszustellen, beschränken wir uns hier aber zunächst (wie auch bei unseren bisherigen Beweisen von Rechenregeln für Grenzwerte) auf den Fall, in dem keine uneigentlichen Grenzwerte vorkommen, und geben die möglichen Verallgemeinerungen dann in der anschließenden Bemerkung 11.2 an.

Satz 11.1 (Regel von de l'Hôpital, Grundversion**).** *Es seien $f,g\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Wir nehmen ferner an, dass*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

(so dass der Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ also formal von der unbestimmten Form „$\frac{0}{0}$“ ist). Existiert dann der Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\mathbb{R}$, so auch $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis. Wegen $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ können wir f und g durch $f(a) := g(a) := 0$ stetig nach $[a,b)$ fortsetzen. Beachte außerdem, dass g auf (a,b) nirgends gleich 0 sein kann, denn sonst gäbe es im Widerspruch zur Voraussetzung nach dem Satz 10.23 von Rolle zwischen a und dieser Nullstelle von g eine Nullstelle von g'.

Wir zeigen nun den Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mit dem Folgenkriterium. Es sei also $(x_n)_n$ eine Folge in (a,b) mit $x_n\to a$. Nach dem Mittelwertsatz 10.24 (b) gibt es dann für alle $n\in\mathbb{N}$ ein $c_n\in(a,x_n)$ mit

$$f'(c_n)\cdot(g(x_n)-g(a)) = g'(c_n)\cdot(f(x_n)-f(a)), \quad \text{also} \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

wegen $f(a)=g(a)=0$ und der Nullstellenfreiheit von g und g'. Nun konvergiert wegen $a<c_n<x_n$ mit $(x_n)_n$ aber auch $(c_n)_n$ gegen a, und damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

was die Behauptung mit dem Folgenkriterium zeigt. □

Bemerkung 11.2 (Regel von de l'Hôpital, Varianten**).** Der Satz 11.1 von de l'Hôpital hat die folgenden Varianten, die wir im Folgenden ebenfalls verwenden werden. Die Beweise sollen hier nicht gegeben werden — sie lassen sich mit analogen, allerdings oft technisch etwas aufwändigeren Methoden führen.

(a) Die Regel gilt auch, wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ beide im uneigentlichen Sinne gleich $\pm\infty$ sind, wir also beim Grenzwert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ den unbestimmten Ausdruck „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ haben.

(b) Statt einer Annäherung von rechts an die Grenze der Definitionsmenge (in unserem Fall also an den Punkt a am Rand des Intervalls (a,b)) ist natürlich auch eine Annäherung von links oder eine beidseitige Annäherung möglich. Dabei sind die Fälle $a=-\infty$ und $b=\infty$ zugelassen.

(c) Die Regel gilt auch, wenn der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nur im uneigentlichen Sinne existiert, also gleich $\pm\infty$ ist.

Existiert der Grenzwert von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ dagegen auch im uneigentlichen Sinne nicht, so macht die Regel von de l'Hôpital keine Aussage — wir können daraus dann also nicht schließen, dass auch der ursprüngliche Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ nicht existiert!

Beispiel 11.3.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^n}$ von der Form „$\frac{\infty}{\infty}$“. Um ihn mit der Regel von de l'Hôpital (mit $f(x)=\log x$ und $g(x)=x^n$) zu bestimmen, differenzieren wir also Zähler und Nenner separat und erhalten den Bruch $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1/x}{nx^{n-1}}$. Da der Nenner dieses Bruchs für $x>0$ nirgends gleich 0 ist und der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0$$

existiert, folgt mit Satz 11.1 (bzw. der Verallgemeinerung aus Bemerkung 11.2) also auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^n} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = 0. \qquad (*)$$

Analog zu Bemerkung 5.15 zur Anwendung von Grenzwertsätzen schreibt man dabei die Anwendung der Regel von de l'Hôpital oftmals gleich wie in der oben in $(*)$ mit „$\frac{\infty}{\infty}$“ bezeichneten Gleichung, und überprüft erst nachträglich, dass der neu entstandene Bruch einen (evtl. uneigentlichen) Grenzwert hat und sein Nenner stets ungleich 0 ist.

(b) Analog erhält man

$$\lim_{x\to 0} x^n \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-n}} \overset{\text{„}\frac{-\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^n}{n} = 0,$$

da der nach dem Differenzieren entstandene Nenner $-nx^{-n-1}$ für $x>0$ ungleich 0 ist. Zusammen mit (a) sehen wir in diesem Sinne also, dass „der Logarithmus für $x\to 0$ oder $x\to\infty$ schwächer ist als jede Potenz“ — in den beiden betrachteten Grenzwerten setzt sich jeweils die Funktion x^n durch. Dies ist natürlich ganz analog zu der Aussage von Bemerkung 9.3 (a), dass die Exponentialfunktion schneller als jede Potenz wächst. Beachte auch, dass wir in der zweiten Rechnung oben gesehen haben, dass es sich auch bei einem ursprünglichen Ausdruck der Form „$0\cdot(\pm\infty)$“ lohnen kann, ihn künstlich als Bruch umzuschreiben, um dann die Regel von de l'Hôpital anwenden zu können.

(c) Falls sich nach einmaliger Anwendung von Satz 11.1 immer noch ein Bruch der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ ergibt, kann man den Satz natürlich auch mehrfach hintereinander anwenden, wie z. B. in dem Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(wegen $e^x \neq 0$ für alle x), den wir aber natürlich auch schon aus Satz 9.1 (c) kannten.

Bemerkung 11.4 (Die Regel von de l'Hôpital für Folgengrenzwerte)**.** Manchmal kann man auch den Grenzwert einer reellen Folge $(a_n)_n$ mit der Regel von de l'Hôpital berechnen. Kann man die Folge nämlich — betrachtet als Abbildung $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ — zu einer Abbildung $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fortsetzen, also auch für reelles n betrachten, und existiert dann der Grenzwert für *reelle* $n \to \infty$, so existiert er dann natürlich auch für *natürliche* $n \to \infty$, und hat denselben Wert. Für die Berechnung des Grenzwerts für reelle n haben wir dann aber wieder die Regel von de l'Hôpital zur Verfügung.

Betrachten wir als Beispiel hierfür einmal für gegebenes $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, den wir in Aufgabe 7.33 mit viel Aufwand zu e^x berechnet haben. Da wir Potenzen inzwischen auch für reelle n definiert haben, können wir den Ausdruck $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nun aber auch als Funktion einer reellen Variablen n auffassen und seinen Grenzwert für $n \to \infty$ mit der Regel von de l'Hôpital berechnen: Es ist

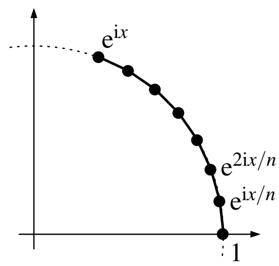
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) && \text{(Definition 9.7)}\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) && \text{(Stetigkeit von exp, Satz 8.15)}\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{n^{-1}}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{-x/n^2}{1+\frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{-1/n^2}\right) && \text{(„}\tfrac{0}{0}\text{“, Differenzieren nach } n\text{, beachte } -\tfrac{1}{n^2} \neq 0)\\
&= \exp(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5. Berechne die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\log(\tan(2x))}{\log(\tan(3x))}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

Aufgabe 11.6. Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, so dass $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existiert. Zeige, dass f dann auch in a differenzierbar ist und $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ gilt.

Aufgabe 11.7 (Bogenmaß)**.** Es sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir wollen nun zeigen, dass die „Bogenlänge“ entlang des Einheitskreises von 1 nach $e^{ix} \in \mathbb{C}$ gleich x ist und e^{ix} damit als der Punkt auf dem Einheitskreis aufgefasst werden kann, der mit der positiven reellen Achse den Winkel x im *Bogenmaß* einschließt (siehe Bemerkung 9.11).



Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ unterteilen wir den Kreisbogen dazu wie im Bild durch die Zwischenpunkte $e^{ikx/n}$ mit $k = 0,\dots,n$. Die Länge des geraden Streckenzuges, der diese Punkte der Reihe nach miteinander verbindet, ist dann $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{i(k+1)x/n} - e^{ikx/n}\right|$.

Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$.

11.B Taylor-Entwicklung

Als weitere Anwendung der Differentialrechnung wollen wir nun unsere ursprüngliche Idee der linearen Approximation einer (reellen) Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $a \in D$ erweitern und uns fragen, ob wir vielleicht noch bessere Näherungen bekommen können, wenn wir als Näherungsfunktion statt einer *linearen* Funktion eine Polynomfunktion von höherem Grad verwenden. Betrachten wir z. B. statt unserer bisherigen Näherung vom Anfang von Kapitel 10

$$f(x) \approx f(a) + c_1\,(x-a)$$

den Ansatz

$$f(x) \approx f(a) + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2,$$

bei dem wir auch einen quadratischen Term zulassen (den wir proportional zu $(x-a)^2$ statt zu x^2 wählen, damit er am Näherungspunkt a selbst verschwindet), so können wir wie im Bild unten erwarten, dass wir eine viel bessere Näherung erhalten, da die Näherungsfunktion ja jetzt eine quadratische Parabel ist und damit auch ein wenig die Krümmung von f an der Stelle a nachbilden kann.

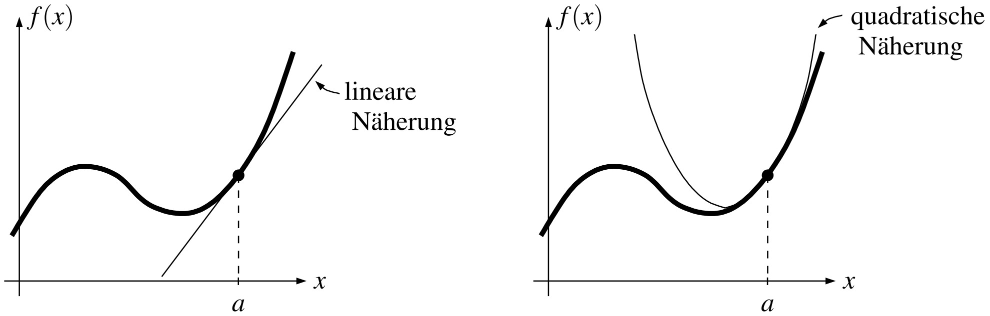
Natürlich können wir dies dann auch noch weiter treiben und Polynomfunktionen höheren Grades zulassen: Wenn wir für ein $n \in \mathbb{N}$ einen Ansatz

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} c_k\,(x-a)^k$$

machen und dabei die Koeffizienten c_k geschickt wählen, sollte die Näherung mit wachsendem n immer besser werden. Wir können sogar versuchen, den Grenzübergang $n \to \infty$ zu machen und uns fragen, ob wir mit einer Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$$

im Grenzfall vielleicht nicht nur eine ganz besonders gute Näherung, sondern sogar *genau* die Funktion f zurück erhalten, also ob wir f letztlich als Potenzreihe in $x-a$ schreiben können — schließlich haben wir ja auch wie z. B. die Exponentialfunktion schon einige Funktionen gesehen, die wir von vornherein bereits als Potenzreihe geschrieben haben.



Um diese Idee zu verfolgen, wollen wir nun als Erstes untersuchen, welche Koeffizienten c_k wir in den obigen Polynomen bzw. Reihen wählen sollten. Da wir bereits wissen, dass der lineare Koeffizient c_1 gerade die Ableitung $f'(a)$ ist, sollte es nicht überraschen, dass wir für die höheren Koeffizienten c_k mit $k > 1$ höhere Ableitungen benötigen. Diese wollen wir daher jetzt einführen.

Definition 11.8 (Höhere Ableitungen)**.** Es seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Die Funktion f heißt ***n*-mal differenzierbar** auf D, wenn alle fortgesetzten Ableitungen $f^{(0)} := f,\ f^{(1)} := f',\ f^{(2)} := f'' := (f')',\ \dots,\ f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ existieren.

(b) Die Funktion f heißt ***n*-mal stetig differenzierbar** auf D, wenn zusätzlich $f^{(n)}$ stetig ist.

(c) Existieren die höheren Ableitungen $f^{(n)}$ für alle n, so heißt f **unendlich oft differenzierbar** auf D.

Die Menge aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^n(D)$ bezeichnet (der Buchstabe C kommt vom englischen Wort „continuous“ für „stetig“). Inbesondere ist also $C^0(D)$ die Menge aller stetigen und $C^\infty(D)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf D.

Wie diese höheren Ableitungen die oben betrachteten Koeffizienten c_k bestimmen, sieht man am besten am Beispiel von Potenzreihen, die ja bereits in einer derartigen Form geschrieben sind:

Satz 11.9 (Taylor-Formel für Potenzreihen). *Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$ eine reelle Potenzreihe in $x-a$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so dass wir f also als Funktion $f\colon (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ auffassen können.*

Dann ist f auf $(a-r, a+r)$ unendlich oft differenzierbar, und für die Koeffizienten c_k der Potenzreihe gilt

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit anderen Worten ist also

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

für alle $x \in (a-r, a+r)$.

Beweis. Nach Folgerung 10.28 ist jede Potenzreihe in ihrem Konvergenzgebiet differenzierbar, und ihre Ableitung ist wieder eine Potenzreihe (mit demselben Konvergenzradius), die sich durch gliedweises Differenzieren berechnen lässt. Insbesondere ist f damit also unendlich oft differenzierbar, und die höheren Ableitungen sind

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, c_k\, (x-a)^{k-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir hier nun $x = a$ ein, so ist $(x-a)^{k-n}$ gleich 0 für $k > n$ und 1 für $k = n$. In der obigen Summe bleibt dann also nur der Term für $k = n$ übrig, und wir erhalten wie behauptet

$$f^{(n)}(a) = n(n-1)\cdots(n-n+1)\, c_n = n!\, c_n. \qquad \square$$

Beispiel 11.10. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und möchten die 10. Ableitung $f^{(10)}(0)$ im Nullpunkt berechnen. Natürlich könnte man jetzt mit Hilfe der Regeln von Satz 10.8 alle fortgesetzten Ableitungen von f berechnen und schließlich in dem so gefundenen Ausdruck für $f^{(10)}$ den Wert $x = 0$ einsetzen — dies wäre aber sehr zeitaufwändig. Viel schneller geht es mit der Taylor-Formel: Nach der geometrischen Reihe können wir f ja für $|x| < 1$ gemäß

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \pm \cdots$$

als Potenzreihe in x schreiben. Satz 11.9 mit $a = 0$ und $k = 10$ sagt uns also für den Koeffizienten von x^{10} in dieser Reihe, der ja offensichtlich gleich -1 ist, dass

$$-1 = \frac{f^{(10)}(0)}{10!}, \qquad \text{und damit} \qquad f^{(10)}(0) = -10!.$$

Wir sehen an diesem Beispiel schon, dass die Taylor-Formel für Potenzreihen auch dann nützlich ist, wenn die Funktion f ursprünglich gar nicht als Potenzreihe gegeben ist, sondern wir nur wissen, dass es eine solche Darstellung als Potenzreihe gibt. In der Tat benutzt die Taylor-Formel in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \qquad (*)$$

ja auch gar nicht mehr die Koeffizienten der ursprünglichen Reihe, sondern nur noch die Tatsache, dass sich f überhaupt irgendwie als Potenzreihe schreiben lässt. Gilt die Formel $(*)$ also vielleicht sogar für jede unendlich oft differenzierbare Funktion f?

Leider ist (wie wir gleich sehen werden) die Antwort auf diese Frage nein. Für viele in der Praxis vorkommende Funktionen ist die Antwort allerdings auch ja — und daher lohnt es sich, die Sache doch noch weiter zu verfolgen. Wir geben der rechten Seite von $(*)$, bzw. den Partialsummen dieser Reihe, daher zunächst einen Namen.

Definition 11.11 (Taylor-Polynom und Taylor-Reihe)**.** Es seien $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $a \in D$ ein fest gewählter Punkt.

(a) Die Funktion f sei n-mal differenzierbar für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Polynomfunktion

$$T^n_{f,a}\colon D \to \mathbb{R},\; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

das n**-te Taylor-Polynom** von f mit Entwicklungspunkt a; offensichtlich ist $\deg T^n_{f,a} \le n$.

(b) Ist f unendlich oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe in $x-a$

$$T_{f,a}(x) := \lim_{n\to\infty} T^n_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

die **Taylor-Reihe** von f mit Entwicklungspunkt a. Beachte, dass zunächst nicht klar ist, ob diese Potenzreihe einen Konvergenzradius größer als 0 hat, also ob sie überhaupt in irgendeinem Punkt x (außer a) konvergiert — und dass, selbst wenn sie konvergiert, nicht klar ist, ob sie als Funktion im Konvergenzgebiet mit f übereinstimmt.

Beispiel 11.12.

(a) Lässt sich eine Funktion f auf einem Intervall $(a-r, a+r)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ als Potenzreihe in $x-a$ schreiben, so besagt Satz 11.9 gerade, dass die Taylor-Reihe $T_{f,a}(x)$ genau diese Reihe ist, also $T_{f,a}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a-r, a+r)$ gilt.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$$

und bestimmen ihre Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $a = 1$. Die Ableitungen von f sind einfach zu berechnen: Wegen $f'(x) = x^{-1}$ ist

$$f^{(k)}(x) = (-1)\cdot(-2)\cdots(-(k-1))\cdot x^{-k} = (-1)^{k-1}\cdot\frac{(k-1)!}{x^k}$$

und damit $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!$ für alle $k > 0$. Die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 1 ist damit

$$\begin{aligned} T_{f,1}(x) = \log 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{k!}(x-1)^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k \\ &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \mp \cdots. \end{aligned}$$

Wie in Beispiel 7.29 (a) hat diese Potenzreihe in $x-1$ den Konvergenzradius 1, sie konvergiert also für $|x-1| < 1$, d. h. für $x \in (0,2)$, und divergiert für $|x-1| > 1$, also für $x < 0$ oder $x > 2$. Damit ist schon einmal klar, dass die Taylor-Reihe $T_{f,1}(x)$ für $x > 2$ sicher *nicht* die ursprüngliche Funktion $f(x) = \log x$ darstellt, da sie dort ja nicht einmal konvergiert. Aber auch für $x \in (0,2)$ ist noch nicht klar, dass wirklich $T_{f,1}(x) = f(x)$ gilt: Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Taylor-Reihe auch im Fall der Konvergenz nicht mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmen muss.

Aufgabe 11.13. Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist, und dass die Taylor-Reihe $T_{f,0}$ die Nullfunktion ist (also insbesondere zwar überall konvergiert, aber außer im Nullpunkt nirgends mit f übereinstimmt). Skizziere auch den Graphen von f.

(Hinweis: Man zeige mit vollständiger Induktion, dass alle Ableitungen von f in 0 gleich 0 und für $x \neq 0$ von der Form $\frac{p(x)}{q(x)}\exp(-\frac{1}{x^2})$ für gewisse Polynomfunktionen p und q sind.) 24

Wir benötigen also ein Kriterium, mit dem wir eine Funktion f mit ihren Taylor-Polynomen $T^n_{f,a}$ bzw. ihrer Taylor-Reihe $T_{f,a}$ vergleichen können, so dass wir letztlich nachprüfen können, ob eine (konvergierende) Taylor-Reihe auch wirklich gleich der ursprünglichen Funktion ist. Dies liefert der folgende Satz:

Satz 11.14 (Taylor-Formel). *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion. Ferner seien $a, x \in D$. Dann gibt es ein c zwischen a und x mit*

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Man bezeichnet $f(x) - T^n_{f,a}(x)$ auch als das **Restglied** des n-ten Taylor-Polynoms und schreibt es als $R^n_{f,a}(x)$.*

Beweis. Für den Fall $x = a$ ist die Aussage trivial, da dann beide Seiten der zu zeigenden Formel gleich 0 sind. Für $x \neq a$ behaupten wir, dass die Aussage unmittelbar aus dem Mittelwertsatz 10.24 (b) angewendet auf die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} & F\colon D \to \mathbb{R},\ t \mapsto T^n_{f,t}(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ \text{und} \quad & G\colon D \to \mathbb{R},\ t \mapsto (x-t)^{n+1} \end{aligned}$$

folgt. In der Tat sind F und G dann differenzierbar mit

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + \Big(-\frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\Big) + \Big(-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\Big) + \cdots \\ &\qquad + \Big(-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ \text{und} \quad G'(t) &= -(n+1)(x-t)^n \end{aligned}$$

sowie $F(x) - F(a) = f(x) - T^n_{f,a}(x) = R^n_{f,a}(x)$ und $G(x) - G(a) = -(x-a)^{n+1}$. Der Mittelwertsatz 10.24 (b) liefert also ein c zwischen a und x mit

$$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \cdot (x-a)^{n+1} = -(n+1)(x-c)^n \cdot R^n_{f,a}(x),$$

d. h. wie behauptet $R^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. □

Bemerkung 11.15.

(a) Für $n = 0$ ist Satz 11.14 exakt der Mittelwertsatz 10.24 (a). Wir können die Taylor-Formel also auch als eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes auffassen.

(b) Setzen wir in der Formel aus Satz 11.14 noch den Ausdruck aus Definition 11.11 (a) ein, so erhalten wir für jede $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion f

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{=T^n_{f,a}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{=R^n_{f,a}(x)}$$

für ein c zwischen a und x. Das Restglied des n-ten Taylor-Polynoms hat also genau die Form des $(n+1)$-ten Gliedes der Taylor-Reihe — bis auf den Unterschied, dass man die Ableitung dort an einer Zwischenstelle c anstatt am Entwicklungspunkt a nehmen muss.

(c) Offensichtlich gilt genau dann $T_{f,a}(x) = f(x)$, wenn $\lim_{n\to\infty} R^n_{f,a}(x) = 0$. Wenn man die Taylor-Reihe oder die Taylor-Polynome mit der ursprünglichen Funktion vergleichen möchte, muss man also in irgendeiner Form das Restglied abschätzen. Hier sind zwei Beispiele dafür.

Beispiel 11.16 (Restgliedabschätzung)**.**

(a) Wenden wir Satz 11.14 auf die Taylor-Reihe der Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log x$ mit Entwicklungspunkt $a = 1$ aus Beispiel 11.12 (b) an, so erhalten wir mit den dort berechneten Ableitungen $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ für jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$

$$R^n_{f,1}(x) = f(x) - T^n_{f,1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{(x-1)^{n+1}}{c_n^{n+1}}$$

für ein c_n zwischen 1 und x (wir haben den Zwischenwert hier mit c_n statt c bezeichnet, da es natürlich für jedes n ein anderer sein wird). Ist nun $x \in [1,2]$, so ist aber stets $c_n \geq 1$ und $|x-1| \leq 1$, und wir erhalten die Abschätzung

$$|R^n_{f,1}(x)| \leq \frac{1}{n+1},$$

was mit $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Also konvergieren die Taylor-Polynome für $n \to \infty$ zumindest auf $[1,2]$ wirklich gegen die Funktion f: Es gilt

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \qquad \text{für alle } x \in [1,2]. \tag{$*$}$$

Insbesondere ergibt sich damit für $x = 2$ der Wert der alternierenden harmonischen Reihe zu

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

Wir werden später in Beispiel 12.39 (a) übrigens sehen, dass die Gleichung $(*)$ sogar für $x \in (0,2]$ gilt — also für alle x, für die die Taylor-Reihe überhaupt konvergiert — aber mit unserer bisherigen Formel für das Restglied aus Satz 11.14 können wir das noch nicht beweisen.

(b) Wenn wir als Näherung einer Funktion nur an einem bestimmten Taylor-Polynom (und nicht an der kompletten Reihe) interessiert sind, kann uns Satz 11.14 sagen, wie groß der Fehler ist, den wir dabei machen. Betrachten wir z. B. die Sinusfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$, so ist am Entwicklungspunkt 0

$$T^4_{f,0}(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

(wie man aus Lemma 9.13 (b) sofort abliest, denn nach Satz 11.9 ist ja jede Potenzreihe ihre eigene Taylor-Reihe). Wegen $f^{(5)}(x) = \cos x$ besagt Satz 11.14 für $n = 4$ nun für alle $x \in \mathbb{R}$

$$R^4_{f,0}(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = \frac{\cos c}{5!} x^5$$

für ein c zwischen 0 und x. Wenn wir nun z. B. nur an Werten $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \le \frac{1}{2}$ interessiert sind, so können wir diesen Ausdruck wegen $|\cos c| \le 1$ abschätzen zu

$$|R^4_{f,0}(x)| \le \frac{(\frac{1}{2})^5}{5!} = \frac{1}{3840},$$

d. h. wenn wir für $|x| \le \frac{1}{2}$ den Sinus durch sein viertes Taylor-Polynom $x - \frac{x^3}{6}$ ersetzen, machen wir dabei einen Fehler von höchstens $\frac{1}{3840} \approx 0{,}0003$.

Aufgabe 11.17.

(a) Berechne das Taylor-Polynom $T^2_{f,1}$ für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und zeige die Restgliedabschätzung $|f(x) - T^2_{f,1}(x)| \le \frac{1}{20}$ für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(b) Berechne $f^{(10)}(0)$ sowie das Taylor-Polynom $T^{10}_{f,0}$ für die Funktion $f(x) = \frac{\cos(x^5)}{1-2x^6}$.

Aufgabe 11.18. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f'' = f$ sowie $f(0) = f'(0) = 1$. Berechne die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungspunkt 0 und zeige durch eine Restgliedabschätzung, dass $f = \exp$ die Exponentialfunktion ist.

Als weitere Anwendung der Taylor-Formel wollen wir nun noch ein einfaches hinreichendes Kriterium für lokale Extrema geben. Wir hatten bisher ja nur in Lemma 10.21 gesehen, dass an einem lokalen Extremum, das nicht am Rand der Definitionsmenge liegt, ein kritischer Punkt vorliegen, also die erste Ableitung verschwinden muss — dass diese Bedingung aber nicht für ein lokales Extremum ausreicht. Mit Hilfe höherer Ableitungen und der Taylor-Formel können wir nun ein Kriterium angeben, das nahezu immer und ohne allzu großen Aufwand entscheiden kann, ob wirklich ein lokales Extremum vorliegt oder nicht:

Satz 11.19 (Extremwertkriterium). *Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine n-mal stetig differenzierbare Funktion. Für ein $c \in (a,b)$ gelte $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ und $f^{(n)}(c) \neq 0$.*

(a) *Ist n gerade und $f^{(n)}(c) > 0$, so hat f in c ein isoliertes lokales Minimum.*

(b) *Ist n gerade und $f^{(n)}(c) < 0$, so hat f in c ein isoliertes lokales Maximum.*

(c) *Ist n ungerade, so hat f in c kein lokales Extremum.*

Beweis. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f^{(n)}(c) > 0$ (der Fall $f^{(n)}(c) < 0$ ist analog). Da $f^{(n)}$ nach Voraussetzung stetig ist, gilt nach Bemerkung 8.8 dann sogar $f^{(n)}(x) > 0$ in einer δ-Umgebung von c. Die Taylor-Formel aus Satz 11.14 besagt nun, dass es für alle $x \in (c-\delta, c+\delta)$ ein x' zwischen c und x gibt mit

$$f(x) - T_{f,c}^{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x')}{n!}\,(x-c)^n.$$

Wegen $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ist aber $T_{f,c}^{n-1}(x) = f(c)$, und damit also

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(x')}{n!}\,(x-c)^n. \qquad (*)$$

Da mit x auch x' in $(c-\delta, c+\delta)$ liegt, ist $f^{(n)}(x')$ in jedem Fall positiv. Also ist der Term $(*)$ für $x \in (c-\delta, c+\delta) \backslash \{c\}$

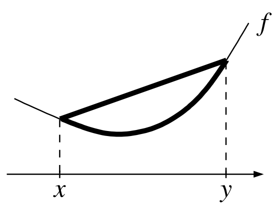
- immer größer als 0 falls n gerade ist; in diesem Fall hat f dann also ein isoliertes lokales Minimum in c;
- größer als 0 für $x > c$ und kleiner als Null für $x < c$ wenn n ungerade ist; in diesem Fall hat f also kein lokales Extremum in c. □

Bemerkung 11.20. Anschaulich kann man die Idee von Satz 11.19 kurz so zusammenfassen: Es sei f eine Funktion, von der wir an einer Stelle c wissen wollen, ob ein lokales Extremum vorliegt. Ist nun die n-te Ableitung von f die erste, die am Punkt c nicht verschwindet, so sagt uns die Idee der Taylor-Näherung, dass dann in der Nähe von c

$$f(x) \approx f(c) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\,(x-c)^n$$

sein sollte, denn dies ist ja gerade das n-te Taylor-Polynom. Da dieser Ausdruck auf der rechten Seite eine einfache Potenzfunktion ist, sieht man ihm aber natürlich sofort sein Verhalten um den Punkt c herum an: Für gerades n gibt es je nach Vorzeichen von $f^{(n)}(c)$ ein isoliertes lokales Minimum oder Maximum, und für ungerades n kein lokales Extremum. Mit dieser Idee lässt sich übrigens auch die Aussage des Satzes sehr leicht merken!

Aufgabe 11.21. In dieser Aufgabe wollen wir sehen, welche anschauliche Bedeutung das Vorzeichen der zweiten Ableitung für den Graphen einer Funktion hat.



Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$ der Graph von $f|_{[x,y]}$ wie im Bild komplett auf oder unterhalb der Verbindungsgeraden von $(x, f(x))$ nach $(y, f(y))$ liegt.

Zeige, dass für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist konvex.

(b) Für alle $x, y \in [a,b]$ mit $x < y$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

(c) $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in (a,b)$.