

Einführung in die Funktionentheorie

Andreas Gathmann

Vorlesungsskript TU Kaiserslautern 2021/22

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung und Motivation	3
1. Komplexe Zahlen	4
2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit	9
3. Wegintegrale	17
4. Der Cauchysche Integralsatz	22
5. Homotopie von Wegen	28
6. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz	33
7. Potenzreihen und Taylor-Reihen	39
8. Folgerungen aus der Potenzreihenentwicklung	46
9. Laurent-Reihen	52
10. Isolierte Singularitäten	57
11. Die Umlaufzahl und der Residuensatz	63
12. Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz	72
13. Abzählen von Null- und Polstellen	78
14. Die Riemannsche Zetafunktion	84
Literatur	92
Index	93

0. Einleitung und Motivation

Funktionentheorie ist – kurz gesagt – die Theorie der Differential- und Integralrechnung in einer komplexen Variablen. Eigentlich wäre also der Name „komplexe Analysis“ zutreffender, und in der Tat wird der Stoff dieser Vorlesung im Englischen auch als „complex analysis“ bezeichnet. Der deutsche Begriff „Funktionentheorie“ ist historisch bedingt (viele der Begründer der Funktionentheorie sind Deutsche, z. B. Bernhard Riemann und Karl Weierstraß) und bis heute erhalten geblieben.

Obwohl die grundlegenden Definitionen der Funktionentheorie (z. B. die der komplexen Differenzierbarkeit) formal genauso wie im Reellen aussehen, führt der zweidimensionale Charakter der komplexen Zahlenebene dazu, dass sich die komplexe Theorie sehr deutlich von der reellen unterscheidet. Ist z. B. $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung, so können wir f auf zwei Arten auffassen: einerseits ist f eine Funktion in *einer komplexen* Variablen, andererseits ist aber auch $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, so dass wir f genauso gut als Funktion in *zwei reellen* Variablen auffassen können. Die Funktionentheorie wird dadurch zu einer sehr interessanten Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis. Ein wesentliches „eindimensionales Merkmal“ der Funktionentheorie ist z. B., dass die Ableitung einer komplex differenzierbaren Funktion wieder eine Funktion (und nicht wie im Mehrdimensionalen eine Matrix) ist. Ein wesentliches „zweidimensionales Merkmal“ ist dagegen, dass man bei Grenzwertbetrachtungen nicht nur „von links und rechts“ sondern aus einer ganzen zweidimensionalen Umgebung gegen einen gegebenen Punkt laufen kann, und somit (im Gegensatz zur eindimensionalen reellen Analysis) die Topologie der Ebene eine ganz wichtige Rolle spielt.

In der Tat werden wir sehen, dass diese interessante Mischung aus ein- und mehrdimensionaler Analysis dazu führt, dass die komplexe Analysis sehr viel schöner ist als die reelle. Ihr werdet euch sicher noch an die zahlreichen „Gegenbeispiele der reellen Analysis“ erinnern: Abbildungen, die partiell aber nicht total differenzierbar sind, total aber nicht stetig partiell differenzierbar, einmal aber nicht zweimal differenzierbar, unendlich oft differenzierbar aber trotzdem nicht durch ihre Taylorreihe darstellbar, und vieles mehr. *In der komplexen Analysis gibt es diese ganzen Unterschiede nicht.* Es gibt hier nur *einen* Begriff, nämlich den der komplexen Differenzierbarkeit. Eine Funktion, die diese Eigenschaft hat, ist damit automatisch unendlich oft differenzierbar, (lokal) integrierbar und (lokal) durch ihre Taylorreihe darstellbar. Außerdem sind solche komplex differenzierbaren Funktionen bereits durch ihre Funktionswerte auf einer beliebig kleinen offenen Menge eindeutig bestimmt (!), und es gibt einige sehr einfache Möglichkeiten, mit denen man oft ihre Integrale ausrechnen kann, auch wenn man keine Stammfunktion explizit kennt. In vielen Fällen kann man sogar reelle Integrale erst dadurch berechnen, dass man sie als komplexe Integrale auffasst und sie dann mit den Methoden der Funktionentheorie löst.

Außer diesen schönen Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen gibt es noch viele weitere Anwendungen der Funktionentheorie, von denen wir einige in dieser Vorlesung behandeln werden. Erwähnenswert ist hier vor allem der Fundamentalsatz der Algebra (d. h. die Aussage, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle besitzt), für den wir mit funktionentheoretischen Mitteln mehrere einfache Beweise sehen werden. Auch in der Zahlentheorie gibt es viele Anwendungen, von denen wir einige im letzten Kapitel dieses Skripts sehen werden. Nicht zuletzt stammt auch das derzeit berühmteste ungelöste Problem der Mathematik, die sogenannte Riemannsche Vermutung, aus der Funktionentheorie (bzw. aus dem Grenzgebiet zwischen Funktionentheorie und Zahlentheorie). Wir werden auch hierauf am Schluss dieser Vorlesung kurz eingehen.

Insgesamt wird die Funktionentheorie aufgrund ihrer relativ naheliegenden Konstruktionen sowie ihrer einfach zu verstehenden und dennoch sehr vielfältigen und mächtigen Resultate von vielen (Dozenten sowie Studenten) als die „schönste Vorlesung des Mathematikstudiums“ bezeichnet. Ich überlasse es euch selbst, euch diesbezüglich eine Meinung zu bilden ...

1. Komplexe Zahlen

Bevor wir mit der komplexen Analysis beginnen, wollen wir zunächst die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften der komplexen Zahlen noch einmal kurz wiederholen.

Definition 1.1. Die **Menge der komplexen Zahlen** wird definiert als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Auf dieser Menge betrachten wir die beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \\ \text{und } (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)} \end{aligned}$$

(mit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$). Elemente der Form $(x, 0)$ schreiben wir einfach als x : beachte, dass diese Elemente genauso addiert und multipliziert werden wie reelle Zahlen, so dass wir \mathbb{R} auf diese Art als Teilmenge von \mathbb{C} auffassen können. Setzen wir noch $i := (0, 1)$, so können wir also jedes Element $(x, y) \in \mathbb{C}$ als $x + iy$ schreiben – was die übliche Schreibweise für komplexe Zahlen ist.

Bemerkung 1.2.

- (a) Mit der Definition 1.1 ergeben sich die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen offensichtlich einfach durch formales Addieren und Ausmultiplizieren von Ausdrücken der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ unter Beachtung der Relation $i^2 = -1$.
- (b) Man rechnet leicht nach, dass die komplexen Zahlen mit den beiden gegebenen Verknüpfungen einen Körper bilden. Da die Addition komplexer Zahlen einfach die Vektoraddition in \mathbb{R}^2 ist, ist das additive Inverse von $x + iy$ gerade $-x - iy$. Das multiplikative Inverse zu einer komplexen Zahl $x + iy \neq 0$ ist $\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$.

Definition 1.3. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $z \in \mathbb{C}$ und $x, y \in \mathbb{R}$) definieren wir

- (a) den **Realteil** von z als $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$;
- (b) den **Imaginärteil** von z als $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$;
- (c) die zu z **komplex konjugierte Zahl** als $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$;
- (d) den **Betrag** von z als $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (also genauso wie die normale euklidische Norm eines Vektors in \mathbb{R}^2).

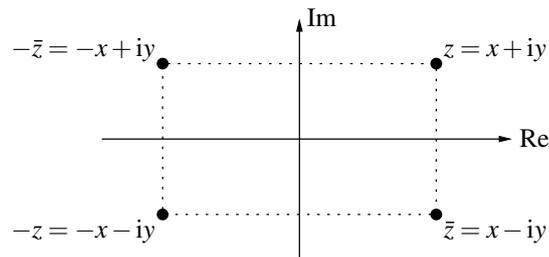
Zwischen diesen Zahlen gelten die folgenden elementaren Relationen:

Lemma 1.4. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

- (a) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$ und $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \cdot (z - \bar{z})$;
- (b) $\overline{\bar{z} + \bar{w}} = z + w$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (d. h. die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus);
- (c) $\overline{\bar{z}} = z$;
- (d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ und $|z + w| \leq |z| + |w|$;
- (e) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen; die Ungleichung in (d) ist genau die bekannte Dreiecksungleichung für Vektoren in \mathbb{R}^2 . \square

Bemerkung 1.5. Da wir \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 definiert haben, können wir komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene, der sogenannten **komplexen Zahlenebene** darstellen. Das folgende Bild zeigt zum Beispiel, welche Zahlen man erhält, wenn man einen gegebenen Punkt $z \in \mathbb{C}$ an der reellen oder imaginären Achse spiegelt.



Wir kommen nun zum ersten Begriff der Analysis, nämlich der Konvergenz von Folgen und Reihen. Wie definieren diesen Begriff wie erwartet, wobei wir entweder die Definition aus der eindimensionalen Analysis für den Grundkörper \mathbb{C} oder die aus der zweidimensionalen Analysis mit dem Grundkörper \mathbb{R} (und der euklidischen Norm) verwenden können:

Definition 1.6 (Konvergenz von Folgen und Reihen). Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |z_n - a| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich heißt a dann auch der **Grenzwert** von $(z_n)_n$, und wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ oder einfach $z_n \rightarrow a$. Weiterhin setzen wir wie üblich für die zugehörige Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N z_n,$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Wir sagen in diesem Fall, dass die durch $(z_n)_n$ bestimmte Reihe konvergiert und nennen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ den Wert dieser unendlichen Reihe.

Bemerkung 1.7. Wir erinnern uns kurz an die wesentlichen Konvergenzkriterien aus den Grundlagen der Mathematik:

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ der zugehörigen Beträge konvergiert. Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent; die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht [G2, Lemma 7.12].
- Eine Folge $(z_n)_n$ konvergiert genau dann gegen a , wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re} z_n)_n$ und $(\operatorname{Im} z_n)_n$ gegen $\operatorname{Re} a$ bzw. $\operatorname{Im} a$ konvergieren [G2, Lemma 23.19]. Insbesondere vertauscht die Grenzwertbildung daher mit der komplexen Konjugation: gilt $z_n \rightarrow a$, so folgt $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} a$ sowie $-\operatorname{Im} z_n \rightarrow -\operatorname{Im} a$ und damit auch $\bar{z}_n \rightarrow \bar{a}$.
- (Quotientenkriterium für Reihen)** Es seien komplexe Zahlen $z_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Ist dann der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \dots$
 - kleiner als 1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent,
 - größer als 1, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

[G2, Satz 7.21]. Beachte, dass das Quotientenkriterium nicht in jedem Fall über Konvergenz oder Divergenz der Reihe entscheiden kann; z. B. dann nicht, wenn die Folge der betrachteten Quotienten gegen 1 konvergiert.

- (Wurzelkriterium für Reihen)** Analog zum Quotientenkriterium gibt es auch das Wurzelkriterium [G2, Satz 7.22]: es lautet wörtlich genauso wie das Quotientenkriterium, mit dem einzigen Unterschied, dass statt des Quotienten $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ der Ausdruck $\sqrt[n]{|z_n|}$ genommen wird und der Grenzwert durch den Limes superior, also den größten Häufungspunkt, ersetzt werden darf. Beide Kriterien beruhen letztlich auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Die wichtigste Anwendung der Folgenkonvergenz im Komplexen ist die komplexe Exponentialfunktion, die wir jetzt einführen:

Lemma und Definition 1.8 (Komplexe Exponentialfunktion). Für alle $z \in \mathbb{C}$ existiert der Grenzwert

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial, und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Damit konvergiert die Exponentialreihe nach dem Quotientenkriterium aus Bemerkung 1.7 (c) absolut, und ist nach Bemerkung 1.7 (a) somit auch konvergent. \square

Bemerkung 1.9.

- (a) Die (komplexe) Exponentialfunktion genügt der Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ (siehe [G2, Folgerung 7.35]; für den Beweis zeigt man, dass man das Produkt $(\sum_n \frac{z^n}{n!})(\sum_m \frac{w^m}{m!})$ aufgrund der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe als Cauchy-Produkt „naiv ausmultiplizieren“ kann, und fasst die Terme geschickt zusammen).
- (b) Die komplexe Exponentialfunktion „vertauscht mit der komplexen Konjugation“, d. h. es gilt

$$\begin{aligned} e^{\bar{z}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\bar{z}^n}{n!} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} \quad (\text{nach Lemma 1.4 (b)}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\bar{z}^n}{n!} \quad (\text{nach Bemerkung 1.7 (b)}) \\ &= \overline{e^z}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also für eine „rein imaginäre“ Zahl $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$

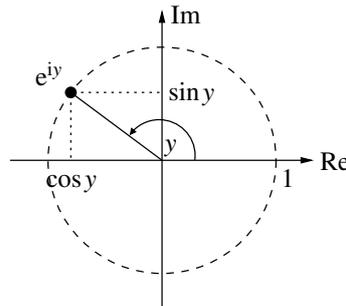
$$|e^{iy}| = \sqrt{e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}}} = \sqrt{e^{iy} \cdot e^{-iy}} = \sqrt{e^{iy-iy}} = \sqrt{e^0} = 1,$$

d. h. komplexe Zahlen der Form e^{iy} liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene. Dies können wir noch etwas besser verstehen:

- (c) Für $y \in \mathbb{R}$ setzen wir bekanntlich [G2, Definition 9.12]

$$\begin{aligned} \cos y &:= \operatorname{Re} e^{iy} = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \\ \text{und} \quad \sin y &:= \operatorname{Im} e^{iy} = \frac{1}{2i} (e^{iy} - e^{-iy}) \end{aligned}$$

(siehe Lemma 1.4 (a) für die jeweils zweite Formel). Also ist $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ genau der Punkt in der komplexen Zahlenebene, der mit der positiven reellen Halbachse wie im folgenden Bild den Winkel y einschließt:



In der Funktionentheorie betrachtet man allerdings in der Regel Funktionen von komplexen Variablen. Daher wollen wir die Winkelfunktionen auch für alle komplexen Zahlen festlegen. Erwartungsgemäß definieren wir daher **Kosinus** und **Sinus** für alle $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Beachte jedoch, dass für allgemeine komplexe Zahlen *nicht* die Formeln $\cos z = \operatorname{Re} e^{iz}$ und $\sin z = \operatorname{Im} e^{iz}$ gelten: in der Regel werden $\cos z$ und $\sin z$ nicht einmal reelle Zahlen sein. Wir können die Winkelfunktionen aber wie im Reellen als eine Potenzreihe schreiben, z. B. für den Kosinus

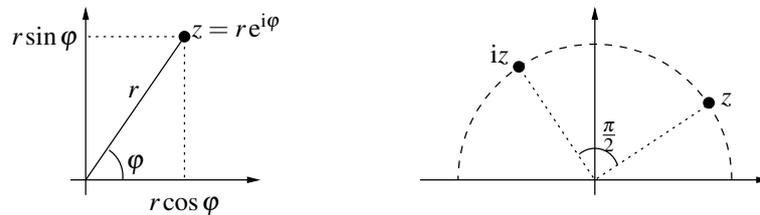
$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} \left(1 + (iz) + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots + 1 + (-iz) + \frac{(-iz)^2}{2!} + \frac{(-iz)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

(beachte, dass wir die Terme in den Reihen wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe beliebig umordnen können). Analog gilt für den Sinus $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 1.10 (Polarkoordinaten). Ist $z \neq 0$ wie im Bild unten links eine komplexe Zahl mit Betrag $r = |z|$, die mit der positiven reellen Halbachse den Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi]$ einschließt, so können wir z nach Bemerkung 1.9 (c) schreiben als

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Wir nennen φ den **Winkel** oder das **Argument** $\arg z$ von z ; die Größen r und φ heißen die **Polarkoordinaten** von z .



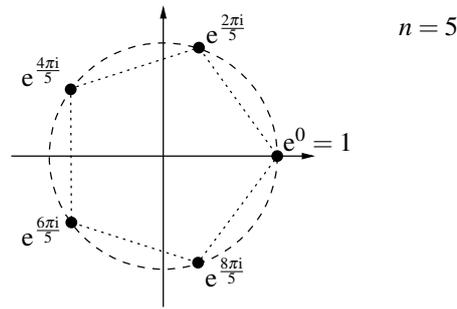
Aus der Polarkoordinatendarstellung erhalten wir eine sehr einfache geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: für $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ist nach Bemerkung 1.9 (a)

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

d. h. bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert. Ein einfaches Beispiel davon zeigt das Bild oben rechts: da $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ die Zahl mit Betrag 1 und Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist, entspricht die Drehung einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ um $\frac{\pi}{2}$ um den Nullpunkt gerade einer Multiplikation mit i .

Beispiel 1.11 (Einheitswurzeln). Wir betrachten die Polynomgleichung $z^n - 1 = 0$ für ein fest gegebenes $n \geq 1$. Welche Lösungen hat diese Gleichung über \mathbb{C} ? Wir wissen aus der linearen Algebra, dass ein solches Polynom höchstens n Nullstellen haben kann. Andererseits können wir jetzt aber auch n verschiedene Lösungen dieser Gleichung angeben: die Zahlen $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ für $k = 0, \dots, n-1$, also nach unserer Interpretation aus Bemerkung 1.9 (c) die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks wie in dem Bild unten, erfüllen die gegebene Gleichung, denn

$$\left(e^{\frac{2\pi ik}{n}} \right)^n = e^{2\pi ik} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1.$$



Wir nennen diese Zahlen die n -ten **Einheitswurzeln**. Aus der üblichen Zerlegung eines Polynoms in Linearfaktoren folgt dann also insbesondere die Polynomgleichung

$$z^n - 1 = (z - 1) \left(z - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right) \cdots \left(z - e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}} \right).$$

Analog kann man auch die Gleichung $z^n = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ lösen: ist $c = r e^{i\varphi}$ die Polarkoordinatendarstellung von c , so erhalten wir offensichtlich die Lösungen

$$\sqrt[n]{r} e^{\frac{i\varphi}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i k}{n}} \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1,$$

also eine spezielle Lösung $\sqrt[n]{r} e^{\frac{i\varphi}{n}}$ dieser Gleichung multipliziert mit allen n -ten Einheitswurzeln.

Aufgabe 1.12. Stelle die folgenden komplexen Zahlen z in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

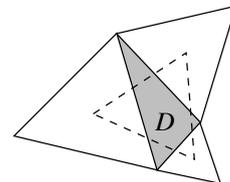
- (a) $z = \frac{2+i}{1-i}$;
- (b) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{1357}$;
- (c) alle Lösungen der Gleichung $z^4 + z^2 + 1 = 0$;
- (d) alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < 1$;

Aufgabe 1.13. Welche der folgenden bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen sind auch für alle komplexen Zahlen gültig?

- (a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ für alle z ;
- (b) $|\cos z| \leq 1$ für alle z ;
- (c) die Gleichung $\sin z = 0$ hat genau die Lösungen $n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$;
- (d) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ für alle z .

Aufgabe 1.14.

- (a) Zeige, dass drei verschiedene Punkte $a, b, c \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene genau dann die entgegen dem Uhrzeigersinn benannten Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind, wenn die Gleichung $a + \omega b + \omega^2 c = 0$ mit $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gilt.
- (b) Gegeben sei ein Dreieck D in der Ebene (im Bild rechts grau gezeichnet). Wir errichten nun über jeder Seite von D ein gleichseitiges Dreieck. Zeige unter Benutzung von (a), dass die Mittelpunkte dieser gleichseitigen Dreiecke selbst wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden (im Bild gestrichelt eingezeichnet).



2. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Wir wollen uns nun komplexen Funktionen zuwenden und dabei zunächst die ersten in der Analysis betrachteten Eigenschaften untersuchen, nämlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bei der Stetigkeit gibt es keine Überraschungen, da sie natürlich genauso definiert wird wie schon aus den Grundlagen der Mathematik bekannt.

Definition 2.1 (Grenzwerte von Funktionen). Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in \overline{D}$ ein Punkt im Abschluss von D [G2, Definition 8.1 bzw. 23.38]. Dann heißt $c \in \mathbb{C}$ **Grenzwert** von $f(z)$ für $z \rightarrow a$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D: |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - c| < \varepsilon$$

gilt. Wie üblich schreiben wir diese Bedingung auch als $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$ oder „ $f(z) \rightarrow c$ für $z \rightarrow a$ “ und sagen, dass $f(z)$ mit $z \rightarrow a$ gegen c **konvergiert**.

Bemerkung und Definition 2.2. Liegt der betrachtete Punkt a in Definition 2.1 sogar in D , so kommt als Grenzwert offensichtlich nur $c = f(a)$ in Frage, da das Einsetzen von $z = a$ dann (für alle δ) zugelassen ist und somit $|f(a) - c| < \varepsilon$ für alle ε , also $|f(a) - c| = 0$ gelten muss. Existiert der Grenzwert in diesem Fall tatsächlich, gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D: |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon,$$

so heißt f **stetig** in $a \in D$. Man nennt f stetig auf D , wenn f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Liegt der Punkt a in Definition 2.1 hingegen nicht in D , so sagt man im Fall der Existenz des Grenzwerts, dass f durch den Wert c nach a **stetig fortsetzbar** ist.

Bemerkung 2.3. Wir haben die Grenzwerte von Funktionen bzw. die Stetigkeit offensichtlich genauso wie in den Grundlagen der Mathematik definiert – wahlweise wie im eindimensionalen Fall mit Grundkörper \mathbb{C} oder wie im zweidimensionalen Fall mit Grundkörper \mathbb{R} und der euklidischen Norm. Daher gelten natürlich auch die uns bereits bekannten Kriterien:

- (a) (**Folgenkriterium** für Grenzwerte von Funktionen bzw. für Stetigkeit) Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und einen Punkt $a \in \overline{D}$ gilt genau dann $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c$, wenn für jede Folge $(z_n)_n$ in D mit $z_n \rightarrow a$ auch $f(z_n) \rightarrow c$ gilt. Dementsprechend ist f genau dann stetig in $a \in D$, wenn für jede Folge $(z_n)_n$ mit $z_n \rightarrow a$ auch $f(z_n) \rightarrow f(a)$ gilt [G2, Satz 8.11].
- (b) Ein Grenzwert bzw. die Stetigkeit kann im Zielraum komponentenweise überprüft werden: Schreiben wir eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ z. B. als $f(z) = u(z) + i v(z)$ mit $u = \operatorname{Re} f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $v = \operatorname{Im} f: D \rightarrow \mathbb{R}$, so ist f in einem Punkt $a \in D$ genau dann stetig, wenn u und v es sind [G2, Lemma 24.7].

Beispiel 2.4.

- (a) Die komplexe Konjugation $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist nach Bemerkung 2.3 (b) in jedem Punkt stetig, da die beiden Komponentenfunktionen $\operatorname{Re} f(z) = x$ und $\operatorname{Im} f(z) = -y$ (mit $z = x + iy$) natürlich stetig sind.
- (b) Genauso ist die komplexe Exponentialfunktion

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

überall stetig, da ihre Komponentenfunktionen $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ und $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$ es sind.

- (c) Wir wissen ebenfalls bereits, dass Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Verkettungen stetiger Funktionen wieder stetig sind [G2, Satz 8.13 und 8.15] – dies zeigt man über \mathbb{C} genauso wie über \mathbb{R} . Insbesondere sind damit nach (a) also alle Polynome oder rationalen Funktionen in z und \bar{z} stetig.

Auch die Differenzierbarkeit wird zunächst formal genauso definiert wie für Funktionen in einer reellen Variablen, also über die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten. Um sicherzugehen, dass wir uns dem betrachteten Punkt von allen Seiten beliebig nähern können, werden wir dabei der Einfachheit halber voraussetzen, dass die Definitionsmenge D der betrachteten Funktionen offen ist, also um jeden ihrer Punkte $a \in M$ noch eine kleine Kreisscheibe $U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$ enthält.

Definition 2.5 (Komplexe Differenzierbarkeit und holomorphe Funktionen). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und $a \in D$. Dann heißt f **komplex differenzierbar** in a , wenn der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{z \in D \setminus \{a\} \\ z \rightarrow a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. Diese Zahl heißt dann auch die **Ableitung** von f in a . Ist f in jedem Punkt von D komplex differenzierbar, so heißt f auf D **holomorph**.

Beispiel 2.6.

- (a) Die Identität $f(z) = z$ ist auf \mathbb{C} holomorph mit Ableitung $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{z-a} = 1$ für alle $a \in \mathbb{C}$.
- (b) Die komplexe Konjugationsabbildung $f(z) = \bar{z}$ ist *in keinem Punkt komplex differenzierbar*: Um dies zu beweisen, zeigen wir mit Hilfe des Folgenkriteriums aus Bemerkung 2.3 (a), dass der Grenzwert aus Definition 2.5 nicht existiert.

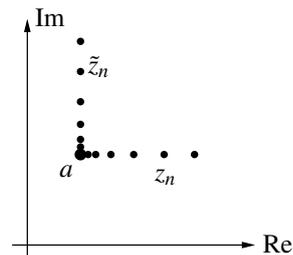
Dazu sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir betrachten zunächst die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ mit $z_n = a + \frac{1}{n}$, die „von rechts kommend“ gegen a konvergiert. In diesem Fall ergibt sich für den Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{a} + \frac{1}{n} - \bar{a}}{a + \frac{1}{n} - a} = 1.$$

Führen wir die gleiche Rechnung jedoch für die „von oben“ gegen a konvergierende Folge $\tilde{z}_n = a + \frac{i}{n}$ durch, so erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\tilde{z}_n) - f(a)}{\tilde{z}_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{a} - \frac{i}{n} - \bar{a}}{a + \frac{i}{n} - a} = -1,$$

also ein anderes Resultat. Nach dem Folgenkriterium existiert der Grenzwert aus Definition 2.5 also nicht, d. h. f ist in a nicht komplex differenzierbar.



Bemerkung 2.7. Das Resultat aus Beispiel 2.6 (b) ist auf den ersten Blick sicher sehr überraschend, weil die Funktion $f(z) = \bar{z}$, also in reellen Koordinaten $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, ja doch sehr „harmlos“ aussieht und ihr Funktionsgraph (wenn man ihn in $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ zeichnen könnte) sicherlich keinerlei „Knicke“ hätte. In der Tat ist f als Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 natürlich auch reell (total) differenzierbar, wie wir aus den Grundlagen der Mathematik wissen. Wir sehen also schon, dass *die komplexe Differenzierbarkeit einer Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht dasselbe ist wie die reelle Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Dieser Unterschied zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit ist absolut fundamental – in der Tat gäbe es die Funktionentheorie ohne ihn nicht. Woran liegt dieser Unterschied anschaulich? Das Problem in Beispiel 2.6 (b) rührte daher, dass wir uns dem Punkt a aus *verschiedenen Richtungen* genähert haben und für diese Richtungen jeweils den Grenzwert des Differenzenquotienten, d. h. die Änderung von f in dieser Richtung, berechnet haben. Wir haben hier also ganz entscheidend den zweidimensionalen Charakter der komplexen Zahlenebene ausgenutzt. Für die *reelle* Differenzierbarkeit ist es in Ordnung, wenn die Änderungen von f in die beiden Koordinatenrichtungen

voneinander unabhängig sind, d. h. wenn die partiellen Ableitungen von f nach x und y nicht miteinander zusammenhängen: In unserem Beispiel 2.6 (b) ändert sich f entlang der reellen Achse proportional zu z , entlang der imaginären Achse jedoch proportional zu $-z$. Bei der komplexen Differenzierbarkeit hingegen muss der Grenzwert des Differenzenquotienten immer derselbe sein – die Ableitung ist hier nur eine einzige Zahl, die die Änderung von f in jeder Richtung angeben muss. Wenn die Änderungsraten von f in den verschiedenen Richtungen nicht dieselben sind, dann ist f dort nicht komplex differenzierbar.

Wie können wir diesen Sachverhalt nun mathematisch exakt ausdrücken? Dazu erinnern wir uns daran, dass Differenzierbarkeit nichts weiter als *lineare Approximierbarkeit* bedeutet. Das Problem besteht daher einfach darin, dass eine *reell lineare Abbildung* von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 nicht das gleiche ist wie eine *komplex lineare Abbildung* von \mathbb{C} nach \mathbb{C} . Dafür ist in der Tat die gerade betrachtete komplexe Konjugationsabbildung wiederum ein Beispiel: Natürlich ist

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine reell lineare Abbildung, aber $f(z) = \bar{z}$ ist nicht komplex linear, denn für allgemeine $\lambda, z \in \mathbb{C}$ ist

$$f(\lambda z) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda} \bar{z} = \bar{\lambda} f(z) \neq \lambda f(z).$$

Den genauen Unterschied zwischen reell und komplex linearen Abbildungen beschreibt das folgende Lemma.

01

Lemma 2.8. Für eine Abbildung $f: \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind äquivalent:

- (a) Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = wz$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (d. h. f ist eine komplex lineare Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C}).
- (b) Es gibt eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

mit $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ (d. h. f ist eine reell lineare Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2), und es gilt $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{2,1} = -a_{1,2}$

In diesem Fall hängen die Konstante w aus (a) und die Einträge der Matrix A aus (b) über die Beziehung $w = a_{1,1} + ia_{2,1}$ miteinander zusammen.

Beweis. Mit $w = u + iv$ für $u, v \in \mathbb{R}$ ist (a) äquivalent zu

$$f(x + iy) = (u + iv)(x + iy) = ux - vy + i(vx + uy),$$

und damit, im Start- und Zielraum als Vektoren in \mathbb{R}^2 geschrieben, zu

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dies ist aber offensichtlich genau die Aussage (b), mit $a_{1,1} = u$ und $a_{2,1} = v$, und zeigt auch bereits die Zusatzaussage $w = u + iv = a_{1,1} + ia_{2,1}$. \square

Wir übertragen diese Aussage über lineare Abbildungen nun auf die linearen Approximationen – also die Ableitungen – beliebiger Funktionen. Dabei wird die komplexe Konstante w aus Lemma 2.8 zur komplexen Ableitung und die reelle Matrix A zur reellen Ableitung, so dass sich das folgende einfache Kriterium zur Überprüfung der komplexen Differenzierbarkeit ergibt:

Satz 2.9. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung und $z_0 \in D$. Wir bezeichnen den Real- bzw. Imaginärteil von f mit $u(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$ und $v(x, y) = \text{Im } f(x + iy)$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist komplex differenzierbar in z_0 .

(b) f ist reell (total) differenzierbar in z_0 , und für die partiellen Ableitungen in diesem Punkt gelten die **Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung von f in z_0 gegeben durch $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$.

Beweis. Nach Definition ist f im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann reell differenzierbar, wenn es eine Matrix $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und eine Funktion $r: D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + A \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0 \quad (*)$$

[G2, Definition 25.3]. Wir wissen aus den Grundlagen der Mathematik auch bereits, dass hierbei für A nur die Jacobi-Matrix

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(z_0)$$

von f in z_0 in Frage kommt [G2, Folgerung 25.12]. Damit ist die Aussage (b) des Satzes äquivalent zur reellen Differenzierbarkeit (*) zusammen mit den Gleichungen $a_{1,1} = a_{2,2}$ und $a_{2,1} = -a_{1,2}$ für die Einträge der Matrix A . Nach Lemma 2.8 ist dies nun wiederum äquivalent zur Existenz einer komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ und einer Funktion $r: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + r(z) \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{|z - z_0|} = 0,$$

was nach [G2, Lemma 25.1] exakt die Bedingung (a) der komplexen Differenzierbarkeit von f in z_0 ist.

Die Formel $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ ergibt sich sofort aus dem Zusatz von Lemma 2.8. \square

Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9 geben uns also ein einfaches Kriterium, um zu berechnen, ob bzw. wo eine gegebene Funktion komplex differenzierbar ist:

Beispiel 2.10.

(a) Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}$ noch einmal die komplexe Konjugationsabbildung aus Beispiel 2.6 (b). Mit der Notation aus Satz 2.9 ist dann

$$u(x, y) = \text{Re } f(x + iy) = x \quad \text{und} \quad v(x, y) = \text{Im } f(x + iy) = -y.$$

Damit sind u und v (und damit auch f) reell differenzierbar. Die Funktionen erfüllen jedoch nirgends die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen, denn es ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

in jedem Punkt von \mathbb{C} . Nach Satz 2.9 ist f also nirgends komplex differenzierbar – was wir bereits in Beispiel 2.6 (b) durch eine aufwendigere Rechnung gesehen hatten.

(b) Wir behaupten, dass die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ überall komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = e^z$ ist. In der Tat sind die beiden Komponentenfunktionen hier wie in Beispiel 2.4 (b)

$$u(x, y) = \text{Re } e^{x+iy} = e^x \cdot \cos y \quad \text{und} \quad v(x, y) = \text{Im } e^{x+iy} = e^x \cdot \sin y.$$

Natürlich sind u und v , und damit auch f , reell differenzierbar. Außerdem erfüllen sie die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cdot \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin y = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

in jedem Punkt. Also ist f nach Satz 2.9 überall komplex differenzierbar mit Ableitung

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Die komplexe Ableitung erfüllt die üblichen Rechenregeln für die vier Grundrechenarten sowie die Verkettung von Funktionen:

Satz 2.11 (Rechenregeln für komplexe Ableitungen).

- (a) Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die in einem Punkt $a \in D$ komplex differenzierbar sind. Dann gilt:
- $f \pm g$ ist ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $(f \pm g)'(a) = (f' \pm g')(a)$.
 - fg ist ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = (f'g + fg')(a)$.
 - Ist $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ ebenfalls komplex differenzierbar in a mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(a)$.
- (b) Es seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D' \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen auf offenen Teilmengen von \mathbb{C} mit $f(D) \subset D'$. Ferner seien f komplex differenzierbar in a und g komplex differenzierbar in $f(a)$. Dann ist auch $g \circ f$ komplex differenzierbar in a mit $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Beweis. Siehe [G2, Satz 10.8 und 10.10]; der Beweis ist für \mathbb{C} wörtlich derselbe wie für \mathbb{R} . □

Beispiel 2.12. Die komplexe Sinusfunktion $f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ aus Bemerkung 1.9 (c) ist nach Satz 2.11 wie erwartet komplex differenzierbar mit

$$f'(z) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z$$

da wir die Exponentialfunktion in Beispiel 2.10 (b) bereits als differenzierbar mit Ableitung e^z erkannt haben. Genauso folgt natürlich auch $\cos'(z) = -\sin z$.

Aufgabe 2.13 (Ableitung der Umkehrfunktion). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $a \in D$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$.

Zeige, dass es dann offene Umgebungen $U \subset D$ von a sowie $V \subset \mathbb{C}$ von $f(a)$ gibt, so dass die Einschränkung $f: U \rightarrow V$ bijektiv und ihre demzufolge existierende Umkehrfunktion $f^{-1}: V \rightarrow U$ ebenfalls holomorph mit Ableitung $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ ist.

(Hinweis: Der Satz über lokale Umkehrfunktionen aus den Grundlagen der Mathematik [G2, Satz 27.6] ist hier sicher nützlich. Ihr dürft ohne Beweis verwenden, dass die Ableitung $f': D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist – wir werden in Folgerung 8.1 „(a) \Rightarrow (b)“ noch sehen, dass dies für holomorphe Funktionen immer der Fall ist.)

Bemerkung 2.14. Mit Hilfe der Regeln von Satz 2.11 wissen wir also nun von vielen „Standardfunktionen“, dass sie komplex differenzierbar sind, und können ihre Ableitungen „genau wie im Reellen“ berechnen: alle Polynome in z , die Exponential- und Winkelfunktionen, sowie gemäß dem Satz erlaubte Kombinationen davon. Nur die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ aus Beispiel 2.6 (b) macht Probleme und führt zu nicht komplex differenzierbaren Abbildungen, wenn sie in irgendeiner Form in der betrachteten Funktion f enthalten ist.

Diese Idee kann man in der Tat ausbauen und zu einer alternativen Methode für die Bestimmung der komplexen Differenzierbarkeit machen, die oft einfacher ist als das explizite Aufspalten in Real- und Imaginärteil mit anschließendem Nachprüfen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Der Grundgedanke dieses sogenannten **Wirtinger-Kalküls** ist, die gegebene Funktion nicht in Abhängigkeit von x und y , sondern stattdessen in Abhängigkeit von z und \bar{z} auszudrücken. Wenn wir eine solche „Variablentransformation“ durchführen könnten, sollte die Funktion mit obiger Idee genau dann komplex differenzierbar sein, wenn sie nur von z und nicht von \bar{z} abhängt.

Natürlich sind z und \bar{z} nicht wirklich unabhängige Variablen, denn die eine Zahl ist ja immer die komplex konjugierte der anderen. Wenn wir aber dennoch für einen Moment annehmen, dass wir eine Variablentransformation von x und y nach z und \bar{z} machen könnten, würde man aufgrund der Relationen $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ (siehe Lemma 1.4 (a)) mit Hilfe der (zweidimensionalen) Kettenregel [G2, Satz 25.29] für die Funktion

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y)$$

die Formel

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

für „die Ableitungen nach z und \bar{z} “ erwarten. Wir benutzen diese „Pseudo-Rechnung“ nun einfach, um die Größen $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ zu definieren:

Definition 2.15. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine reell differenzierbare Funktion mit Komponentenfunktionen $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ und $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Dann setzen wir wie erwartet

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

und definieren die **Wirtinger-Ableitungen** von f durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Das Schöne an diesen Wirtinger-Ableitungen ist nun, dass sie wirklich alle Rechenregeln erfüllen, die man erwarten würde, wenn man f als Funktion von zwei unabhängigen Variablen z und \bar{z} auffassen könnte:

Satz 2.16 (Rechenregeln für Wirtinger-Ableitungen). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in D$. Ferner seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei reell differenzierbare Funktionen.*

- (a) *Die Funktion f ist genau dann komplex differenzierbar in a , wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. In diesem Fall ist dann $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.*
- (b) *Es ist $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1$ und $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ (d. h. „ z und \bar{z} verhalten sich wie unabhängige Variablen“).*
- (c) *Die Rechenregeln für Ableitungen von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten gelten für die Wirtinger-Ableitungen so, als ob z und \bar{z} unabhängige Variablen wären, d. h. es gilt*

- $\frac{\partial(f \pm g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \pm \frac{\partial g}{\partial z}$;
- $\frac{\partial(fg)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}$;
- $\frac{\partial(f/g)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$ an allen Punkten $a \in D$ mit $g(a) \neq 0$;

und analog für $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Beweis. Mit Definition 2.15 gilt am Punkt a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right). \quad (2)$$

Nach Satz 2.9 ist f nun genau dann in a komplex differenzierbar, wenn dort $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ gelten – was nach (2) äquivalent zu $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ist. In diesem Fall ergibt die Formel $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ aus Satz 2.9 mit (1) außerdem $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$. Dies zeigt Teil (a).

Die Aussage (b) folgt einfach durch Einsetzen von $f(z) = z$ bzw. $f(z) = \bar{z}$ in (1) und (2): Für $f(z) = z$ ist z. B. $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = y$, und damit nach (1)

$$\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + i \cdot 0) = 1.$$

Die anderen drei Gleichungen ergeben sich genauso.

Die Behauptungen aus (c) schließlich zeigt man durch einfaches Nachrechnen, indem man jeweils auf beiden Seiten die Ausdrücke (1) bzw. (2) einsetzt und die entsprechenden Rechenregeln für die Ableitungen von u und v nach x und y benutzt. \square

Beispiel 2.17. Nach Satz 2.16 können wir von einer Abbildung, die (durch „erlaubte Zusammensetzungen“) als Funktion von z und \bar{z} geschrieben ist, nun einfach die komplexe Differenzierbarkeit untersuchen bzw. im Fall der Differenzierbarkeit ihre Ableitung berechnen, indem wir z und \bar{z} formal als unabhängige Variable auffassen und die Ableitungen der Funktion nach z und \bar{z} berechnen:

- (a) Von der Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ sehen wir sofort, dass sie nirgends komplex differenzierbar ist, denn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\bar{z}^2} \neq 0$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (b) Polynome in z und \bar{z} sind genau dann holomorph auf ganz \mathbb{C} , wenn in ihnen \bar{z} nicht vorkommt (denn genau dann ist ihre Wirtinger-Ableitung nach \bar{z} identisch Null).

Aufgabe 2.18.

- (a) Untersuche, ob die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

als reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. als komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

- (b) In welchen Punkten ist die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (2z + \bar{z}) \cdot |z|^2$ komplex differenzierbar? Berechne in diesen Punkten auch die Ableitung!

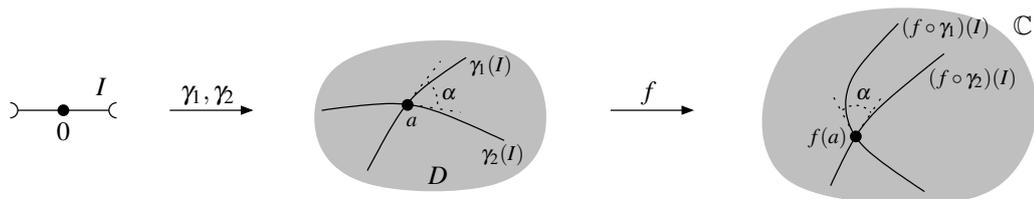
Aufgabe 2.19. Es sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ eine offene Kreisscheibe (mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{C}$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$). Man zeige für jede holomorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$:

- (a) Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.
- (b) Ist $f(D) \subset \mathbb{R}$, so ist f konstant.
- (c) Ist $|f|$ konstant, so ist f konstant.

Aufgabe 2.20. Können die folgenden Funktionen $u: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ der Realteil einer holomorphen Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sein? Falls ja, bestimme man alle solchen holomorphen Funktionen f .

- (a) $u(x + iy) = x^2 - y^2$
- (b) $u(x + iy) = x^2 + y^2$

Aufgabe 2.21 (Winkeltreue holomorpher Funktionen). Wir betrachten eine holomorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$. Ferner seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma_1, \gamma_2: I \rightarrow D$ zwei stetig differenzierbare Abbildungen, also Wege in D , die sich wie im folgenden Bild dargestellt in einem Punkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$, $\gamma_1'(0) \neq 0$ und $\gamma_2'(0) \neq 0$ schneiden.



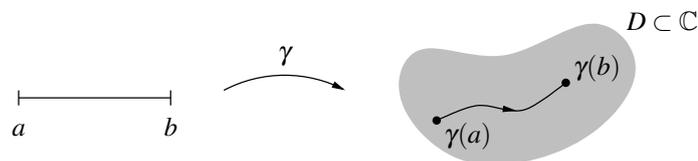
- (a) Zeige, dass der Schnittwinkel α zwischen γ_1 und γ_2 in diesem Punkt dann mit dem Schnittwinkel zwischen den Bildkurven $f \circ \gamma_1$ und $f \circ \gamma_2$ übereinstimmt, also dass holomorphe Funktionen in diesem Sinne *winkelerhaltend* sind.

- (b) Für die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ berechne und skizziere man die Bilder der achsenparallelen Geraden $\{a + it : t \in \mathbb{R}\}$ bzw. $\{ib + t : t \in \mathbb{R}\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ unter f , und überprüfe explizit, dass diese Bildkurven gemäß (a) wirklich überall senkrecht aufeinander stehen.

3. Wegintegrale

Nach der Differentiation wollen wir uns nun mit der Integration beschäftigen. Auch hier ist die Funktionentheorie wieder eine interessante Mischung aus ein- und zweidimensionaler Theorie: Einerseits haben wir nur eine komplexe Variable und damit eindimensionale Integrale, andererseits liegen diese eindimensionalen Integrale aber in der (reell zweidimensionalen) Ebene. Wir werden also über eindimensionale Objekte in der Ebene, also über „Wege“ integrieren müssen:

Definition 3.1 (Wege). Es sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein **Weg** in D ist eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ von einem kompakten reellen Intervall nach D .



Ein solcher Weg heißt ...

- (a) **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- (b) **stückweise stetig differenzierbar**, wenn es eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ für alle $k = 1, \dots, n$ stetig differenzierbar sind. In diesem Fall ist die Ableitung $\gamma': [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dann also eine stückweise stetige Funktion (die an den Zwischenstellen t_1, \dots, t_{n-1} jedoch möglicherweise nicht definiert ist).

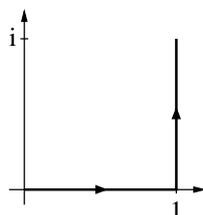
Beispiel 3.2.

- (a) Der Weg

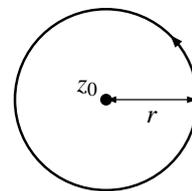
$$\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + i(t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

ist stückweise stetig differenzierbar mit Ableitung 1 für $t < 1$ und i für $t > 1$; er läuft entlang zweier Geradenstücke vom Nullpunkt über 1 nach $1 + i$.

- (b) Der Weg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}$ (für festes $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$) ist stetig differenzierbar und geschlossen; er läuft einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang einer Kreislinie vom Radius r um den Punkt z_0 .



(a)



(b)

Wir wollen jetzt Integrale komplexer Funktionen über derartige Wege definieren. Am einfachsten ist dies für stückweise stetig differenzierbare Wege – es ist zwar möglich, für manche Funktionen auch Integrale über beliebige Wege zu definieren, dies ist aber mit sehr viel mehr Aufwand verbunden und soll daher hier nicht behandelt werden, zumal ohnehin nahezu alle in der Praxis auftretenden Wege stückweise stetig differenzierbar sind. Wir vereinbaren also:

Im Folgenden seien Wege immer als stückweise stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Definition 3.3 (Integrale). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

- (a) Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Weg, so definieren wir die **Länge** von γ als

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

- (b) Für eine stückweise stetige *komplexwertige* Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem *reellen* Intervall $[a, b]$ definieren wir das Integral von g über $[a, b]$ einfach durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil als

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b (\operatorname{Re} g(t)) dt + i \cdot \int_a^b (\operatorname{Im} g(t)) dt \in \mathbb{C},$$

so dass es also insbesondere \mathbb{C} -linear in der zu integrierenden Funktion wird. Viele Aussagen aus der eindimensionalen Analysis wie z. B. der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder die Substitutionsregel übertragen sich durch Aufteilung in Real- und Imaginärteil auf diesen Fall einer Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

- (c) Sind $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ein Weg in D , so ist das **Wegintegral** (oder **Kurvenintegral**) von f entlang γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \in \mathbb{C}$$

(wobei das Integral auf der rechten Seite im Sinne von (b) zu verstehen ist).

Beachte, dass diese Integrale (im Riemannsches Sinne) existieren, da alle Integranden nach Voraussetzung stückweise stetige Funktionen sind [G2, Beispiel 12.16].

Bemerkung 3.4. Man kann zeigen, dass die oben definierte Länge $L(\gamma)$ eines Weges genau das ist, was man anschaulich unter der Länge des Weges γ verstehen würde (nämlich die Gesamtlänge, die man erhält, wenn man γ beliebig genau durch Geradenstücke approximiert). Da auf dem Weg ja $z = \gamma(t)$ gilt, kann man sich dies anschaulich mit Hilfe der „Pseudo-Rechnung“

$$L(\gamma) = \int |\gamma'(t)| dt = \int \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \int |dz|$$

merken, denn $|dz|$ ist ja gerade „die Länge eines unendlich kleinen Geradenstücks dz “. Mit einer ähnlichen „Pseudo-Rechnung“ kann man auch die Formel für das Wegintegral begründen:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int f(z) \frac{dz}{dt} dt = \int f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Beispiel 3.5.

- (a) Es sei $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$ eine Kreislinie um z_0 mit Radius r wie in Beispiel 3.2
 (b). Dann ist die Länge von γ (wie elementargeometrisch erwartet)

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Betrachten wir zusätzlich noch die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$, so ist das Wegintegral von f über γ gleich

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Derartige Wegintegrale haben – im Gegensatz zu reellen Integralen – *keine anschauliche Bedeutung* als Fläche oder Volumen irgendeiner Menge unterhalb des Graphen einer Funktion. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch sehen, dass sie ein überaus nützliches Hilfsmittel in der Funktionentheorie sind. Man kann sie sich außerdem in folgendem Sinne als Verallgemeinerung des reellen Integrals vorstellen:

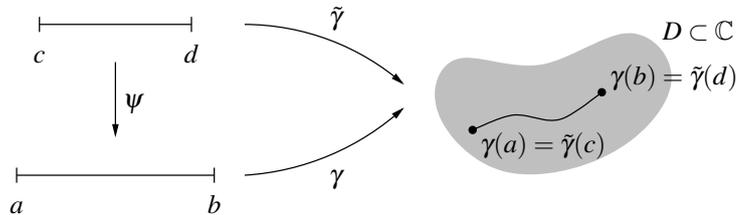
- (b) Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Weg, der entlang der reellen Achse verläuft; ferner seien $c = \gamma(a)$ und $d = \gamma(b)$ der Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges. Ist dann $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion, so folgt aus der Substitutionsregel für reelle Integrale [G2, Satz 12.31] sofort

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_c^d f(s) ds \quad \text{mit } s = \gamma(t),$$

d. h. wir erhalten einfach das normale reelle Integral über f vom Startpunkt bis zum Endpunkt des Weges.

Beachte, dass es in diesem Fall für das Integral keine Rolle spielt, wie der Weg γ (also die Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) genau aussieht, solange er nur entlang der reellen Achse von c nach d läuft. Eine ähnliche Aussage gilt in der Tat für beliebige Wegintegrale:

Bemerkung 3.6 (Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ein Weg in D . Ist nun $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine monoton wachsende und stetig differenzierbare Abbildung mit $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$, so stellen die Wege $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi: [c, d] \rightarrow D$ wie in der folgenden Skizze dieselbe Bildkurve dar, die i. A. lediglich mit unterschiedlichen „Geschwindigkeiten“ durchlaufen wird. Man nennt $\tilde{\gamma}$ in diesem Fall eine **Umparametrisierung** von γ .



Ist nun $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so gilt für die Wegintegrale von f entlang γ bzw. $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t))) (\gamma \circ \psi)'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\psi(t))) \gamma'(\psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \quad (\text{mit der Substitution } s = \psi(t)) \\ &= \int_{\gamma} f(z) dz, \end{aligned}$$

d. h. *Wegintegrale ändern sich nicht bei Umparametrisierungen*. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für die Länge des Weges: Es gilt $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$.

Beachte jedoch, dass es beim Wegintegral auf die Orientierung des Weges ankommt: Durchlaufen wir die gleiche Bildkurve in umgekehrter Richtung (ist oben also $\psi(c) = b$ und $\psi(d) = a$), so erhalten wir genauso

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz,$$

da bei der Substitution oben die Integrationsgrenzen vertauscht werden müssen.

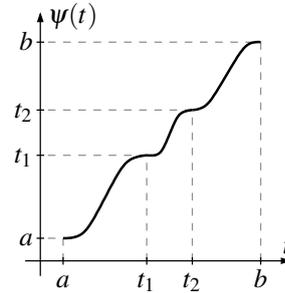
Aufgrund der Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen werden wir Wege in Zukunft oft nur noch durch ihre (orientierten) Bildkurven in \mathbb{C} angeben und auch so zeichnen. Meistens werden unsere Wege Kreislinien (oder „ähnliche geformte“) Kurven sein; für diesen Fall vereinbaren wir, dass wir die Orientierung entgegen dem Uhrzeigersinn wählen, wenn nichts anderes angegeben wird. Für das Wegintegral aus Beispiel 3.5 (a) könnten wir also z. B. auch

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz \quad \text{statt} \quad \int_{\gamma} f(z) dz$$

schreiben.

Bemerkung 3.7 (Umparametrisierungen in stetig differenzierbare Wege). Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine stetig differenzierbare Umparametrisierung: Haben wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, so dass γ auf $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar ist für alle $k = 1, \dots, n$, so wählen wir wie im Bild rechts eine beliebige monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion $\psi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ mit $\psi(t_k) = t_k$ und $\psi'(t_k) = 0$ für alle $k = 0, \dots, n$. Für den umparametrisierten Weg $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$ gilt dann auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$

$$(\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]})'(t_k) = (\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})'(t_k) \cdot \psi'(t_k) = 0$$



und analog $(\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]})'(t_{k-1}) = 0$. Die einzelnen Wegstücke $\tilde{\gamma}|_{[t_{k-1}, t_k]}$ lassen sich damit zu einem überall stetig differenzierbaren Weg $\tilde{\gamma}$ (mit Ableitung 0 an den Punkten t_0, \dots, t_n) zusammensetzen. Anschaulich entsteht $\tilde{\gamma}$ aus γ , indem man vor den Knickstellen von γ auf Geschwindigkeit Null abbremst, um danach in einer anderen Richtung wieder mit langsam ansteigender Geschwindigkeit zu starten.

Aufgrund dieses Ergebnisses werden wir uns bei der Untersuchung von Wegintegralen in Zukunft oft auf stetig differenzierbare Wege beschränken.

Bemerkung 3.8. Wir haben gerade gesehen, dass sich Wegintegrale nicht bei Umparametrisierungen des Weges ändern. Eine nächste naheliegende Frage ist, ob derartige Integrale vielleicht sogar nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen. Im Allgemeinen kann dies jedoch nicht der Fall sein: Betrachten wir nämlich noch einmal den geschlossenen Kreisweg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ mit dem Integral $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ aus Beispiel 3.5 (a), so hat dieser Weg natürlich den gleichen Anfangs- und Endpunkt wie der konstante Weg $\tilde{\gamma}(t) \equiv r$; jedoch ist über diesen konstanten Weg natürlich wegen $\tilde{\gamma}'(t) = 0$ jedes Wegintegral gleich Null.

Dennoch werden wir sehen, dass Wegintegrale „sehr oft“ nur vom Anfangs- und Endpunkt des betrachteten Weges abhängen. So besitzen viele Funktionen z. B. eine Stammfunktion, mit der man wie im Reellen Integrale berechnen kann, indem man einfach die Differenz ihrer Werte am Anfangs- und Endpunkt nimmt:

Definition 3.9 (Stammfunktionen). Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f , wenn F holomorph auf D ist mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

Lemma 3.10 (Integralberechnung mit Stammfunktionen). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, und $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ein Weg in D . Hat f eine Stammfunktion F auf D , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Insbesondere hängt das Wegintegral dann also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, aber nicht vom Weg selbst ab. Ist der Weg γ geschlossen, so ist damit notwendigerweise $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Beweis. Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = [F \circ \gamma]_a^b \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 3.11.

- (a) Nach Bemerkung 3.8 hängen Wegintegrale über die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ im Allgemeinen *nicht* nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Also besitzt f nach Lemma 3.10 keine Stammfunktion.

Wir sehen hier also schon, dass die Existenz einer Stammfunktion im Komplexen eine viel stärkere Bedingung als im Reellen ist (wo ja z. B. jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt [G2, Folgerung 12.24 (a)]). Wir werden später noch genauer untersuchen, unter welchen Bedingungen eine gegebene Funktion eine Stammfunktion besitzt (siehe Satz 6.1).

- (b) Da die Regeln zum Differenzieren komplexer Funktionen nach Satz 2.11 jedoch formal genauso wie im Reellen aussehen, können wir in vielen Fällen eine Stammfunktion einer komplexen Funktion mit den gleichen Regeln wie im Reellen finden. So ist z. B. für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ wie gewohnt $F(z) = \frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von $f(z) = (z-z_0)^n$. Nach Lemma 3.10 ist für $n \neq -1$ also z. B. $\int_{\gamma} (z-z_0)^n dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ . Fassen wir dies mit Beispiel 3.5 (a) zusammen, so erhalten wir für $n \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Wie wir in dieser Vorlesung noch sehen werden, ist dieses einfache Ergebnis über die Wegintegrale der Potenzen von z (entlang von Kreislinien um 0) ein zentrales und sehr wichtiges Resultat der Funktionentheorie, das immer wieder auftritt – insbesondere beim Residuensatz 11.14.

Aufgabe 3.12.

- (a) Berechne die Wegintegrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z+1)^2} dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$$

entlang einer geraden Strecke γ von 1 nach i .

- (b) Untersuche, ob die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \bar{z}^2$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 3.13. Wir haben in Beispiel 3.11 (a) gesehen, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzen kann. In dieser Aufgabe wollen wir nun zeigen, dass wir jedoch eine Stammfunktion finden können, wenn wir den Definitionsbereich der Funktion verkleinern.

Es sei dazu $D := \{z = re^{i\varphi} : r \in \mathbb{R}_{>0}, -\pi < \varphi < \pi\} \subset \mathbb{C}$ das Komplement der negativen reellen Achse. Man zeige:

- (a) Die Abbildung $\log: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\log z := \log r + i\varphi$$

ist eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf D . Wir nennen $\log z$ den **komplexen Logarithmus** von z .

- (b) Es seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig. Dann gilt für jeden Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ von z_1 nach z_2

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log z_2 - \log z_1 + 2\pi i k \quad (*)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$. (Hinweis: Eine Möglichkeit hierfür besteht darin zu zeigen, dass die Funktion

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \frac{\gamma(a)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt\right)$$

konstant ist.)

- (c) Umgekehrt gibt es für alle $z_1, z_2 \in D$ und $k \in \mathbb{Z}$ einen Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von z_1 nach z_2 , so dass (*) gilt.

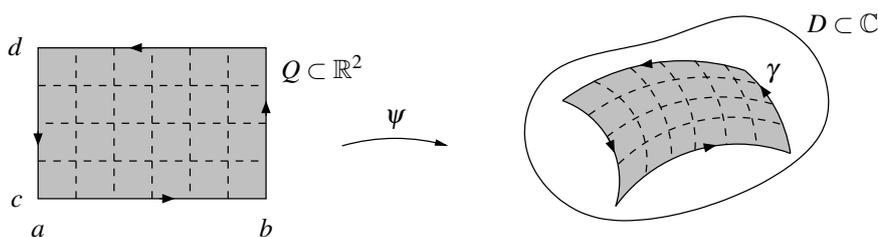
4. Der Cauchysche Integralsatz

Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Hat f in D eine Stammfunktion, so haben wir im letzten Kapitel gesehen, dass Kurvenintegrale über f in D nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängen bzw. dass Integrale über f entlang geschlossener Wege in D gleich Null sind. Wir konnten jedoch noch kein zufriedenstellendes Kriterium dafür angeben, wann f eine solche Stammfunktion besitzt. Daher wollen wir in diesem und dem nächsten Kapitel ein einfach nachprüfbares hinreichendes Kriterium für diese Wegunabhängigkeit des Integrals beweisen. Dies ist für die Berechnung von Integralen natürlich sehr nützlich, da wir in diesem Fall den gegebenen Integrationsweg durch einen anderen Weg mit gleichem Anfangs- und Endpunkt ersetzen können, für den die Berechnung unter Umständen einfacher wird.

Der zentrale Satz, den wir hierfür benötigen, ist der sogenannte Cauchysche Integralsatz. Er besagt anschaulich, dass ein Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ entlang eines geschlossenen Weges γ Null ist, wenn f auf der ganzen von γ eingeschlossenen Fläche holomorph ist. Leider ist der Begriff der „von einer geschlossenen Kurve eingeschlossenen Fläche“ – so anschaulich er auch sein mag – mathematisch jedoch nur sehr schwer zu definieren. Wir beschränken uns daher zunächst auf den Fall, in dem γ das Bild des Randes ∂Q eines Quaders Q unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ψ ist (und unter der eingeschlossenen Fläche dann das Bild von Q unter ψ zu verstehen ist). Da Differenzierbarkeit im Mehrdimensionalen in der Regel nur auf *offenen* Definitionsmengen definiert ist, wollen wir dabei unter einer stetig differenzierbaren Abbildung auf dem kompakten Quader Q der Einfachheit halber eine Abbildung auf Q verstehen, die stetig differenzierbar auf eine offene Umgebung von Q fortgesetzt werden kann – dies wird bei uns in der Praxis immer der Fall sein.

Satz 4.1 (Cauchyscher Integralsatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner seien $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader, $\psi: Q \rightarrow D$ eine stetig differenzierbare Abbildung, und $\gamma = \psi(\partial Q)$ das Bild der Randkurve von Q unter ψ . Dann gilt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



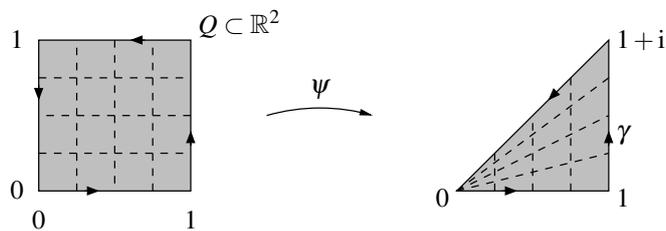
Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir uns seine Aussage etwas genauer anschauen.

Beispiel 4.2. Wir haben oben ja schon erwähnt, dass es im Cauchyschen Integralsatz nicht wirklich darauf ankommt, dass die Bildkurve aus dem Rand eines Quaders entsteht. In der Tat finden sich in der Literatur zahlreiche Versionen des Cauchyschen Integralsatzes für verschiedenste Integrationswege – Dreiecke, Bilder von Dreiecken unter stetigen Abbildungen, Kreislinien und vieles mehr. Ihnen allen ist gemeinsam, dass es sich um Wege handelt, bei denen „die von ihnen eingeschlossene Fläche“ einfach definierbar ist, und dass der Integrand auf dieser gesamten Fläche (und nicht nur auf dem Integrationsweg selbst) als holomorph vorausgesetzt werden muss. Die folgenden Beispiele zeigen, dass unser Satz 4.1 bereits auf „nahezu beliebige“ derartige geschlossene Integrationswege anwendbar ist:

- (a) (Dreiecke) Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \psi(t, s) = t + ist.$$

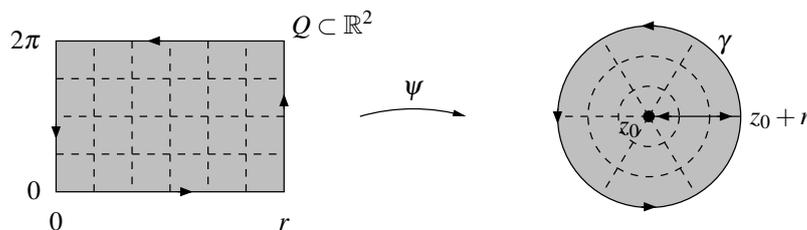
Dann wird die Unterkante des Quaders, also die Punkte (t, s) mit $s = 0$ und $0 \leq t \leq 1$, genau auf das Geradenstück von 0 bis 1 in der komplexen Ebene abgebildet. Genauso wird die rechte Kante auf das Geradenstück von 1 nach $1 + i$ und die obere auf das Geradenstück von $1 + i$ nach 0 abgebildet. Die linke Kante des Quaders, also die Punkte mit $t = 0$, werden von ψ alle auf 0 abgebildet, so dass diese Kante im Bild verschwindet. Insgesamt ist das Bild $\gamma = \psi(\partial Q)$ der Randkurve des Quaders also genau das im Bild unten rechts eingezeichnete Dreieck. Man sieht leicht, dass auch das Innere des Quaders Q genau auf das Innere dieses Dreiecks abgebildet wird.



Natürlich kann man analog auch andere Dreiecke in der komplexen Ebene erzeugen. Wir sehen mit Satz 4.1 also, dass „der Cauchysche Integralsatz auch für Dreiecke gilt“, d. h. dass Wegintegrale über Dreieckswege gleich Null sind, wenn die zu integrierende Funktion auf diesem gesamten Dreieck (also auch im Inneren) holomorph ist.

- (b) (Kreise) Wir betrachten für
- $z_0 \in \mathbb{C}$
- und
- $r \in \mathbb{R}_{>0}$
- die stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi: [0, r] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, (t, s) \mapsto z_0 + t e^{is}.$$

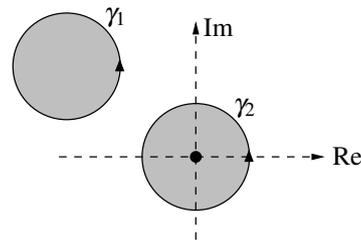


Hier wird (wie im Bild oben) die rechte Kante des Quaders auf die Kreislinie γ um z_0 mit Radius r abgebildet, die linke auf den Punkt z_0 , und die beiden horizontalen Kanten auf die Strecke von z_0 nach $z_0 + r$ in entgegengesetzten Richtungen (so dass sich die entsprechenden Integrale wieder wegheben). Der Cauchysche Integralsatz gilt also auch für Kreislinien: Es ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, wenn der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ komplett in dem Bereich liegt, in dem f holomorph ist.

- (c) Da die Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen wieder stetig differenzierbar ist, sehen wir mit den obigen Beispielen, dass der Cauchysche Integralsatz auch für stetig differenzierbare Bilder von Dreiecken und Kreisen gilt – also für „nahezu beliebige“ Flächen bzw. deren Randkurven.

Beispiel 4.3. Wir betrachten wieder die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$, die nach Satz 2.11 natürlich in ihrem Definitionsbereich $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist. Ferner seien γ_1 und γ_2 die im folgenden Bild rechts unten eingezeichneten Integrationswege.

Nach dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 (bzw. Beispiel 4.2 (b)) ist $\int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$, denn die von γ_1 eingeschlossene Kreisfläche liegt ganz in dem Bereich D , in dem f holomorph ist. Für das Integral $\int_{\gamma_2} f(z) dz$ hingegen sagt der Cauchysche Integralsatz nichts aus, denn hier liegt der Nullpunkt, in dem f ja nicht einmal definiert ist, im Inneren des von γ_2 begrenzten Kreises. In der Tat haben wir in Beispiel 3.5 (a) ja auch gesehen, dass $\int_{\gamma_2} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$ gilt.



Der Cauchysche Integralsatz ist unser erster „echter Satz“ der Funktionentheorie. Er ist absolut zentral für den weiteren Verlauf dieser Vorlesung. Glücklicherweise ist er aber auch nahezu der einzige Satz, bei dem wir wirklich in die reelle Analysis „absteigen“ und relativ komplizierte Abschätzungen vornehmen müssen. Alle weiteren Resultate der Funktionentheorie, die wir in diesem Skript behandeln werden, folgen dann relativ einfach Stück für Stück aus diesem Satz. Dies ist sicherlich auch einer der Hauptgründe dafür, dass die Funktionentheorie insgesamt sehr elegant und aufgeräumt wirkt.

03

Kommen wir nun aber endlich zum Beweis des Cauchyschen Integralsatzes. Wir werden den Beweis dadurch führen, dass wir den Betrag des gegebenen Kurvenintegrals nach oben durch einen Wert abschätzen, den wir letztlich gegen Null laufen lassen können. Für derartige Abschätzungen von Integralen benötigen wir zunächst zwei Lemmata. Das erste besteht aus zwei Resultaten, die wir sicher noch oft zur Abschätzung komplexwertiger Integrale verwenden werden.

Lemma 4.4 (Integralabschätzungen). *Es seien $a \leq b$ zwei reelle Zahlen.*

(a) (**Dreiecksungleichung für Integrale**) Für jede stetige Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

(b) (**Standardabschätzung für Wegintegrale**) Für das Wegintegral einer stetigen Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ über einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|$$

(beachte, dass $|f \circ \gamma|$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig ist und das angegebene Maximum somit existiert [G2, Satz 8.25]).

Beweis.

(a) Wie jede komplexe Zahl können wir das Integral $\int_a^b g(t) dt$ mit Hilfe von Polarkoordinaten als Betrag dieser Zahl multipliziert mit einer komplexen Zahl λ vom Betrag 1 schreiben. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) dt \right| &= \lambda^{-1} \int_a^b g(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda^{-1} g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\lambda^{-1} g(t)) dt && \text{(Definition 3.3 (b))} \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\lambda^{-1} g(t)) dt && \text{(Ausgangsintegral ist reell)} \\ &\leq \int_a^b |\lambda^{-1}| |g(t)| dt && \text{(Re } z \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{C}) \\ &= \int_a^b |g(t)| dt. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\stackrel{(a)}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \max_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)| \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

□

Als zweites brauchen wir für den Beweis des Cauchyschen Integralsatzes 4.1 noch Aussagen darüber, wie sich Längen von Wegen und Abstände von Punkten unter der Abbildung ψ verändern.

Lemma 4.5. *Wie in Satz 4.1 seien $Q = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quader und $\psi: Q \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit Komponentenfunktionen $u = \operatorname{Re} \psi$ und $v = \operatorname{Im} \psi$.*

(a) *Bildet man den Rand des Quaders mit ψ ab, so gilt für die Länge dieses Weges die Abschätzung*

$$L(\psi(\partial Q)) \leq M \cdot L(\partial Q)$$

mit

$$M := \max\{|\psi'(w) \cdot z| : w \in Q, z \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|z\| = 1\},$$

wobei $\psi'(w) \in \operatorname{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $\psi'(w) \cdot z \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ damit als Matrixprodukt zu verstehen ist.

(b) *Für alle $z_0, z \in Q$ gilt*

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| \leq N \cdot |z - z_0|$$

mit

$$N := 2 \max\{\|u'(w)\|, \|v'(w)\| : w \in Q\},$$

wobei $u'(w), v'(w) \in \operatorname{Mat}(1 \times 2, \mathbb{R})$ und deren Norm als euklidische Norm aufzufassen ist.

Beweis. Beachte zunächst, dass die im Lemma angegebenen Maxima M und N als Maxima stetiger Funktionen auf kompakten Mengen existieren.

(a) Wir betrachten zunächst nur den unteren Rand des Quaders, den wir offensichtlich durch $\gamma: [a, b] \rightarrow Q, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ c \end{pmatrix}$ parametrisieren können. Wegen $\|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$ für alle t folgt dann

$$L(\psi(\gamma)) = \int_a^b |(\psi \circ \gamma)'(t)| dt = \int_a^b |\underbrace{\psi'(\gamma(t))}_{=: w \in Q} \cdot \underbrace{\gamma'(t)}_{=: z}| dt \leq \int_a^b M dt = M(b-a) = M \cdot L(\gamma).$$

Genauso ergibt sich dies natürlich auch für die anderen drei Seiten des Quaders. Addieren wir diese vier Ungleichungen auf, so erhalten wir genau die Behauptung.

(b) Nach dem Mittelwertsatz für u [G2, Folgerung 26.17] gibt es einen Punkt w auf der geraden Strecke von z_0 nach z , und damit insbesondere in Q , mit

$$\begin{aligned} |u(z) - u(z_0)| &= |u'(w) \cdot (z - z_0)| \\ &\leq \|u'(w)\| \cdot |z - z_0| \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung [G2, Satz 21.20]}) \\ &\leq \frac{N}{2} \cdot |z - z_0|. \end{aligned}$$

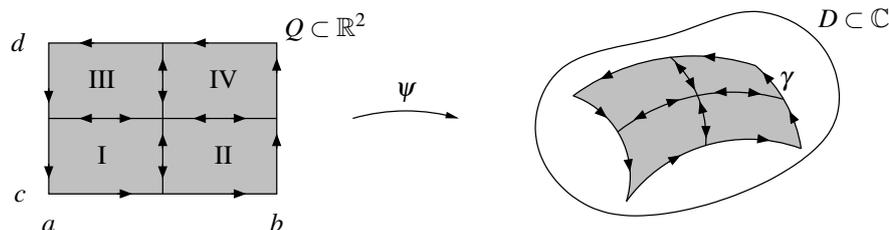
Genauso folgt dies natürlich für v , und damit nach der Dreiecksungleichung

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| \leq |u(z) - u(z_0)| + |i(v(z) - v(z_0))| \leq N \cdot |z - z_0|. \quad \square$$

Bemerkung 4.6. In den Ausdrücken für M und N in Lemma 4.5 wird jeweils ein Maximum über alle Punkte in Q genommen. Daraus ergibt sich, dass diese Zahlen nicht größer werden können, wenn man von Q zu einem Teilquader von Q übergeht. Mit anderen Worten gelten die Ungleichungen aus dem Lemma für alle Teilquader von Q für konstante Werte von M und N . Dies ist alles, was wir im Folgenden benötigen werden – der genaue Ausdruck für diese beiden Zahlen ist für unsere Anwendungen unwichtig.

Mit diesen Ergebnissen können wir nun endlich den eigentlichen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes führen:

Beweis von Satz 4.1. Wir teilen den gegebenen Quader Q in vier gleich große Teilquader auf, die wir mit I, II, III, IV bezeichnen:



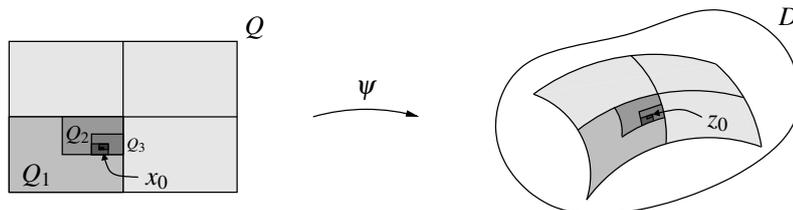
Wie schon in Beispiel 4.2 sieht man sofort, dass sich das Integral von f über den Weg $\gamma = \psi(\partial Q)$ aufteilen lässt in die Summe der vier Wegintegrale

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz + \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz$$

(die Integrale auf den Wegstrecken zwischen den Teilquadern heben sich weg, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden). Damit folgt nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{\psi(\partial I)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial II)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial III)} f(z) dz \right| + \left| \int_{\psi(\partial IV)} f(z) dz \right| \\ &\leq 4 \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_1)} f(z) dz \right|, \end{aligned}$$

wobei $Q_1 \in \{I, II, III, IV\}$ ein Teilquader ist, für den der Betrag des betrachteten Wegintegrals am größten ist. Wir setzen dieses Verfahren nun rekursiv fort und definieren so eine Folge Q_1, Q_2, Q_3, \dots von Quadern, von denen jeder aus dem vorhergehenden durch die obige Prozedur entsteht:



Die obige Abschätzung liefert dann offensichtlich induktiv

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} f(z) dz \right| \quad (1)$$

für alle n .

Beachte, dass die so konstruierte Folge von Quadern in beiden Koordinaten eine Intervallschachtelung definiert, und der Schnitt aller Quader Q_n damit genau ein Punkt x_0 in Q ist. Es sei $z_0 := \psi(x_0)$ wie oben eingezeichnet der zugehörige Bildpunkt unter ψ .

Da z_0 in $\psi(Q)$ liegt, ist f nun nach Voraussetzung in z_0 komplex differenzierbar. (Dies ist übrigens die einzige Stelle des Beweises, an der wir die komplexe Differenzierbarkeit von f verwenden –

und wir sehen in der Tat, dass wir diese Eigenschaft nicht auf dem Integrationsweg γ selbst, sondern *irgendwo in der von γ begrenzten Fläche* benötigen!) Die Funktion f ist in z_0 also linear approximierbar, d. h. es gibt eine (notwendig stetige) Funktion $r: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)}_{(*)} + r(z) \quad \text{für alle } z \in D \quad (2)$$

$$\text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0 \quad (3)$$

[G2, Lemma 25.1]. Hier hat der mit $(*)$ bezeichnete Term offensichtlich eine Stammfunktion (nämlich $zf(z_0) + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$), so dass beliebige geschlossene Wegintegrale über diesen Ausdruck nach Lemma 3.10 verschwinden. Setzen wir (2) also auf der rechten Seite in (1) ein, so erhalten wir für alle n , wobei M und N die (konstanten) Maxima aus Lemma 4.5 für den Gesamtquader Q bezeichnen (siehe Bemerkung 4.6):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &\leq 4^n \cdot \left| \int_{\psi(\partial Q_n)} r(z) dz \right| \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |r(z)| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\ &\leq 4^n \cdot L(\psi(\partial Q_n)) \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} |z - z_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| \\ &\leq 4^n \cdot MN \cdot L(\partial Q_n) \cdot \max_{x \in Q_n} |x - x_0| \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && \text{(Lemma 4.5 (a) und (b))} \\ &\leq 4^n \cdot MN \cdot L(\partial Q_n)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right| && (|x - x_0| \leq L(\partial Q_n) \text{ für } x_0, x \in Q_n) \\ &= MN \cdot L(\partial Q)^2 \cdot \max_{z \in \psi(\partial Q_n)} \left| \frac{r(z)}{z - z_0} \right|. && (L(\partial Q_n) = 2^{-n} \cdot L(\partial Q)) \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck ist $MN \cdot L(\partial Q)^2$ unabhängig von n . Im verbleibenden Maximum hingegen konvergiert das z , an dem jeweils das Maximum angenommen wird, notwendigerweise gegen z_0 . Nach (3) konvergiert das Maximum mit $n \rightarrow \infty$ also gegen Null, womit wie behauptet $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ folgt. \square

Um zu sehen, dass der Cauchysche Integralsatz bereits ein mächtiges Werkzeug der Funktionentheorie ist, wollen wir mit seiner Hilfe nun einen ersten einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra geben – also zeigen, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in \mathbb{C} hat. Wir werden später in dieser Vorlesung noch einige andere Beweise dafür sehen.

Aufgabe 4.7 (Fundamentalsatz der Algebra, 1. Beweis). Es sei f zunächst ein nicht-konstantes reelles Polynom, von dem wir annehmen, dass es keine Nullstelle in \mathbb{C} hätte. Man zeige dann für das Wegintegral

$$I := \int_{|z|=1} \frac{1}{zf\left(z + \frac{1}{z}\right)} dz$$

- (a) mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, dass $I = 0$;
- (b) mit Hilfe der Definition des Wegintegrals, dass $I \neq 0$.

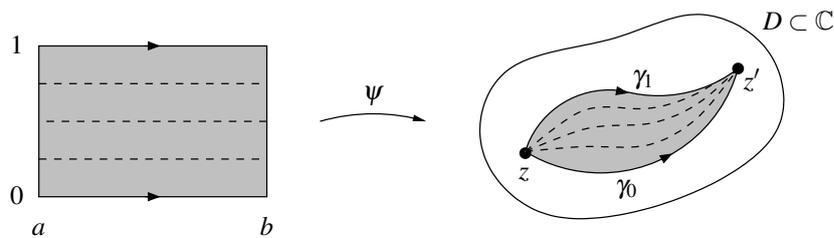
Wie folgt daraus der Fundamentalsatz der Algebra, also dass auch jedes nicht-konstante *komplexe* Polynom eine Nullstelle in \mathbb{C} hat?

5. Homotopie von Wegen

In der Praxis wird der Cauchysche Integralsatz meistens in einer äquivalenten Umformulierung verwendet, die wir nun genauer behandeln wollen. Anschaulich besagt sie, dass *Wegintegrale* $\int_{\gamma} f(z) dz$ ihren Wert nicht ändern, wenn man den Weg γ innerhalb des Bereiches deformiert, in dem f holomorph ist. Um eine solche Aussage mathematisch exakt formulieren zu können, müssen wir natürlich zunächst einmal definieren, was wir unter einer „Deformation eines Weges“ genau verstehen wollen. Der korrekte mathematische Begriff hierfür ist die sogenannte Homotopie. Dieses Konzept stammt eigentlich aus der Topologie und wird normalerweise für lediglich stetige Wege formuliert; wie üblich werden wir uns in dieser Vorlesung aber nur mit *stückweise stetig differenzierbaren* Wegen befassen. Da wir in Bemerkung 3.7 bereits gesehen haben, dass sich jeder solche Weg sogar zu einem *stetig differenzierbaren* Weg umparametrisieren lässt, wollen wir uns hier auf solche stetig differenzierbaren Wege beschränken.

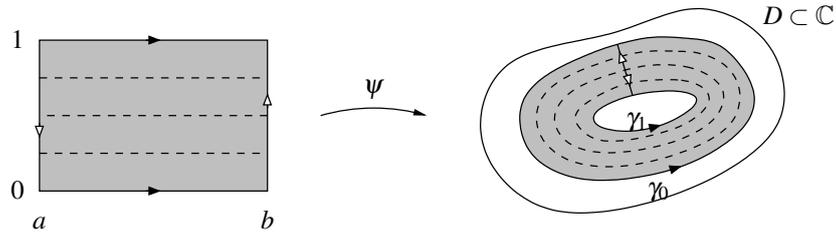
Definition 5.1 (Homotopie). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow D$ zwei stetig differenzierbare Wege in D (mit gleichem Startintervall).

- (a) (Relative Homotopie) Haben γ_0 und γ_1 den gleichen Anfangspunkt $z := \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und den gleichen Endpunkt $z' := \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, so heißen γ_0 und γ_1 **homotop** (oder genauer: **homotop relativ** zu den Endpunkten $\{a, b\}$ des Intervalls) in D , wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ gibt mit
- $\psi(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $\psi(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (d. h. die untere Rechteckseite ist der Weg γ_0 und die obere der Weg γ_1);
 - $\psi(a, s) = z$ und $\psi(b, s) = z'$ für alle $s \in [0, 1]$ (d. h. die linke Rechteckseite wird konstant auf z und die rechte konstant auf z' abgebildet).



Anschaulich sind γ_0 und γ_1 also homotop, wenn sich γ_0 innerhalb von D und unter Festhaltung der Endpunkte nach γ_1 deformieren lässt: Betrachtet man für $s \in [0, 1]$ die Wege $\gamma_s : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma_s(t) = \psi(t, s)$, so ändert sich γ_0 langsam in γ_1 , wenn man s von 0 nach 1 laufen lässt. (In dem Bild oben sind drei der Zwischenwege $\gamma_{1/4}, \gamma_{1/2}, \gamma_{3/4}$ gestrichelt eingezeichnet.) Man bezeichnet die Abbildung ψ auch als **Homotopie** von γ_0 nach γ_1 .

- (b) (Freie Homotopie) Sind γ_0 und γ_1 geschlossen (mit nicht notwendig gleichem Anfangs- bzw. Endpunkt), so heißen γ_0 und γ_1 **homotop** (oder genauer: **frei homotop**) in D , wenn es wie im folgenden Bild eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ gibt mit
- $\psi(t, 0) = \gamma_0(t)$ und $\psi(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (d. h. wie oben ist die untere Rechteckseite der Weg γ_0 und die obere der Weg γ_1);
 - $\psi(a, s) = \psi(b, s)$ für alle $s \in [0, 1]$ (d. h. jeder Punkt der linken Rechteckseite wird in D auf den gleichen Punkt wie der entsprechende Punkt der rechten Rechteckseite abgebildet).



Anschaulich sind γ_0 und γ_1 also homotop, wenn sich γ_0 innerhalb von D als geschlossener Weg nach γ_1 deformieren lässt: Betrachtet man wieder für $s \in [0, 1]$ die Wege $\gamma_s: [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma_s(t) = \psi(t, s)$, so sind alle γ_s geschlossene Wege in D , die sich für s von 0 bis 1 langsam von γ_0 nach γ_1 ändern. Auch hier wird die Abbildung ψ als Homotopie von γ_0 nach γ_1 bezeichnet.

- (c) Ein geschlossener Weg heißt **zusammenziehbar** in D , wenn er (frei) homotop zu einem konstanten Weg ist, d. h. anschaulich wenn er sich „in D zu einem Punkt zusammenziehen lässt“.

Bemerkung 5.2.

- (a) Sind die Wege γ_0 und γ_1 in Definition 5.1 geschlossen mit gleichem Anfangspunkt (gilt also $\gamma_0(a) = \gamma_0(b) = \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$), so ist sowohl Teil (a) als auch Teil (b) der Definition anwendbar. In diesem Fall kann man zeigen, dass γ_0 und γ_1 genau dann homotop relativ $\{a, b\}$ sind, wenn sie frei homotop sind. Es führt also nicht zu Missverständnissen, wenn wir im Folgenden einfach von „homotopen Wegen“ reden, sobald eine der beiden Definitionen anwendbar ist.
- (b) Wie bereits erwähnt verlangt man in der Topologie von einer Homotopieabbildung lediglich die Stetigkeit [G3, Kapitel 6]. Für Wege in einer offenen Teilmenge von \mathbb{C} (wie in Definition 5.1 vorausgesetzt) kann man jedoch zeigen, dass unser Homotopiebegriff mit dem über stetige Funktionen definierten übereinstimmt.

Da wir diese beiden Aussagen im Folgenden nicht benötigen, werden wir sie hier auch nicht beweisen. Sie sollen uns nur zeigen, dass unsere Definition 5.1 mit der sonst üblichen verträglich und nicht mehrdeutig ist.

Kombinieren wir den Cauchyschen Integralsatz 4.1 mit unserer Definition, erhalten wir unmittelbar die folgende Aussage.

Folgerung 5.3 (Homotopieinvarianz des Wegintegrals). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow D$ zwei Wege in D .*

- (a) *Sind γ_0 und γ_1 (relativ oder frei) homotop in D , so gilt $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.*
- (b) *Ist γ_0 (geschlossen und) zusammenziehbar in D , so gilt $\int_{\gamma_0} f(z) dz = 0$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Cauchyschen Integralsatz 4.1 angewendet auf die Homotopieabbildung ψ aus Definition 5.1: Im Fall der relativen Homotopie verschwindet das Wegintegral über f entlang der seitlichen Rechteckkanten, da diese konstant auf einen Punkt abgebildet werden. Im Fall der freien Homotopie ist die Summe der Wegintegrale über f entlang der seitlichen Rechteckkanten Null nach Bemerkung 3.6, da die beiden Kanten den gleichen Weg mit entgegengesetzter Orientierung beschreiben. In beiden Fällen folgt also aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass die Integrale entlang der oberen und unteren Rechteckkante (bei korrekter Orientierung) gleich sein müssen, also dass wie in (a) behauptet $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$ gilt. Die Aussage (b) folgt natürlich sofort aus (a), da das Integral über einen konstanten Weg 0 ist. □

Beispiel 5.4. Es sei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ferner seien

$$\gamma_0: [0, 2\pi] \rightarrow D, t \mapsto re^{it} \quad \text{und} \quad \gamma_1: [0, 2\pi] \rightarrow D, t \mapsto z_0 + re^{it}$$

zwei Kreislinien mit Radius r und Mittelpunkt 0 bzw. z_0 . Damit das Bild von γ_1 auch wirklich in D liegt, setzen wir dabei $|z_0| \neq r$ voraus. Wir können dann zwei Fälle unterscheiden:

- (a) Ist $|z_0| < r$, enthält der Weg γ_1 also den Nullpunkt in seinem Inneren (siehe Bild unten links), so sind γ_0 und γ_1 (frei) homotop in D mit der Homotopieabbildung

$$\psi: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow D, (t, s) \mapsto sz_0 + re^{it}.$$

Das Bild von ψ liegt nämlich in der Tat in D (enthält also nicht den Nullpunkt), da

$$|\psi(t, s)| = |sz_0 + re^{it}| \geq |re^{it}| - |sz_0| \geq r - |z_0| > 0$$

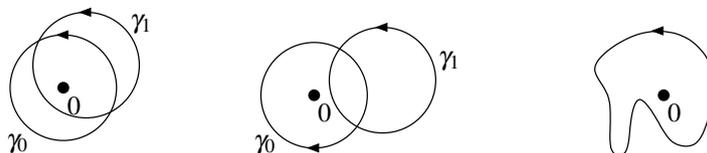
für alle $t \in [0, 2\pi]$ und $s \in [0, 1]$; und es ist offensichtlich, dass ψ stetig differenzierbar ist und die geforderten Randbedingungen erfüllt: Es ist $\psi(t, 0) = re^{it} = \gamma_0(t)$, $\psi(t, 1) = z_0 + re^{it}$ und $\psi(0, s) = sz_0 + r = \psi(2\pi, s)$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und $s \in [0, 1]$.

- (b) Ist dagegen $|z_0| > r$, enthält γ_1 also nicht den Nullpunkt in seinem Inneren (wie im Bild unten in der Mitte), so gilt für die auf D holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ nach Beispiel 4.3

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = 0 \neq 2\pi i = \int_{\gamma_0} \frac{1}{z} dz.$$

Aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals gemäß Folgerung 5.3 folgt also, dass γ_0 und γ_1 in D nicht (frei) homotop sein können.

Natürlich ist auch ohne Rechnung einleuchtend, dass man γ_0 in diesem Fall nicht innerhalb von D , also ohne den Nullpunkt zu treffen, nach γ_1 deformieren kann. Letztlich liegt das daran, dass der Weg γ_0 einmal um den Nullpunkt herum läuft, während γ_1 dies nicht tut: Anschaulich ist ein geschlossener Weg in D genau dann zur Kreislinie γ_0 deformierbar, wenn er (entgegen dem Uhrzeigersinn) einmal um den Nullpunkt herum läuft, wie z. B. im Bild unten rechts. Wir werden dieses Konzept der „Umlaufzahlen“ in Kapitel 11 noch genauer untersuchen.

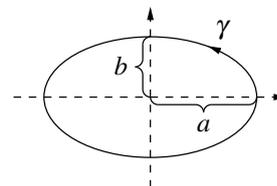


Wir sehen an diesem Beispiel aber auch schon, dass der Homotopiebegriff sehr wesentlich von der betrachteten Menge D abhängt: So sind z. B. im Fall $D = \mathbb{C}$, wenn wir die Kurven also auch über den Nullpunkt ziehen dürfen, die obigen Kreislinien γ_0 und γ_1 für jeden beliebigen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ homotop in D – und zwar mit der gleichen Homotopie wie in (a).

Aufgabe 5.5. Es sei γ wie in der Skizze der Weg, der einmal entgegen dem Uhrzeigersinn entlang des Randes einer Ellipse mit Halbachsen a und b läuft.

Beweise ohne Verwendung von Stammfunktionen die Formel

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab},$$



indem du das Wegintegral $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ sowohl nach Definition als auch mit Hilfe der Homotopieinvarianz berechnest. Wie sehen die benutzten Homotopien konkret aus?

Das Integral mit Stammfunktionen auszurechnen wäre in diesem Fall zwar prinzipiell möglich, aber sehr aufwendig. Wir sehen hier also ein erstes Beispiel dafür, wie sich reelle Integrale mit Hilfe der Funktionentheorie manchmal viel einfacher berechnen lassen. Einige weitere Beispiele hierfür werden wir in Kapitel 12 untersuchen.

Aufgabe 5.6. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ ein stetig differenzierbarer Weg in D . Ferner sei $\tilde{\gamma}: [a, b] \rightarrow D$ ein Weg, der wie in Bemerkung 3.6 durch eine „orientierungserhaltende Umparametrisierung“ aus γ entsteht, d. h. es gebe eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ mit $\psi(a) = a$ und $\psi(b) = b$, so dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi$.

Zeige, dass γ und $\tilde{\gamma}$ dann homotop in D sind. (Dieselbe Aussage gilt analog auch für die freie Homotopie geschlossener Wege. Für holomorphe Funktionen folgt die Unabhängigkeit des Wegintegrals von der Parametrisierung des Weges also auch aus der Homotopieinvarianz.)

Besonders einfach wird die Aussage der Homotopieinvarianz des Wegintegrals natürlich, wenn die Menge $D \subset \mathbb{C}$ so beschaffen ist, dass zwei beliebige geschlossene Wege (bzw. zwei beliebige Wege mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt) immer homotop sind. Hierzu definiert man die folgenden beiden Begriffe:

Definition 5.7 (Zusammenhang). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen.

- (a) D heißt **zusammenhängend** oder ein **Gebiet**, wenn es zu je zwei Punkten $z, z' \in D$ einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ gibt mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = z'$.
- (b) D heißt **einfach zusammenhängend**, wenn D zusammenhängend und jeder geschlossene Weg in D zusammenziehbar ist.

Bemerkung 5.8. In der Topologie wird ein Raum M mit der Eigenschaft aus Definition 5.7 (a) in der Regel als *wegzusammenhängend* bezeichnet, während der Begriff „zusammenhängend“ für eine andere Eigenschaft steht (nämlich dass sich M als topologischer Raum nicht auf nicht-triviale Art als disjunkte Vereinigung zweier in M offener Mengen schreiben lässt) [G3, Kapitel 3]. Man kann allerdings zeigen, dass diese beiden Eigenschaften für offene Teilmengen von \mathbb{C} (also die Mengen, die uns in dieser Vorlesung interessieren) äquivalent sind [G3, Bemerkung 3.5].

Beispiel 5.9. Wie im folgenden Bild dargestellt, ist eine offene Teilmenge von \mathbb{C} genau dann zusammenhängend, wenn sie „nicht aus mehreren Teilen besteht“, und genau dann einfach zusammenhängend, wenn sie außerdem „keine Löcher hat, um die man herumlaufen könnte“.



In der Tat ist die Homotopie ja ein sehr anschauliches Konzept – von zwei Wegen in einer gegebenen Menge lässt sich in der Regel schon durch einfaches Hinschauen leicht entscheiden, ob sie homotop zueinander sind oder nicht. Wir werden die Homotopie zweier Wege daher in dieser Vorlesung ab jetzt in der Regel nur noch anschaulich begründen. Wer einen exakten Beweis für derartige Aussagen haben möchte, muss nur die entsprechenden Homotopien wie in Beispiel 5.4 konkret hinschreiben.

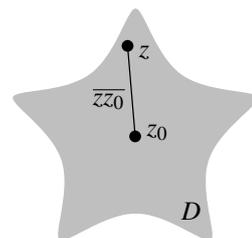
Es gibt jedoch einen in der Praxis häufig auftretenden Fall, in dem man die Eigenschaften aus Definition 5.7 auch leicht exakt beweisen kann:

Beispiel 5.10 (Sternförmige Mengen). Eine offene Menge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **sternförmig**, falls es wie im Bild unten rechts ein $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ auch die ganze Verbindungsstrecke

$$\overline{z z_0} = \{(1-t)z + t z_0 : t \in [0, 1]\}$$

von z nach z_0 in D liegt. Eine solche sternförmige Menge ist stets einfach zusammenhängend: Zum einen lassen sich zwei Punkte $z, z' \in D$ immer durch einen Weg in D verbinden (auf je einem geraden Weg von z nach z_0 und dann von z_0 nach z'), und zum anderen ist jeder geschlossene Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ mit der Homotopie

$$\psi: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D, \quad (t, s) = (1-s)\gamma(t) + s z_0$$



zusammenziehbar, die jeden Punkt des Weges auf einer geraden Strecke nach z_0 bewegt.

Ein Spezialfall solcher sternförmiger Mengen sind die sogenannten *konvexen Mengen*, die mit zwei beliebigen ihrer Punkte auch stets die ganze Verbindungsstrecke dazwischen enthalten. In diesem Fall können wir einen beliebigen Punkt der Menge als „Sternmittelpunkt“ z_0 wählen.

Aus den Zusammenhangseigenschaften in Definition 5.7 ergeben sich für uns die folgenden wichtigen Konsequenzen.

Folgerung 5.11. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

- (a) *Ist D zusammenhängend und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist f konstant.*
- (b) *Ist D einfach zusammenhängend, so hängen Wegintegrale über f nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Insbesondere gilt dann also $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ .*

Beweis.

- (a) Es seien $z_1, z_2 \in D$ beliebig; zu zeigen ist $f(z_1) = f(z_2)$. Nach Voraussetzung gibt es einen Weg γ von z_1 nach z_2 . Dann gilt wie gewünscht nach Lemma 3.10

$$0 = \int_{\gamma} f'(z) dz = f(z_2) - f(z_1).$$

- (b) Es seien γ und γ' zwei Wege, die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben. Wir betrachten den geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$, der zuerst γ und danach γ' in umgekehrter Richtung durchläuft (nach Bemerkung 3.7 können wir auch annehmen, dass $\tilde{\gamma}$ stetig differenzierbar ist). Da D einfach zusammenhängend ist, ist $\tilde{\gamma}$ zusammenziehbar. Also ergibt sich mit Folgerung 5.3 (b)

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma'} f(z) dz. \quad \square$$

6. Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Wir werden nun damit beginnen, einige erste interessante Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz herzuleiten. Als Erstes wollen wir noch einmal die bereits in den letzten Kapiteln gestellte wichtige Frage untersuchen, wann das Wegintegral über eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt. Wir wissen bereits, dass dies der Fall ist, wenn

- f eine Stammfunktion besitzt (Lemma 3.10), oder
- f holomorph und D einfach zusammenhängend ist (Folgerung 5.11 (b)).

In der Tat hängen diese beiden Bedingungen sehr eng miteinander zusammen. Wir werden jetzt sehen, dass die erste aus der zweiten folgt, und später in Folgerung 8.1 auch umgekehrt zeigen, dass eine Funktion, die (lokale) Stammfunktionen besitzt, auch holomorph sein muss.

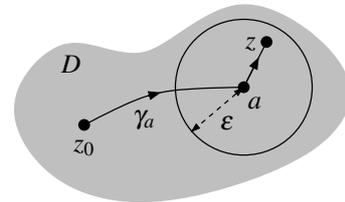
Satz 6.1 (Existenz von Stammfunktionen). *Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{C}$. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf D .*

Beweis. Wir wählen einen beliebigen Punkt $z_0 \in D$. Da D zusammenhängend ist, können wir weiterhin für alle $z \in D$ einen beliebigen Weg γ_z von z_0 nach z wählen. Damit definieren wir nun eine Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

und behaupten, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Es sei dazu $a \in D$ beliebig; wir zeigen, dass F in a komplex differenzierbar mit Ableitung $f(a)$ ist. Weil D offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a ganz in D liegt. Da weiterhin F nach Folgerung 5.11 (b) nicht von den gewählten Wegen γ_z abhängt, können wir wie im Bild rechts annehmen, dass γ_z für alle $z \in U_\varepsilon(a)$ zunächst auf einem festen Weg γ_a von z_0 nach a und dann entlang der geraden Verbindungsstrecke von a nach z verläuft.



Insbesondere ist dann $F(z) - F(a) = \int_{\gamma_z} f(w) dw - \int_{\gamma_a} f(w) dw$ für alle $z \in U_\varepsilon(a)$ einfach das Integral von f entlang der geraden Strecke \overline{az} . Damit folgt für alle $z \in U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(a)}{z - a} - f(a) \right| &= \left| \left(\frac{1}{z - a} \cdot \int_{\overline{az}} f(w) dw \right) - f(a) \right| \\ &= \frac{1}{|z - a|} \cdot \left| \int_{\overline{az}} (f(w) - f(a)) dw \right| \\ &\leq \max_{w \in \overline{az}} |f(w) - f(a)|. \end{aligned} \quad (\text{Lemma 4.4 (b)})$$

Für $z \rightarrow a$ (und damit auch $w \rightarrow a$) konvergiert dieser Ausdruck wegen der Stetigkeit von f gegen 0. Also ist F komplex differenzierbar in a mit Ableitung $f(a)$. \square

Bemerkung 6.2. Die Idee des Beweises von Satz 6.1 ist in der Tat sehr einfach: Wie wir aus der reellen Analysis wissen, sollte die Stammfunktion F von f natürlich einfach durch das Integral „ $F(z) = \int_{z_0}^z f(w) dw$ “ gegeben sein. In der komplexen Analysis ergibt dies aber erst einen Sinn, nachdem wir einen Weg von z_0 nach z gewählt haben – und um sicherzustellen, dass das Ergebnis nicht von diesem Weg abhängt, setzen wir voraus, dass D einfach zusammenhängend und f holomorph ist (siehe Folgerung 5.11 (b)).

Beispiel 6.3. Wir hatten in Beispiel 3.11 (a) bereits gesehen, dass die holomorphe Funktion f mit $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt. In der Tat ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auch nicht einfach zusammenhängend und Satz 6.1 damit nicht anwendbar. Verkleinern wir den Definitionsbereich jedoch z. B. auf die sternförmige und damit einfach zusammenhängende Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, so besagt Satz 6.1, dass f auf dieser Menge eine Stammfunktion besitzen muss. Eine solche Stammfunktion – den komplexen Logarithmus – haben wir in Aufgabe 3.13 auch schon kennengelernt.

Dieses Verkleinern des Definitionsbereichs zu einer einfach zusammenhängenden Menge lässt sich natürlich stets anwenden, da es um jeden Punkt einer offenen Menge D ja zumindest eine (einfach zusammenhängende) ε -Umgebung gibt, die noch ganz in D liegt. Man formuliert Satz 6.1 daher oft auch so:

Folgerung 6.4 (Existenz lokaler Stammfunktionen). *Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so hat jedes $a \in D$ eine Umgebung in D , auf der f eine Stammfunktion besitzt.*

Aufgabe 6.5. Es sei $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ offen und einfach zusammenhängend mit $1 \in D$. Man zeige:

- Es gibt genau eine Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$ auf D , die an der Stelle 1 den Wert 0 hat. Wie hängt diese Funktion mit dem in Aufgabe 3.13 eingeführten Logarithmus zusammen?
- Es gibt genau eine Wurzelfunktion auf D , also genau eine stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$ für alle $z \in D$, die an der Stelle 1 den Wert 1 hat. Wir bezeichnen sie mit $f(z) = \sqrt{z}$.
- Die Wurzelfunktion aus (b) erfüllt i. A. *nicht* $\sqrt{zw} = \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$ für alle $z, w \in D$ mit $zw \in D$; es gilt jedoch stets $\sqrt{zw} = \pm \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$.
- Es gibt keine stetige Wurzelfunktion auf ganz \mathbb{C} .

Warum ist also die scheinbar widersprüchliche Rechnung

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

falsch?

Aufgabe 6.6. Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf einer offenen und konvexen Menge D . Beweise:

- Gilt $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset D$, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.
(Hinweis: Man schaue sich noch einmal den Beweis von Satz 6.1 an.)
- Gibt es eine Gerade $L \subset \mathbb{C}$, so dass f auf $D \setminus L$ holomorph ist, so besitzt f auf D eine Stammfunktion.

(Wir werden später in Folgerung 8.1 „(c) \Rightarrow (a)“ noch sehen, dass f damit dann automatisch auch holomorph ist.)

Wir wollen nun aus dem Cauchyschen Integralsatz noch einige andere Eigenschaften herleiten, die aus der Sicht der reellen Analysis sehr überraschend sind. Die erste besagt, dass eine holomorphe Funktion im Inneren eines Kreises (oder auch eines anderen Gebietes) schon eindeutig bestimmt ist, wenn wir sie nur *auf dem Rand* dieses Kreises (bzw. Gebietes) kennen:

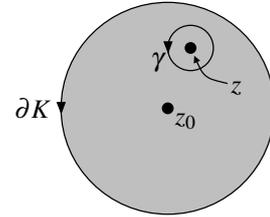
Satz 6.7 (Cauchysche Integralformel). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ein Kreis in D . Dann gilt für alle $z \in \overset{\circ}{K}$, also alle z im Inneren dieses Kreises,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Insbesondere ist f auf dem Kreis K also durch die Werte auf dem Rand ∂K bereits eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir berechnen das Wegintegral auf der rechten Seite der zu beweisenden Formel.

Da der Integrand auf der Menge $D \setminus \{z\}$ holomorph ist, können wir den Integrationsweg ∂K nach Folgerung 5.3 (a) durch einen anderen, in $D \setminus \{z\}$ homotopen Weg γ ersetzen. Wir wählen für γ wie im Bild rechts eine kleine Kreislinie mit Radius ε um z (die man offensichtlich aus ∂K durch eine Deformation in $D \setminus \{z\}$ erhalten kann).



Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{f(z)}{w-z} dw}_{(B)}. \end{aligned}$$

Beachte, dass der Integrand in (A) (als Funktion von w) nach z stetig fortsetzbar ist – und zwar durch die Ableitung $f'(z)$. Für festes z nimmt damit die auf der kompakten Menge K stetige Funktion $w \mapsto \left| \frac{f(w)-f(z)}{w-z} \right|$ ein Maximum $M \in \mathbb{R}$ an. Also können wir (A) nach Lemma 4.4 (b) betragsmäßig nach oben abschätzen durch $\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot M$. Insbesondere konvergiert (A) also gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Den Term (B) hingegen können wir mit Beispiel 3.5 (a) sofort ausrechnen zu

$$(B) = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|w-z|=\varepsilon} \frac{1}{w-z} dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \cdot 2\pi i = f(z).$$

Insgesamt erhalten wir damit also für $\varepsilon \rightarrow 0$ wie behauptet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw = (A) + (B) = 0 + f(z) = f(z). \quad \square$$

Bemerkung 6.8.

- Natürlich können wir den Integrationsweg in der Cauchyschen Integralformel auch durch jeden anderen in $D \setminus \{z\}$ zu ∂K homotopen Weg ersetzen – so wie wir das ja auch im Beweis des Satzes getan haben. Insbesondere kommt es also wieder einmal nicht darauf an, dass K wirklich ein Kreis ist, sondern wir können auf dieselbe Art zeigen, dass „eine in einem gewissen Bereich holomorphe Funktion bereits durch die Funktionswerte auf dem Rand dieses Bereiches eindeutig bestimmt ist“.
- Beachte jedoch, dass wir für die Cauchysche Integralformel *voraussetzen* müssen, dass f überall im Inneren von K holomorph ist, auch wenn das Integral auf der rechten Seite die Werte von f im Inneren von K überhaupt nicht verwendet! Versuchen wir z. B., die Cauchysche Integralformel auf die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ auf der Einheitskreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ anzuwenden, so würden wir

$$\frac{1}{z} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{1}{w(w-z)} dw$$

erhalten, was zumindest für kleine z nicht richtig sein kann, da die linke Seite dieser Gleichung für $z \rightarrow 0$ betragsmäßig unendlich wächst, während auf der rechten Seite der Integrand auf dem betrachteten Weg (und damit auch das Integral) für $z \rightarrow 0$ beschränkt bleibt. In der Tat wird das Ergebnis von Aufgabe 6.10 (b) zeigen, dass obige Gleichung für *alle* z im Inneren von K falsch ist.

Beispiel 6.9.

- Ist f holomorph auf einer Umgebung einer abgeschlossenen Kreisscheibe und konstant auf dem Rand dieses Kreises, so ist f bereits auf der ganzen Kreisscheibe konstant (denn die konstante Funktion ist eine holomorphe Funktion mit den „richtigen“ Werten auf dem Rand, also kann es nach Satz 6.7 keine weitere geben).

- (b) Die Cauchysche Integralformel liefert manchmal eine einfache Möglichkeit, Kurvenintegrale entlang geschlossener Wege über Funktionen zu berechnen, die im vom Weg begrenzten Bereich mit Ausnahme eines einzelnen Punktes holomorph sind. So ergibt sich z. B. das Integral

$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+1} dw$$

mit Hilfe von Satz 6.7 (für $f(w) = e^w$ und $z = -1$) sofort zu $2\pi i \cdot f(-1) = \frac{2\pi i}{e}$, da der Integrationsweg einmal in positiver Richtung um den Punkt z herumläuft. Im Gegensatz dazu ist aber nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_{|w|=2} \frac{e^w}{w+3} dw = 0,$$

denn hier ist der Integrand holomorph im Inneren des Integrationskreises – der Integrationsweg läuft in diesem Fall nicht um den Punkt $z = -3$ herum, sondern ist zusammenziehbar in $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$.

Die Cauchysche Integralformel funktioniert in der obigen Form bisher jedoch in der Regel noch nicht zur Integralberechnung, wenn f an mehreren Stellen innerhalb des Integrationsweges nicht holomorph ist und/oder der Integrand nicht von der Form $\frac{f(w)}{w-z}$ mit einer holomorphen Funktion f ist. Diese Fälle werden wir später mit Hilfe des Residuensatzes 11.14 behandeln.

Aufgabe 6.10. Man berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel

(a) $\int_{|z+2|=2} \frac{e^z}{z^3+1} dz,$

(b) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z(z-w)} dz$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \neq 1$.

Aufgabe 6.11. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, für die $f(z) = \bar{z}^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt.

05

Das folgende Lemma ist eine einfache Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel:

Lemma 6.12 (Mittelwertprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ ein abgeschlossener Kreis, der ganz in D liegt. Dann gilt*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

d. h. „der Funktionswert von f am Mittelpunkt z_0 von K ist der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Rand ∂K “.

Beweis. Aus der Cauchyschen Integralformel in Satz 6.7 folgt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Mit der Parametrisierung $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow D$, $t \mapsto z_0 + re^{it}$ des Integrationsweges ist also wie behauptet nach Definition 3.3 (c)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad \square$$

Bemerkung 6.13. Beachte, dass das Integral in Lemma 6.12 kein Wegintegral, sondern ein „gewöhnliches“ (komplexes) Integral über eine reelle Variable ist. Demzufolge gilt hier auch *keine* Homotopieinvarianz wie in Folgerung 5.3, d. h. es ist *nicht* richtig, dass der Funktionswert von f an einem Punkt z_0 gleich dem Mittelwert der Funktionswerte von f auf einer *beliebigen* Kurve ist, die einmal um z_0 herum läuft.

Aus der Tatsache, dass bei einer holomorphen Funktion f der Wert in jedem Punkt z_0 gleich dem Mittelwert der Funktionswerte auf einer Kreislinie um z_0 ist, folgt nun sofort die weitere sehr erstaunliche Tatsache, dass f nirgends ein (betragsmäßiges) lokales Maximum besitzen kann, sofern die Funktion nicht schon konstant war:

Satz 6.14 (Maximumprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $z_0 \in D$ ein Punkt, an dem die Funktion $|f|$ ein lokales Maximum hat (d. h. es gelte $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle z in einer Umgebung von z_0). Dann ist f bereits konstant in einer Umgebung von z_0 .*

Beweis. Es sei $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\} \subset D$ ein Kreis, auf dem $|f|$ bei z_0 ein globales Maximum hat. Dann folgt aus dem Mittelwertprinzip für alle r mit $0 < r < \varepsilon$

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| && \text{(Lemma 6.12)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt && \text{(Voraussetzung)} \\ &= |f(z_0)|. \end{aligned}$$

Es muss in dieser Ungleichungskette also überall die Gleichheit gelten. Insbesondere folgt aus der Gleichheit in (*) (und der Stetigkeit von $|f|$) also $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$ für alle $0 < r < \varepsilon$ und $t \in [0, 2\pi]$. Damit ist $|f|$ konstant auf $U_\varepsilon(z_0)$, nach Aufgabe 2.19 (c) also auch f . \square

Eine zum Maximumprinzip analoge Aussage gibt es auch für das Minimum:

Folgerung 6.15 (Minimumprinzip). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Hat dann $|f|$ in einem Punkt z_0 ein lokales Minimum und ist dieses Minimum ungleich 0, so ist f bereits konstant in einer Umgebung von z_0 .*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Maximumprinzip, angewendet auf die Funktion $\frac{1}{f}$. \square

Bemerkung 6.16.

- (a) Beim Minimumprinzip ist es sehr wichtig vorauszusetzen, dass das betrachtete Betragsminimum ungleich 0 ist. Ohne diese Voraussetzung ist der Satz offensichtlich falsch: Da Beträge ja nie negativ sein können, liegt schließlich an jeder Nullstelle von f ein lokales Betragsminimum vor – und natürlich ist es falsch, dass eine holomorphe Funktion in der Umgebung einer Nullstelle stets konstant ist.
- (b) Beim Maximum- und Minimumprinzip haben wir aus der Existenz eines lokalen Betragsmaximums bzw. -minimums einer holomorphen Funktion f in einem Punkt z_0 geschlossen, dass f bereits konstant in einer Umgebung von z_0 sein muss. Ist der betrachtete Definitionsbereich D von f zusammenhängend, so wird in der Tat später aus dem Identitätssatz folgen, dass f dann sogar konstant auf ganz D ist (siehe Bemerkung 8.11 (b)).

Oftmals findet man das Maximum- bzw. Minimumprinzip in der Literatur in der Formulierung, dass „holomorphe Funktionen ihr Betragsmaximum bzw. -minimum auf dem Rand annehmen“:

Folgerung 6.17 (Maximum- bzw. Minimumprinzip, 2. Version). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt sowie $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf D . Dann wird das absolute Betragsmaximum von f auf \bar{D} (das wegen der Stetigkeit von f auf der kompakten Menge \bar{D} existiert) auf dem Rand von D angenommen. Dasselbe gilt für das absolute Betragsminimum, sofern es ungleich 0 ist.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für das Betragsmaximum $M := \max\{|f(z)| : z \in \bar{D}\}$, die Aussage über das Minimum ergibt sich natürlich analog.

Es sei $K := \{z \in \bar{D} : |f(z)| = M\}$ die Menge, auf der das Betragsmaximum angenommen wird. Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{M\}$ unter der stetigen Abbildung $|f|$ ist K abgeschlossen [G2, Satz 24.17 (c)]. Wir wählen nun einen beliebigen Randpunkt $a \in \partial K \subset K$ dieser Menge. Läge K

komplett in D , so wäre also $a \in D$, und $|f|$ würde zwar im Punkt a , nicht aber in einer ganzen Umgebung von a das Betragsmaximum annehmen. Dieser Widerspruch zu Satz 6.14 zeigt, dass $K \not\subset D$ gelten muss, das Betragsmaximum von f also (auch) auf dem Rand von D angenommen wird. \square

Aufgabe 6.18. Es seien $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge D sowie $K \subset D$ eine abgeschlossene Kreisscheibe. Man zeige:

- (a) Ist f auf K nicht konstant, aber $|f|$ auf ∂K konstant, so hat f in K eine Nullstelle.
- (b) Die Funktion $\operatorname{Re} f$ nimmt auf K ihr Maximum auf dem Rand ∂K an.

Mit Hilfe des Minimumprinzips können wir nun einen weiteren Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra geben – also für die Aussage, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom eine Nullstelle in \mathbb{C} besitzt. Einen ersten Beweis hatten wir ja bereits in Aufgabe 4.7 gesehen, und wir werden später in dieser Vorlesung auch noch andere Beweise hierfür kennenlernen.

Die einfache Idee des Beweises durch das Minimumprinzip besteht darin, dass ein komplexes Polynom irgendwo ein betragsmäßiges Minimum annehmen muss – was nach dem Minimumprinzip aber nur möglich ist, wenn dieses Minimum gleich 0 ist, also wenn eine Nullstelle existiert. Um dies exakt zu zeigen, brauchen wir zunächst ein einfaches Lemma über das Wachstum von Polynomen im Unendlichen.

Lemma 6.19 (Wachstum von Polynomen). *Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ ein normiertes komplexes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gibt es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass*

$$\frac{1}{2}|z|^n \leq |f(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt.

Beweis. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ folgt aus der Dreiecksungleichung nach unten

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \geq \frac{|z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \dots - |a_0|}{|z^n|} = \frac{r^n - |a_{n-1}|r^{n-1} - \dots - |a_0|}{r^n} \rightarrow 1 \text{ für } r \rightarrow \infty.$$

Also gibt es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \geq \frac{1}{2}$ für alle $r \leq R$, d. h. mit $|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n$.

Die andere behauptete Ungleichung ergibt sich analog mit Hilfe der gewöhnlichen Dreiecksungleichung $|f(z)| \leq |z^n| + |a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|$ nach oben. \square

Satz 6.20 (Fundamentalsatz der Algebra, 2. Beweis). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass das Polynom $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ den Leitkoeffizienten 1 hat. Nach Lemma 6.19 gibt es dann ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{1}{2}R^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Durch eventuelles Vergrößern von R können wir also annehmen, dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Betrachten wir nun die Kreisscheibe $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, so besagt diese Abschätzung gerade, dass

$$|f(z)| \geq |a_0| + 1 > |a_0| = |f(0)|$$

für alle $z \in \partial K$ ist. Das absolute Betragsminimum von $|f|$ auf K wird also sicher nicht auf dem Rand ∂K angenommen, denn wir haben mit dem Nullpunkt ja in jedem Fall schon einen Punkt im Inneren von K gefunden, an dem $|f|$ kleiner ist als überall auf dem Rand. Da f natürlich holomorph ist, ist dies nach dem Minimumprinzip wie in Folgerung 6.17 aber nur möglich, wenn das Betragsminimum von f gleich 0 ist – und das heißt ja gerade, dass f in K eine Nullstelle besitzt. \square

7. Potenzreihen und Taylor-Reihen

Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel wollen wir nun in diesem Kapitel ein weiteres sehr zentrales Resultat der Funktionentheorie herleiten, nämlich dass sich holomorphe Funktionen stets lokal um jeden Punkt als eine Potenzreihe schreiben lassen. Aus diesem Grund werden Potenzreihen in dieser Vorlesung letztlich auch eine weit größere Rolle spielen als in der reellen Analysis (in der keine derartige Aussage gilt).

Zu Beginn benötigen wir aber zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Potenzreihen, die im Komplexen genauso wie im Reellen gelten und die wir zur Erinnerung aus den Grundlagen der Mathematik kurz wiederholen wollen.

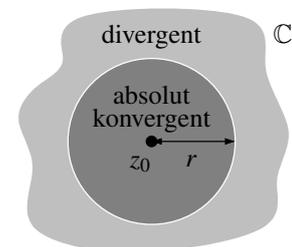
Definition 7.1 (Potenzreihen). Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine **Potenzreihe** um z_0 ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$. Man nennt z_0 auch den **Entwicklungspunkt** der Reihe.

Bemerkung 7.2 (Konvergenz von Potenzreihen). Am wichtigsten ist bei einer Potenzreihe zunächst die Frage, für welche Werte $z \in \mathbb{C}$ sie konvergiert und für welche divergiert. Aus den Grundlagen der Mathematik wissen wir dazu bereits, dass die Reihe einen **Konvergenzradius** $r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ besitzt, so dass gilt [G2, Satz 7.26 und 8.37]:

- (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ im **Konvergenzkreis** $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ konvergiert die Reihe $f(z)$ absolut. Auf jedem darin enthaltenen kompakten Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ mit $R < r$ ist diese Konvergenz sogar gleichmäßig.
- (b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > r$ divergiert die Reihe $f(z)$.



Auf dem Rand des Konvergenzkreises, also für $|z - z_0| = r$, kann je nach der betrachteten Reihe in manchen Punkten Konvergenz und in anderen Divergenz auftreten.

Aus dem Wurzelkriterium in Bemerkung 1.7 (d) erhält man außerdem, dass sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe mit Hilfe der sogenannten Formel von **Cauchy-Hadamard**

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

berechnen lässt, da die Potenzreihe ja konvergiert bzw. divergiert, wenn der Ausdruck

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (z - z_0)^n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = \frac{|z - z_0|}{r}$$

kleiner bzw. größer als 1 ist, also $|z - z_0| < r$ bzw. $|z - z_0| > r$ gilt [G2, Satz 7.26]. Die Formel von Cauchy-Hadamard ist auch anwendbar, wenn der dort betrachtete Limes superior gleich 0 oder ∞ (und der Konvergenzradius damit ∞ bzw. 0) ist.

Genauso sieht man mit dem Quotientenkriterium, dass

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

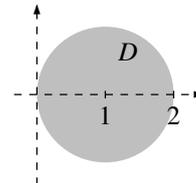
gilt, falls dieser Grenzwert existiert [G2, Satz 7.28]. Im Fall der Nichtexistenz dieses Grenzwerts lässt sich der Konvergenzradius mit diesem Kriterium jedoch nicht berechnen.

Beispiel 7.3.

- (a) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ hat nach der Quotientenformel aus Bemerkung 7.2 den Konvergenzradius

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1,$$

konvergiert also absolut auf der Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ und divergiert für alle z mit $|z-1| > 1$. Auf dem Rand ∂D des Konvergenzkreises tritt unterschiedliches Verhalten auf: So ist z. B. $f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ die konvergente alternierende harmonische Reihe und $f(0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die divergente harmonische Reihe.



- (b) Die Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ hat nach der gleichen Formel den Konvergenzradius

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vergleichen wir dies mit der Formel von Cauchy-Hadamard, so erhalten wir also

$$1 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}, \quad \text{und damit} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Da zusätzlich natürlich $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \geq 1$ und damit auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \geq 1$ gilt, folgt hieraus, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist – was vermutlich eine der einfachsten Arten ist, diesen speziellen, in der Analysis oft betrachteten Grenzwert zu berechnen [G2, Beispiel 7.29 (b)].

Bemerkung 7.4 (Formale Ableitungen von Potenzreihen). Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Wir definieren ihre **formale Ableitung** als die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

und erwarten, dass dies im Konvergenzkreis auch wirklich die Ableitung der Funktion $f: z \mapsto f(z)$ ist, also dass Potenzreihen holomorphe Funktionen darstellen und „gliedweise differenziert werden können“. In der Tat wissen wir dies für reelle Potenzreihen auch schon aus den Grundlagen der Mathematik [G2, Folgerung 10.28]. Der dort üblicherweise gegebene Beweis verwendet jedoch den Mittelwertsatz und lässt sich damit nicht wörtlich auf den komplexen Fall übertragen. Wir wollen diesen komplexen Fall daher jetzt auf den reellen zurückführen.

Als Erstes erinnern wir uns dazu daran, dass die formale Ableitung g zumindest den gleichen Konvergenzradius r wie die ursprüngliche Reihe f hat [G2, Aufgabe 7.31]. Am schnellsten erhält man dieses Resultat vermutlich aus der Formel von Cauchy-Hadamard: Der Konvergenzradius der Reihe $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ ist natürlich derselbe wie der der Reihe $(z-z_0)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^n$, also

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r,$$

da der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ nach Beispiel 7.3 (b) gleich 1 ist.

Das gewünschte Resultat, dass die formale Ableitung einer Potenzreihe gleich ihrer „gewöhnlichen“ Ableitung ist, ergibt sich damit nun aus dem folgenden Satz über die Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung.

Satz 7.5 (Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $(f_n)_n$ eine Folge holomorpher Funktionen auf D , die punktweise gegen eine Grenzfunktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Weiterhin nehmen wir an, dass die Ableitungen $f'_n: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig sind und auf D gleichmäßig konvergieren.*

Dann ist auch die Grenzfunktion f auf D holomorph, und für ihre Ableitung gilt $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. Differentiation und Grenzwertbildung können in diesem Fall also vertauscht werden.

Beweis. Für reelle Funktionen ist die analoge Aussage bereits aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G2, Satz 10.27]. Wir führen den Beweis nun in \mathbb{C} , indem wir ihn auf den reellen Fall zurückführen.

Dazu schreiben wir $f_n = u_n + iv_n$ mit $u_n = \operatorname{Re} f_n$ und $v_n = \operatorname{Im} f_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Analog setzen wir $f = u + iv$ für die Grenzfunktion. Die Koordinaten in D seien wie üblich $z = x + iy$.

Betrachten wir nun die Funktionen u_n und fassen sie bei festgehaltenem y als Funktionen einer reellen Variablen x auf, so können wir auf diese Funktionen offensichtlich die *reelle* Vertauschbarkeit von Differentiation und Grenzwertbildung anwenden und sehen, dass u nach x partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}$. Da wir außerdem vorausgesetzt haben, dass die Ableitungen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ stetig sind und gleichmäßig gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$ konvergieren, ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ darüber hinaus nach [G2, Bemerkung 24.25 (b)] stetig. Also ist $f = u + iv: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar und damit nach [G2, Satz 25.17] auch total differenzierbar.

Außerdem sind alle f_n nach Voraussetzung holomorph und erfüllen somit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9, d. h. es gilt $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial y}$ und $\frac{\partial u_n}{\partial y} = -\frac{\partial v_n}{\partial x}$ für alle n . Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_n}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial v_n}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und analog $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Also erfüllt auch f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist somit nach Satz 2.9 holomorph mit Ableitung

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + i \frac{\partial v_n}{\partial x} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n. \quad \square$$

06

Folgerung 7.6 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen). *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist in ihrem Konvergenzkreis holomorph. Ihre Ableitung stimmt dort mit der formalen Ableitung überein, d. h. es gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 7.4 haben die ursprüngliche Potenzreihe f und ihre formale Ableitung $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ denselben Konvergenzradius r . Es sei nun $R < r$ beliebig; nach Bemerkung 7.2 konvergieren beide Potenzreihen dann sogar gleichmäßig auf der kompakten Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$ und damit natürlich auch auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Anwenden von Satz 7.5 auf die Partialsummen von f bzw. g liefert damit die behauptete Aussage auf D . Da $R < r$ beliebig war, folgt die Behauptung dann auch auf dem gesamten Konvergenzkreis. \square

Beispiel 7.7. Wir betrachten noch einmal die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^n$ aus Beispiel 7.3 (a). Nach Folgerung 7.6 ist f im Konvergenzkreis $D = \{z : |z - 1| < 1\}$ holomorph mit Ableitung

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z - 1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n = \frac{1}{1 - (z - 1)} = \frac{1}{2 - z}.$$

Wir kennen nach Aufgabe 3.13 (a) aber schon eine weitere Funktion auf D , deren Ableitung $\frac{1}{z}$ ist, nämlich den komplexen Logarithmus $\log z$. Die Funktion $z \mapsto f(z) - \log z$ ist also holomorph mit Ableitung 0 in D . Aus Folgerung 5.11 (a) ergibt sich damit, dass $f(z) - \log z$ auf D konstant ist. Einsetzen von $z = 1$ zeigt, dass diese Konstante 0 sein muss. Damit ist $f(z) = \log z$ auf D .

Man beachte hierbei insbesondere, dass der Logarithmus zwar auf dem viel größeren Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ definiert und holomorph ist, aber nur im Kreis D (bzw. evtl. noch an einigen Punkten auf ∂D) durch die Potenzreihe f dargestellt wird!

Wir können Folgerung 7.6 nun natürlich sofort auf die höheren (komplexen) Ableitungen $f^{(n)}$ einer Potenzreihe f verallgemeinern:

Folgerung 7.8 (Taylor-Formel für Potenzreihen). *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzkreis D . Dann ist f auf D beliebig oft komplex differenzierbar, und alle Ableitungen*

können gliedweise berechnet werden. Weiterhin gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ für alle n und damit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (\text{Taylor-Formel})$$

für alle $z \in D$.

Beweis. Durch iterierte Anwendung von Folgerung 7.6 ergibt sich sofort, dass alle höheren Ableitungen von f existieren und gliedweise berechnet werden können. Führt man diese Differentiationen aus, so erhält man für alle $k \in \mathbb{N}$

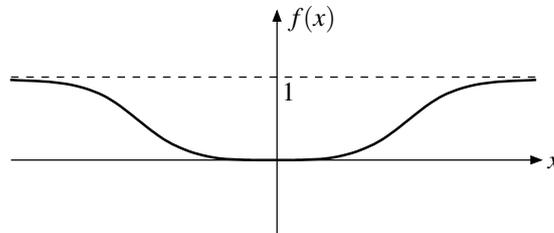
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k},$$

durch Einsetzen von $z = z_0$ also $f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$ und damit $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. \square

Bemerkung 7.9 (Analytische Funktionen). Die Taylor-Formel aus Folgerung 7.8 gilt genauso auch im Reellen [G2, Satz 11.9]. Sie ist allerdings zunächst nur eine Aussage über *Potenzreihen* und nicht über (unendlich oft) *differenzierbare Funktionen*. In der Tat gibt es im Reellen unendlich oft differenzierbare Funktionen, die sich nicht als Potenzreihe schreiben lassen und für die demzufolge insbesondere auch die Taylor-Formel aus Folgerung 7.8 nicht gilt: So ist z. B. die reelle Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

aus Aufgabe 2.18 (a) unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n [G2, Aufgabe 11.13]. Die Funktion läuft sozusagen „unendlich flach in den Nullpunkt hinein“, d. h. die entsprechende Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ist die Nullfunktion und damit nicht gleich der ursprünglichen Funktion f .



Funktionen, die sich (lokal) als Potenzreihe schreiben lassen (und für die demzufolge die Taylor-Formel gilt), werden in der Literatur als **analytische Funktionen** bezeichnet. Die analytischen Funktionen bilden also im Reellen nach dem obigen Beispiel eine echte Teilmenge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

Im Komplexen hingegen funktioniert das obige Gegenbeispiel nicht, weil die Funktion $z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}}$ dort nach Aufgabe 2.18 (a) nicht einmal stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist. In der Tat wird der folgende Satz wie bereits angekündigt zeigen, dass die komplexe Situation hier wieder einmal viel schöner als die reelle ist: In der Funktionentheorie ist *jede* holomorphe Funktion automatisch analytisch, also in eine Potenzreihe entwickelbar! Dies ist natürlich sehr angenehm, weil es sich mit Potenzreihen oft viel einfacher rechnen lässt als mit dem allgemeinen Konzept einer differenzierbaren Funktion.

Satz 7.10 (Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner seien $z_0 \in D$ und $r > 0$, so dass der offene Kreis $U = \{z : |z - z_0| < r\}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r ganz in D liegt. Dann gilt:*

- (a) *f ist in U darstellbar als eine Potenzreihe um z_0 (deren Konvergenzradius mindestens r ist). Insbesondere ist f in U nach Folgerung 7.6 also unendlich oft komplex differenzierbar, und*

es gilt die Taylor-Formel

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

für alle $z \in U$.

(b) Die höheren Ableitungen von f erfüllen die **verallgemeinerte Cauchysche Integralformel**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

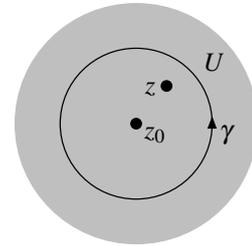
für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei γ eine beliebige Kreislinie in U um z_0 ist.

Beweis. Es seien $z \in U$ und γ wie im Bild unten rechts eine Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 , die um den Punkt z herumläuft und noch ganz in U liegt. Dann gilt nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} dw.$$

Weil für alle w auf dem Integrationsweg $|w - z_0| > |z - z_0|$ gilt und der Betrag von $\frac{z - z_0}{w - z_0}$ damit dort kleiner als 1 ist, können wir den zweiten Faktor im Integral in die geometrische Reihe entwickeln und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw.$$



Wenn w auf dem Integrationsweg entlang läuft, ist der Ausdruck $\frac{f(w)}{w - z_0}$ beschränkt, und $\frac{z - z_0}{w - z_0}$ hat einen konstanten Betrag kleiner als 1. Daher ist die Reihe im Integranden gleichmäßig konvergent in w . Wir können die Summe also mit dem Integral vertauschen [G2, Satz 12.37] und erhalten

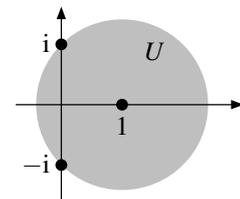
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n.$$

Weil der Ausdruck in der großen Klammer unabhängig von z ist, haben wir f damit in der Tat auf U als Potenzreihe in z um z_0 geschrieben. Da die Koeffizienten der Potenzreihe nach Folgerung 7.8 außerdem gleich $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ sein müssen, ist damit auch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel bewiesen. □

Beispiel 7.11. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2 + 1}$$

und den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$. Der größte offene Kreis mit Mittelpunkt z_0 , der noch im Definitionsgebiet von f liegt, ist offensichtlich $U = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \sqrt{2}\}$. Also konvergiert die Taylor-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ nach Satz 7.10 auf U gegen f , d. h. ihr Konvergenzradius ist mindestens $\sqrt{2}$.



Andererseits kann der Konvergenzradius aber auch nicht größer als $\sqrt{2}$ sein, denn sonst würden die Punkte $\pm i$ noch im Inneren des Konvergenzkreises liegen – was bedeuten würde, dass die Taylor-Reihe (die ja auf U mit f übereinstimmt) die Funktion f auf U in die Punkte $\pm i$ stetig fortsetzen würde. Dies ist wegen $\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \infty$ aber natürlich unmöglich. Also ist der Konvergenzradius der Taylor-Reihe genau gleich $\sqrt{2}$. Beachte, dass wir hier den Konvergenzradius der Taylor-Reihe bestimmen konnten, ohne die Reihe überhaupt explizit hingeschrieben zu haben!

Bemerkung 7.12. Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.3 (a)) können wir den Integrationsweg in der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel von Satz 7.10 (b) natürlich genauso gut durch einen in $D \setminus \{z_0\}$ homotopen Weg ersetzen. Insbesondere kommt es

bei der Integration über eine Kreislinie also nicht darauf an, dass z_0 wirklich der Mittelpunkt der Kreislinie ist, sondern nur darauf, dass z_0 im Inneren des Kreises liegt. Wir können die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel also auch analog zur „gewöhnlichen“ in Satz 6.7 aufschreiben als

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw,$$

wobei $K \subset D$ ein (abgeschlossener) Kreis und $z \in K^\circ$ ein beliebiger Punkt im Inneren dieses Kreises ist. Unsere ursprüngliche Cauchysche Integralformel ergibt sich hieraus offensichtlich für den Fall $n = 0$.

In dieser Form sieht man also, dass diese Formel nicht nur die Funktionswerte, sondern auch alle Ableitungen von f im Inneren eines Kreises berechnen kann, wenn man nur die Werte von f auf dem Rand des Kreises kennt. Wie in Beispiel 6.9 (b) ist dieses Resultat oft zur Berechnung geschlossener Wegintegrale nützlich: Wollen wir z. B. das Integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2} dz$$

berechnen, so folgt mit der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel für $n = 1$ und $f(z) = e^z$ ohne weitere komplizierte Rechnungen

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot f'(0) = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i,$$

da die Nullstelle 0 des Nenners im Inneren des Integrationskreises liegt.

Aufgabe 7.13. Berechne die Integrale $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z^3(1-z)} dz$ und $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Aufgabe 7.14. Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) die Taylor-Reihe der Funktion $f(z) = \frac{2}{z^5-1}$ zum Entwicklungspunkt $z_0 = \frac{1}{4}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n$, wobei

$$\varphi(n) := |\{m = 1, \dots, n : m \text{ ist teilerfremd zu } n\}|$$

die z. B. aus der Zahlentheorie bekannte Eulersche φ -Funktion ist;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \cdot z^{(n^2)}$.

Aufgabe 7.15. Es sei p ein komplexes Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$.

(b) Zeige, dass sich f im Konvergenzkreis in der Form $f(z) = \frac{g(z)}{(1-z)^{d+1}}$ für ein Polynom g schreiben lässt.

Aufgabe 7.16. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $a \in \mathbb{C}$ definieren wir die (**allgemeine**) **komplexe Potenz** analog zum reellen Fall als

$$z^a := e^{a \log z}$$

mit dem komplexen Logarithmus $\log z$ wie in Aufgabe 3.13.

(a) Beweise für $|z| < 1$ die „allgemeine binomische Formel“

$$(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n,$$

wobei $\binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

- (b) Ihr seid Übungsleiter für die Funktionentheorie und bekommt die folgende Abgabe eines Studenten. Was sagt ihr dazu?

Einerseits ist

$$(e^{2+2\pi i})^{2+2\pi i} = (e^2 \cdot e^{2\pi i})^{2+2\pi i} = (e^2)^{2+2\pi i} = e^{4+4\pi i} = e^4,$$

andererseits aber auch

$$(e^{2+2\pi i})^{2+2\pi i} = e^{(2+2\pi i)^2} = e^{4+8\pi i-4\pi^2} = e^4 \cdot e^{-4\pi^2},$$

also folgt $e^4 = e^4 \cdot e^{-4\pi^2}$ und damit $e^{-4\pi^2} = 1$.

Aufgabe 7.17. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen mit $0 \in D$. Zeige, dass es keine holomorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $f^{(n)}(0) = n!^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

8. Folgerungen aus der Potenzreihenentwicklung

Nachdem wir nun gesehen haben, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben lassen, werden wir in diesem Kapitel einige wichtige und überraschende Folgerungen aus dieser Tatsache herleiten. Als Erstes wollen wir dafür zur besseren Übersicht noch einmal unsere bisherigen Resultate zusammenfassen und auflisten, welche Eigenschaften einer komplexen Funktion zur Holomorphie äquivalent sind.

Folgerung 8.1. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Für eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

- (a) *f ist holomorph (d. h. in jedem Punkt $z \in D$ einmal komplex differenzierbar);*
- (b) *f ist auf D unendlich oft komplex differenzierbar;*
- (c) *f besitzt um jeden Punkt $z \in D$ lokale Stammfunktionen;*
- (d) *f ist analytisch (d. h. lässt sich lokal um jeden Punkt als Potenzreihe schreiben);*
- (e) *f ist reell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen aus Satz 2.9.*

Beweis. „(a) \Rightarrow (d)“ ist Satz 7.10, „(d) \Rightarrow (b)“ ist Folgerung 7.8, und „(b) \Rightarrow (a)“ ist trivial. Dies zeigt die Äquivalenz dieser drei Punkte.

Die Äquivalenz von (a) und (e) ist genau Satz 2.9.

Die Aussage „(a) \Rightarrow (c)“ ist Folgerung 6.4. Um „(c) \Rightarrow (a)“ zu sehen setzen wir voraus, dass f um einen Punkt $z_0 \in D$ eine lokale Stammfunktion F besitzt. Da diese natürlich holomorph ist, ist sie nach „(a) \Rightarrow (b)“ (was wir schon gezeigt haben) sogar unendlich oft differenzierbar. Insbesondere ist $f = F'$ damit komplex differenzierbar in z_0 mit Ableitung $f'(z_0) = F''(z_0)$. \square

Wir sehen also noch einmal, dass die komplexe Analysis hier deutlich schöner ist als die reelle, da die Unterschiede zwischen den ganzen verschiedenen Differenzierbarkeitseigenschaften, die in der reellen Analysis oft große Probleme bereiten (n -mal differenzierbar, n -mal stetig differenzierbar, analytisch. . .), in der komplexen Analysis nicht existieren.

Unser erstes neues Resultat in diesem Kapitel ist die aus der Sicht der reellen Analysis sicher unerwartete Tatsache, dass jede auf ganz \mathbb{C} beschränkte holomorphe Funktion automatisch konstant ist.

Satz 8.2 (Satz von Liouville). *Jede beschränkte holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin lässt sich die Funktion f nach Satz 7.10 auf ganz \mathbb{C} durch ihre Taylor-Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ mit Entwicklungspunkt 0 darstellen. Es genügt also zu zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Dies erhalten wir aber sofort aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| && \text{(Satz 7.10 (b))} \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\ &= \frac{n!}{r^n} \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \\ &\leq \frac{M n!}{r^n}, \end{aligned}$$

wenn wir dort den Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ bilden. \square

Bemerkung 8.3 (Ganze Funktionen). Im Satz von Liouville ist es natürlich wesentlich, dass die betrachtete Funktion auf der *gesamten komplexen Zahlenebene* und nicht nur auf einer offenen Teilmenge definiert ist – so ist die Identität $f(z) = z$ z. B. zwar auf der offenen Einheitskreisscheibe beschränkt, aber dort natürlich nicht konstant. Funktionen, die auf der gesamten komplexen Zahlenebene \mathbb{C} definiert und holomorph sind, werden in der Literatur oft als **ganze Funktionen** bezeichnet. Der Satz von Liouville besagt in dieser Sprechweise also, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

Die folgende Aussage ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes:

Aufgabe 8.4. Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir setzen voraus, dass es Konstanten $r, c \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f(z)| \leq c|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$ ist (d. h. „ f wächst höchstens polynomial vom Grad n für $z \rightarrow \infty$ “).

Zeige, dass f dann schon ein Polynom vom Grad höchstens n sein muss.

Aufgabe 8.5. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt **dicht** in \mathbb{C} , wenn ihr Abschluss \bar{A} gleich der ganzen komplexen Ebene \mathbb{C} ist, d. h. wenn in *jeder* Umgebung *jedes* Punktes von \mathbb{C} mindestens ein Punkt aus A liegt.

Es sei nun $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Zeige, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dann dicht in \mathbb{C} ist.

Aufgabe 8.6. Es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$. Man zeige:

- (a) Gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so ist $f = e^h$ für eine holomorphe Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{C}$.
- (b) Gilt $f^2 + g^2 = 1$ auf D , so ist $f = \cos h$ und $g = \sin h$ für eine holomorphe Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Mit dem Satz von Liouville können wir einen weiteren einfachen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra angeben:

Satz 8.7 (Fundamentalsatz der Algebra, 3. Beweis). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Es sei f ein normiertes Polynom ohne Nullstellen in \mathbb{C} . Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ natürlich auf ganz \mathbb{C} definiert und holomorph. Nach Lemma 6.19 gibt es eine Konstante $R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{1}{2}R^n \quad \text{für alle } |z| \geq R.$$

Damit ist die Funktion $\frac{1}{f}$ auf der Menge $\{z : |z| \geq R\}$ durch $\frac{2}{R^n}$ beschränkt. Auf der kompakten Menge $\{z : |z| \leq R\}$ ist die stetige Funktion $\frac{1}{f}$ natürlich ebenfalls durch eine Konstante $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt. Also ist $\frac{1}{f}$ auf ganz \mathbb{C} (durch das Maximum der beiden Zahlen $\frac{2}{R^n}$ und M) beschränkt. Nach dem Satz 8.2 von Liouville ist $\frac{1}{f}$ damit konstant, und demzufolge auch das Polynom f . \square

Noch überraschender als der Satz von Liouville ist vielleicht der sogenannte Identitätssatz, der besagt, dass zwei holomorphe Funktionen, die auf einer „recht kleinen“ Menge übereinstimmen, bereits überall gleich sein müssen. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Hilfssatz.

Lemma 8.8. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ nicht leer, offen und zusammenhängend. Ferner sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind äquivalent:*

- (a) $f = 0$, d. h. f ist die Nullfunktion;
- (b) es ist $f|_A = 0$ für eine Teilmenge $A \subset D$, die einen Häufungspunkt in D besitzt (der aber nicht notwendig in A liegen muss);
- (c) es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Aussage „(a) \Rightarrow (b)“ ist trivial (wir können z. B. $A = D$ wählen, da jeder Punkt einer offenen Menge D Häufungspunkt von D ist).

- (b) \Rightarrow (c): Es sei $z_0 \in D$ ein Häufungspunkt von A . Angenommen, es wäre $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir n minimal mit dieser Eigenschaft, so liefert die Taylor-Entwicklung von f um z_0 nach Satz 7.10

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

$$= (z-z_0)^n \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z-z_0) + \dots \right)}_{(*)}$$

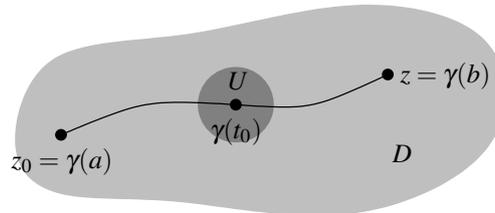
in einer Umgebung von z_0 . Setzen wir $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ auf $D \setminus \{z_0\}$, so wird $g(z)$ also für alle $z \neq z_0$ in dieser Umgebung durch die Potenzreihe (*) dargestellt. Insbesondere ist g damit stetig nach z_0 fortsetzbar, und zwar mit Funktionswert $g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Weil z_0 nach Voraussetzung ein Häufungspunkt von A ist, gibt es nun eine Folge $(z_m)_{m \in \mathbb{N}_{>0}}$ in $A \setminus \{z_0\}$, die gegen z_0 konvergiert. Nach Definition von A gilt $f(z_m) = 0$ und damit auch $g(z_m) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Da g stetig in z_0 ist, muss damit aber auch $0 = g(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ gelten, im Widerspruch zur Wahl von n . Also war unsere Annahme falsch, d. h. es gilt $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (c) \Rightarrow (a): Es sei $z \in D$ beliebig; wir müssen zeigen, dass $f(z) = 0$. Da D zusammenhängend ist, können wir einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ von z_0 nach z wählen. Wir betrachten nun die Menge

$$I := \{t \in [a, b] : f^{(n)}(\gamma(t)) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\},$$

also die Menge aller Punkte des Weges, an denen alle Ableitungen von f (inklusive der „0-ten Ableitung“, also des Funktionswertes von f) verschwinden. Nach Voraussetzung ist $a \in I$, d. h. I ist nicht leer. Außerdem ist I natürlich beschränkt und abgeschlossen (da I durch Gleichungen zwischen stetigen Funktionen gegeben ist). Also existiert das Maximum $t_0 := \max I$ dieser kompakten Menge.



Angenommen, dieses Maximum t_0 wäre kleiner als b . Dann können wir die Funktion f um $\gamma(t_0)$ nach Satz 7.10 lokal in einer offenen Kreisscheibe U (wie im Bild oben) durch ihre Taylor-Reihe darstellen – und da am Punkt $\gamma(t_0)$ ja alle Ableitungen von f verschwinden, ist diese Taylor-Reihe identisch 0. Also ist auch f identisch gleich 0 in U . Da der Weg γ aber auch noch für $t > t_0$ ein Stück weit in U verlaufen muss, wäre natürlich auch dort noch $f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – im Widerspruch zu $t_0 = \max I$.

Also muss $t_0 = b$ sein, und damit folgt wegen $b = t_0 \in I$ insbesondere wie behauptet, dass $f(z) = f^{(0)}(\gamma(b)) = 0$. \square

In der Regel verwendet man Lemma 8.8 in der folgenden Form:

Folgerung 8.9 (Identitätssatz). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge $A \subset D$ übereinstimmen, die einen Häufungspunkt in D besitzt, so gilt bereits $f = g$.*

Beweis. Dies ist genau die Aussage von Lemma 8.8 „(b) \Rightarrow (a)“, angewendet auf die Funktion $f - g$. \square

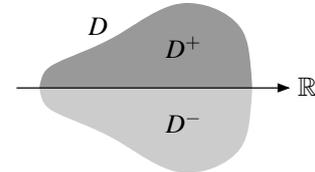
Beispiel 8.10.

- (a) Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Da die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ einen Häufungspunkt (nämlich 0) im Definitionsbereich besitzt, folgt aus Lemma 8.8 „(b) \Rightarrow (a)“, dass f bereits die Nullfunktion sein muss. Es reichen hier also „sehr wenige“ Informationen über f aus, um die Funktion bereits eindeutig zu bestimmen!
- (b) Es sei nun $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Im Gegensatz zu (a) liegt in diesem Fall der Häufungspunkt nicht mehr im Definitionsbereich von f , so dass Lemma 8.8 damit nicht mehr anwendbar ist. In der Tat gibt es auch Funktionen außer der Nullfunktion, die die genannte Eigenschaft erfüllen, nämlich z. B. die Funktion $f(z) = \sin \frac{\pi}{z}$.

Bemerkung 8.11.

- (a) Da jeder Punkt einer offenen Menge Häufungspunkt dieser Menge ist, ergibt sich aus Folgerung 8.9 insbesondere, dass zwei auf einer zusammenhängenden offenen Menge D definierte holomorphe Funktionen, die auf einer (beliebig kleinen) nicht leeren offenen Teilmenge von D übereinstimmen, bereits auf ganz D übereinstimmen müssen. Der Identitätssatz wird häufig in dieser abgeschwächten Form verwendet.
- (b) Erinnert euch noch einmal an das Maximumprinzip aus Satz 6.14, das besagte, dass eine holomorphe Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, die an einem Punkt $z_0 \in D$ betragsmäßig ein Maximum annimmt, in einer Umgebung von z_0 konstant sein muss. Ist D zusammenhängend, so können wir nun nach dem Identitätssatz aus Folgerung 8.9 sogar schließen, dass f dann auch auf ganz D konstant sein muss. Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für das Minimumprinzip.

Aufgabe 8.12 (Spiegelungsprinzip). Es sei $D \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Menge, die spiegelsymmetrisch zur reellen Achse ist (d. h. es gilt $z \in D \Leftrightarrow \bar{z} \in D$ für alle $z \in \mathbb{C}$). Wir setzen $D^+ := \{z \in D : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ und $D^- := \{z \in D : \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Weiterhin sei $f: D^+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die im Inneren von D^+ holomorph ist und auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt.



Zeige, dass f dann eindeutig zu einer auf ganz D holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann. (Hinweis: Betrachte die Funktion $z \mapsto \bar{f}(\bar{z})$ auf D^- .)

Folgerung 8.13 („Die Nullstellen holomorpher Funktionen sind isoliert“). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sowie $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann gibt es zu jeder Nullstelle von f eine Umgebung, in der keine weitere Nullstelle von f liegt.*

Beweis. Wäre diese Aussage falsch, so gäbe es eine Nullstelle z_0 von f , so dass in jeder Umgebung von z_0 noch eine weitere Nullstelle von f liegt. Die Menge der Nullstellen von f hätte dann also den Häufungspunkt z_0 . Nach dem Identitätssatz müsste f damit bereits die Nullfunktion sein, was wir aber ausgeschlossen haben. \square

Aufgabe 8.14. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Man zeige: Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit $fg = 0$, so ist $f = 0$ oder $g = 0$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch den Satz beweisen, dass das Bild einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung immer offen ist.

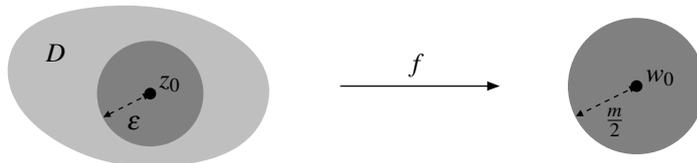
Satz 8.15. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend sowie $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante holomorphe Funktion. Dann ist $f(D) \subset \mathbb{C}$ offen.*

Beweis. Es sei $w_0 \in f(D)$, also $w_0 = f(z_0)$ für ein $z_0 \in D$. Wir müssen zeigen, dass es eine offene Kreisscheibe um w_0 gibt, die noch ganz in $f(D)$ liegt.

Nach Folgerung 8.13 gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion $z \mapsto f(z) - w_0$ keine Nullstelle außer z_0 im abgeschlossenen Kreis $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\} \subset D$ besitzt. Dann ist

$$m := \min_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z) - w_0| > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass der Kreis um w_0 mit Radius $\frac{m}{2}$ noch in $f(D)$ liegt.



Es sei also $w \in \mathbb{C}$ mit $|w - w_0| < \frac{m}{2}$ beliebig. Zu diesem Punkt w betrachten wir nun die Funktion $g: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - w$:

- Für $z \in D$ mit $|z - z_0| = \varepsilon$ ist

$$|g(z)| = |f(z) - w| \geq |f(z) - w_0| - |w_0 - w| > m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2};$$

- für $z = z_0$ ist $|g(z)| = |f(z_0) - w| = |w_0 - w| < \frac{m}{2}$.

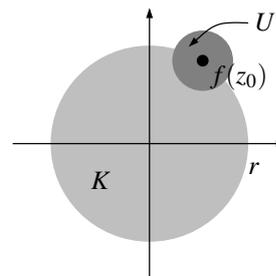
Insbesondere ist die holomorphe Funktion g im Mittelpunkt z_0 des Kreises K also betragsmäßig kleiner als überall auf dem Rand ∂K . Nach dem Minimumprinzip aus Folgerung 6.17 ergibt sich damit, dass g in K eine Nullstelle haben muss, d. h. dass es ein $z \in K$ gibt mit $f(z) = w$. Also liegt w in $f(K) \subset f(D)$, was zu zeigen war. \square

Bemerkung 8.16. Eine Funktion, die offene Mengen auf offene Mengen abbildet, wird in der Regel **offene Funktion** genannt – man verwechsle dies nicht mit der bekannten Eigenschaft stetiger Funktionen, dass *Urbilder* offener Mengen wieder offen sind [G2, Satz 24.17]! In diesem Sinne besagt Satz 8.15 also, dass (nicht-konstante) holomorphe Funktionen stets offen sind.

Weiterhin ist klar, dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung stets wieder zusammenhängend ist [G2, Satz 24.22 (a)]. Da wir offene zusammenhängende Mengen in Definition 5.7 (a) auch als Gebiet bezeichnet haben, kann man Satz 8.15 also auch so formulieren, dass (nicht-konstante) holomorphe Funktionen Gebiete auf Gebiete abbilden. Die Aussage dieses Satzes wird deswegen auch oft als **Gebietstreue** bezeichnet.

Beispiel 8.17. Satz 8.15 ist vor allem deswegen nützlich, weil er einige unserer bereits bekannten Resultate zusammenfasst und verallgemeinert:

- Aus Satz 8.15 ergibt sich sofort, dass holomorphe Funktionen, deren Bild komplett in einer „eindimensionalen Menge“ liegt (also z. B. auf der reellen oder imaginären Achse, auf einer Kreislinie, usw.) konstant sein müssen, da nicht-leere Teilmengen dieser „eindimensionalen Mengen“ niemals offen in \mathbb{C} sein können. Auf diese Art erhalten wir also z. B. sehr einfache Lösungen für die Probleme aus Aufgabe 2.19 (b) und (c).
- Auch das Maximumprinzip folgt aus Satz 8.15: Angenommen, es wäre $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so dass $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in D$ ein lokales Maximum hätte. Nach evtl. Verkleinern von D können wir annehmen, dass $|f|$ sogar ein globales Maximum in z_0 hat. Ist $r := |f(z_0)|$, so läge das Bild $f(D)$ also vollständig im rechts hell eingezeichneten Kreis $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Nach Satz 8.15 ist $f(D)$ aber offen, muss also um den Punkt $f(z_0)$ noch eine Umgebung U dieses Punktes enthalten – was ein Widerspruch ist, da keine solche Umgebung noch vollständig im Kreis K liegt.



Aufgabe 8.18. Beweise die folgende komplexe Version der *Regel von de l'Hôpital* [G2, Satz 11.1]: Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$. Existiert dann der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$, so gilt auch

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

9. Laurent-Reihen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir gesehen, dass sich holomorphe Funktionen lokal um jeden Punkt z_0 in eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickeln lassen, und daraus viele interessante Eigenschaften holomorpher Funktionen hergeleitet. Wir wollen diese Idee nun dahingehend verallgemeinern, dass wir in diesen Reihen auch negative Potenzen von $z-z_0$ zulassen. Die Untersuchung dieser neuen Reihen wird ganz analog zu der von Potenzreihen verlaufen, aber trotzdem am Ende wieder einige neue interessante Resultate abwerfen.

Definition 9.1 (Laurent-Reihen). Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine **Laurent-Reihe** um z_0 ist ein Ausdruck der Form

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n}_{=:f^-(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{=:f^+(z)}$$

für gewisse $a_n \in \mathbb{C}$. Dabei nennen wir f^- (die Summe der Terme mit negativen Exponenten von $z-z_0$) den **Hauptteil** und f^+ (die Summe der restlichen Terme) den **Nebenteil** von f .

Wie bei Potenzreihen wollen wir natürlich als Erstes untersuchen, für welche Werte z eine gegebene Laurent-Reihe konvergiert. Dabei ist von vornherein schon einmal klar, dass wir – falls mindestens ein Koeffizient a_n mit $n < 0$ ungleich Null ist – den Wert $z = z_0$ prinzipiell nicht einsetzen dürfen, da in diesem Fall schon der einzelne Term $a_n(z-z_0)^n$ nicht definiert wäre.

Bemerkung 9.2. Beachte, dass wir den „doppelten Grenzwert“ in den Laurent-Reihen, also die Summe von $-\infty$ bis ∞ , durch Aufspalten der Summe in zwei Teile f^+ und f^- in zwei einfache Grenzwerte verwandelt haben – eine Laurent-Reihe f konvergiert für ein z also *nach Definition* genau dann, wenn die Reihen $f^+(z)$ und $f^-(z)$ konvergieren. Dies ist z. B. *nicht* das gleiche wie die evtl. auch naheliegende Festlegung

$$f(z) \stackrel{?}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(z-z_0)^n, \quad (*)$$

wie das Beispiel der Laurent-Reihe

$$f(z) = \dots + z^{-3} - z^{-2} + z^{-1} - z + z^2 - z^3 \pm \dots,$$

also

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ (-1)^n & \text{für } n > 0, \\ (-1)^{n+1} & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

zeigt: Setzen wir hier z. B. $z = 1$ ein, so gilt $\sum_{n=-N}^N a_n z^n = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, d. h. der Grenzwert (*) ist gleich Null. Die Laurent-Reihe ist für $z = 1$ jedoch *nicht* konvergent, da $f^+(1) = -1 + 1 - 1 \pm \dots$ (und analog auch $f^-(1)$) divergiert.

Bemerkung 9.3. Schreiben wir die Laurent-Reihe aus Definition 9.1 als

$$f(z) = f^-(z) + f^+(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z-z_0} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

so sehen wir sofort, dass f^- und f^+ einfach Potenzreihen (in $\frac{1}{z-z_0}$ bzw. $z-z_0$) sind. Wir können unsere Resultate über Potenzreihen aus Kapitel 7 also ganz einfach auf den Fall von Laurent-Reihen übertragen. Sind z. B. $\frac{1}{r}$ und R die Konvergenzradien dieser beiden Potenzreihen f^- bzw. f^+ , so ist nach den Bemerkungen 7.2 und 9.2 klar, dass die Laurent-Reihe konvergiert, wenn $\left| \frac{1}{z-z_0} \right| < \frac{1}{r}$ (also

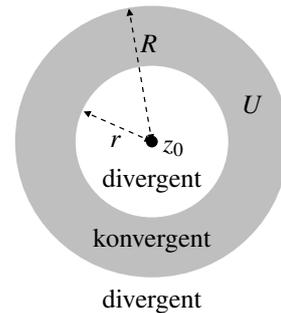
$|z - z_0| > r$) und $|z - z_0| < R$ gilt, und dass sie divergiert, falls $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$ ist. Damit ergibt sich sofort das folgende Resultat:

Folgerung 9.4. *Es sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Laurent-Reihe. Ferner seien $\frac{1}{r}$ und R wie oben die Konvergenzradien des Hauptteils f^- bzw. Nebenteils f^+ dieser Reihe – es ist nach Bemerkung 7.2 also*

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Dann gilt:

- (a) Die Reihe $f(z)$ ist (absolut) konvergent für alle z in dem Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$. Sie ist divergent für alle z mit $|z - z_0| < r$ oder $|z - z_0| > R$. Auf dem Rand, also falls $|z - z_0| = r$ oder $|z - z_0| = R$ ist, kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten.
- (b) Die Konvergenz ist gleichmäßig in z auf jedem kompakten Kreisring um z_0 , der ganz in U liegt (siehe Bemerkung 7.2).



Wir nennen U den **Konvergenzring** von f (beachte, dass U auch leer sein kann, falls nämlich $r \geq R$ ist).

Bemerkung 9.5.

- (a) Ein wichtiger Spezialfall von Folgerung 9.4 ist der, wenn $\frac{1}{r} = \infty$, der innere Radius r also gleich Null ist – was z. B. stets dann passiert, wenn der Hauptteil f^- nur aus endlich vielen Termen besteht und somit stets konvergiert. In diesem Fall ist der „Kreisring“ $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ einfach eine „punktierte Kreisscheibe“, also eine Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt. Wir werden diesen Spezialfall in Kapitel 10 noch genauer untersuchen.
- (b) Da eine Laurent-Reihe einfach die Summe zweier Potenzreihen (in $z - z_0$ bzw. $\frac{1}{z - z_0}$) ist, ist aufgrund von Folgerung 7.6 klar, dass eine solche Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion darstellt und ihre Ableitungen wie erwartet gliedweise berechnet werden können.

Beispiel 9.6.

- (a) Wir betrachten die Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \underbrace{\frac{1}{z}}_{f^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} z^n}_{f^+}.$$

Der Hauptteil f^- ist ein Polynom in $\frac{1}{z}$ und „konvergiert“ damit natürlich für alle $z \neq 0$. Der Nebenteil f^+ hat bekanntlich Konvergenzradius 1 und ist einfach gleich der geometrischen Reihe. Also ist der Konvergenzring von f der Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, und die dort durch f dargestellte holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{z(1 - z)}.$$

- (b) Für die nur aus dem Hauptteil bestehende Laurent-Reihe

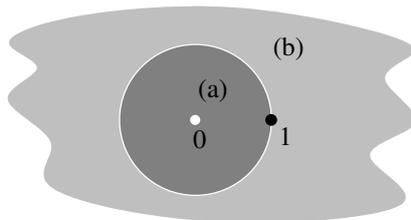
$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

ist der Konvergenzradius des Hauptteils wieder gleich 1, und der Konvergenzradius des (nicht existierenden) Nebenteils trivialerweise ∞ . Also ist der Konvergenzring von f gleich

$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z|\}$. Die auf diesem Gebiet durch f dargestellte Funktion lässt sich wieder mit Hilfe der geometrischen Reihe einfacher hinschreiben:

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z(1-z)}.$$

Wir erhalten also dieselbe Funktion wie in (a) – nur in einem anderen (disjunkten) Kreisring! Das folgende Bild verdeutlicht dies.



$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

$$\text{in (a): } f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

$$\text{in (b): } f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

Aufgabe 9.7.

(a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+2^n} (z-1)^n$?

(b) Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Was ist dann der Konvergenzring der Laurent-Reihe $g(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{|n|} z^n$? Welche Funktion wird durch g dargestellt?

Wir haben gerade schon festgestellt, dass jede Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzring eine holomorphe Funktion definiert. Die besondere Bedeutung der Laurent-Reihen liegt nun darin, dass – wie ihr vielleicht schon erwartet – genau wie bei Potenzreihen auch hier die Umkehrung gilt, also dass sich jede holomorphe Funktion auf jedem Kreisring, der noch im Definitionsgebiet liegt, dort in eine Laurent-Reihe entwickeln lässt. Dies besagt der folgende Satz, dessen Aussage und Beweis völlig analog zu Satz 7.10 sind:

Satz 9.8 (Laurent-Entwicklung holomorpher Funktionen). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiterhin seien $z_0 \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig in D !) und $r < R$ reelle Zahlen, so dass der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ ganz in D liegt. Dann gilt:*

(a) Die Funktion f lässt sich auf U als Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

schreiben (deren Konvergenzring U enthält).

(b) Die Koeffizienten dieser Reihe sind eindeutig; sie sind bestimmt durch die Formel

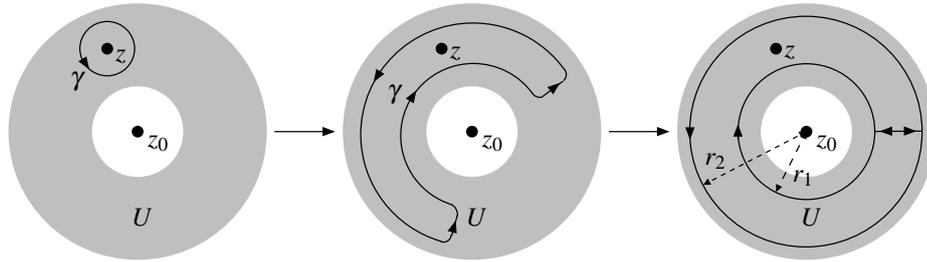
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

für ein beliebiges ρ mit $r < \rho < R$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.10 gilt zunächst für alle $z \in U$ aufgrund der Cauchyschen Integralformel aus Satz 6.7

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für eine Kreislinie γ , die wie im folgenden Bild links in U liegt und einmal um den Punkt z herumläuft:



Nach der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (siehe Folgerung 5.3 (a)) können wir diesen Weg nun durch einen anderen in $U \setminus \{z\}$ homotopen Weg ersetzen, denn der Integrand ist auf dieser Menge holomorph. Wie im Bild oben „ziehen wir ihn dazu im Kreisring U auseinander“, bis er aus zwei Kreislinien um z_0 (mit Radien r_1 und r_2 , wobei $r_1 < |z - z_0| < r_2$) besteht, die in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und durch ein Geradenstück miteinander verbunden sind (das in beiden Richtungen durchlaufen wird und sich damit weghebt). Es gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(\underbrace{\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(A)} - \underbrace{\int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{(B)} \right).$$

Den Term (A) behandeln wir nun wörtlich genauso wie im Beweis von Satz 7.10: Wir schreiben

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} dw$$

und können den rechten Faktor im Integranden wegen $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$ in die geometrische Reihe entwickeln:

$$(A) = \int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{w-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw = \int_{|w-z_0|=r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \cdot (z-z_0)^n dw.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden können wir die Summe mit dem Integral vertauschen und erhalten so die Potenzreihe

$$(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n.$$

Den Term (B) können wir ganz analog behandeln: Hier schreiben wir allerdings

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} dw$$

und entwickeln den rechten Faktor im Integranden wegen $\left| \frac{w-z_0}{z-z_0} \right| = \frac{r_1}{|z-z_0|} < 1$ in die folgende geometrische Reihe:

$$(B) = - \int_{|w-z_0|=r_1} \frac{f(w)}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n dw = - \int_{|w-z_0|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot (w-z_0)^n dw.$$

Vertauschen wir auch hier wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden die Summe mit dem Integral, so erhalten wir die Laurent-Reihe

$$(B) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{|w-z_0|=r_1} f(w) (w-z_0)^n dw \right) (z-z_0)^{-n-1}.$$

Also lassen sich sowohl (A) als auch (B) – und damit auch f – in U als Laurent-Reihen schreiben. Dies zeigt Teil (a) des Satzes.

Für die Eindeutigkeit und die Formel aus (b) sei nun $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine solche Darstellung als Laurent-Reihe. Für alle ρ mit $r < \rho < R$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^{k-n-1} dz = a_n$$

nach Beispiel 3.11 (b). □

Beispiel 9.9.

- (a) Liegt in Satz 9.8 nicht nur der Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, sondern sogar die ganze Kreisscheibe $U' = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ in D , so erhalten wir unsere Taylor-Entwicklung aus Satz 7.10 zurück: Dann ist nämlich zunächst für $n < 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 0$$

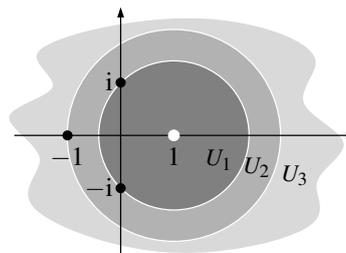
nach der Cauchyschen Integralformel aus Satz 4.1, da der Integrand dann holomorph in U' ist. Für $n \geq 0$ hingegen stimmt die in Satz 9.8 angegebene Formel für die Koeffizienten a_n mit der aus Satz 7.10 überein. Die Taylor-Entwicklung ist also ein Spezialfall der Laurent-Entwicklung.

- (b) Analog zu Beispiel 7.11 können wir auch im Fall von Laurent-Reihen holomorpher Funktionen oft die Konvergenzgebiete angeben, ohne die Reihen explizit zu kennen. Wollen wir z. B. die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z^4}$$

(die genau in den vierten Einheitswurzeln nicht definiert ist) als Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt 1 schreiben, so gibt es wie im Bild rechts genau drei maximale Kreisringe mit Mittelpunkt 1, auf denen f holomorph ist, nämlich

$$\begin{aligned} U_1 &= \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}, \\ U_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 2\}, \\ U_3 &= \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-1|\}. \end{aligned}$$



Also besitzt f nach Satz 9.8 genau drei Laurent-Entwicklungen mit Entwicklungspunkt 1, nämlich je eine in U_1 , U_2 und U_3 .

- (c) In manchen Fällen kann man die Laurent-Entwicklung einer holomorphen Funktion auch aus bekannten Reihenentwicklungen gewinnen. So ergibt sich z. B. die Laurent-Reihe der Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ auf dem Kreisring $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach aus der Definition der Exponentialfunktion als

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}.$$

Aufgabe 9.10. Wie viele verschiedene Laurent-Reihen mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ besitzt die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2}$? Berechne diese Reihen explizit und gib ihre Konvergenzringe an.

10. Isolierte Singularitäten

Der wichtigste Spezialfall von Laurent-Reihen (und in der Tat auch der, den wir ab jetzt nur noch betrachten werden) ist der, bei dem der innere Radius des Konvergenzringes 0 ist, der Konvergenzring also die Form $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \text{ und } z \neq z_0\}$ hat. Wir untersuchen damit also Funktionen, die holomorph in einer Umgebung eines Punktes z_0 – mit Ausnahme des Punktes z_0 selbst – sind. Solche „isolierten Definitionslücken“ holomorpher Funktionen, die natürlich in der Praxis oft vorkommen, werden in der Regel *isolierte Singularitäten* genannt.

Definition 10.1 (Singularitäten). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

- (a) Ist $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ ein isolierter Punkt von $\mathbb{C} \setminus D$, d. h. gibt es eine Umgebung von z_0 in \mathbb{C} , in der z_0 der einzige Punkt von $\mathbb{C} \setminus D$ ist, so nennt man z_0 eine (**isolierte**) **Singularität** von f .
- (b) Lässt sich f in diesem Fall zu einer holomorphen Funktion auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzen, so bezeichnet man die isolierte Singularität z_0 als **hebbare Singularität**.

Beispiel 10.2.

- (a) Die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ hat die isolierten Singularitäten 0 und 1. Davon ist der Punkt 1 natürlich eine hebbare Singularität, da man f problemlos auch auf den Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph fortsetzen kann – man könnte anschaulich auch sagen, der Punkt 1 ist „gar keine“ Singularität von f . Der Punkt 0 dagegen ist keine hebbare Singularität, denn wegen $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ lässt sich f nicht einmal stetig in diesen Punkt hinein fortsetzen.
- (b) Nicht immer ist eine hebbare Singularität so einfach als solche zu erkennen wie in (a). Betrachten wir z. B. die Funktion

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$$

mit isolierter Singularität in 0, so gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Die Funktion f ist also eine Potenzreihe in z und damit insbesondere auch in den Nullpunkt hinein als holomorphe Funktion fortsetzbar mit Funktionswert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(n+1)!} = 1$. Also ist der Nullpunkt eine hebbare Singularität von f .

Wie oben schon angedeutet wollen wir nun unsere Theorie der Laurent-Reihen auf solche isolierten Singularitäten anwenden.

Definition 10.3. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ferner sei $z_0 \in D$, oder $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f .

Nach Definition 10.1 liegt der Kreisring $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ dann für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ noch ganz in D . In diesem Kreisring besitzt f nach Satz 9.8 eine eindeutig bestimmte Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die wir die **Laurent-Entwicklung von f in z_0** nennen (und die offensichtlich nicht von ε abhängt).

Ist außerdem f nicht gleich der Nullfunktion auf $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ und damit die Laurent-Reihe nicht identisch gleich Null, so nennen wir die kleinste auftretende Potenz von $z - z_0$ in dieser Reihe, also

die Zahl

$$\text{ord}_{z_0} f := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\} & \text{falls diese Menge nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

die **Ordnung** von f in z_0 .

09

Wir können uns die Ordnung einer holomorphen Funktion in einer isolierten Singularität – sofern sie nicht $-\infty$ ist – wie folgt vorstellen:

Lemma 10.4. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin sei $z_0 \in D$, oder $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f . Wir nehmen an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion sowie $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ ist.*

Dann ist die Ordnung $\text{ord}_{z_0} f$ die eindeutig bestimmte Zahl $m \in \mathbb{Z}$, für die es eine holomorphe Funktion $g: D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

für alle $z \in D$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer solchen Darstellung. Es sei dazu $m = \text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$. Wir setzen $g: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto (z - z_0)^{-m} f(z)$ und müssen zeigen, dass g in z_0 eine hebbare Singularität mit Funktionswert ungleich 0 hat. Dazu entwickeln wir f in einer Umgebung von z_0 in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit $a_m \neq 0$, woraus wir auch sofort die entsprechende Laurent-Reihe

$$g(z) = (z - z_0)^{-m} f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

für g erhalten. Da dies offensichtlich eine Potenzreihe mit konstantem Term $g(z_0) = a_m \neq 0$ ist, erhalten wir also eine Darstellung für f wie in der Behauptung des Lemmas.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Exponenten in dieser Darstellung zu zeigen. Angenommen, es wäre $f(z) = (z - z_0)^{m_1} g_1(z) = (z - z_0)^{m_2} g_2(z)$ für alle $z \in D$ und zwei verschiedene Exponenten m_1 und m_2 , o. B. d. A. mit $m_1 < m_2$, wobei wieder g_1 und g_2 holomorph mit $g_1(z_0) \neq 0$ und $g_2(z_0) \neq 0$ sind. Dann wäre

$$g_1(z) = (z - z_0)^{m_2 - m_1} g_2(z) \quad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_0\},$$

und wegen der Stetigkeit beider Seiten sogar für alle $z \in D \cup \{z_0\}$. Einsetzen von $z = z_0$ liefert dann aber einen Widerspruch, weil die linke Seite ungleich 0, die rechte dagegen gleich 0 ist. \square

Die Ordnung einer holomorphen Funktion in einem Punkt lässt sich also offensichtlich als „Null- oder Polstellenordnung“ interpretieren: Da in der Darstellung $f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$ wie oben die Funktion g holomorph in z_0 mit $g(z_0) \neq 0$ ist, können wir den Punkt z_0 je nach Vorzeichen von m als „ m -fache Nullstelle“ bzw. „ $(-m)$ -fache Polstelle“ ansehen. Wir fassen dies in der folgenden Definition zusammen, die das Konzept der Null- und Polstellen von rationalen Funktionen auf beliebige holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten erweitert:

Definition 10.5 (Arten von Singularitäten). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f . Wir nehmen wieder an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion ist. Ferner sei $m = \text{ord}_{z_0} f$.*

- (a) Ist $m > 0$, so heißt z_0 eine **Nullstelle** der Ordnung m von f .
- (b) Ist $m < 0$ und $m \neq -\infty$, so heißt z_0 eine **Polstelle** der Ordnung $-m$ von f .
- (c) Ist $m = -\infty$, so heißt z_0 eine **wesentliche Singularität** von f .

Beispiel 10.6.

(a) Nach Lemma 10.4 ist

$$\text{ord}_0 \frac{1}{z^2 \cos z} = \text{ord}_0 \left(z^{-2} \cdot \frac{1}{\cos z} \right) = -2,$$

denn die Funktion $g(z) = \frac{1}{\cos z}$ ist holomorph mit Funktionswert ungleich 0 in 0. Also hat $\frac{1}{z^2 \cos z}$ eine doppelte Polstelle in 0.

(b) Die Ordnung der Sinusfunktion im Nullpunkt ergibt sich mit Definition 10.3 direkt aus der Potenzreihenentwicklung zu

$$\text{ord}_0 \sin z = \text{ord}_0 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) = 1.$$

Es liegt hier also eine einfache Nullstelle vor.

(c) Eine wesentliche Singularität hingegen hat die Funktion $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ im Nullpunkt, denn es gilt

$$\text{ord}_0 e^{\frac{1}{z}} = \text{ord}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = -\infty.$$

Bemerkung 10.7.

(a) Aus Lemma 10.4 folgt offensichtlich

$$\text{ord}_{z_0} (f_1 \cdot f_2) = \text{ord}_{z_0} f_1 + \text{ord}_{z_0} f_2 \quad \text{und} \quad \text{ord}_{z_0} \frac{1}{f} = -\text{ord}_{z_0} f$$

für holomorphe Funktionen $f, f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität z_0 , sofern diese Ordnungen nicht $-\infty$ sind. Mit Beispiel 10.6 (b) ist also z. B.

$$\text{ord}_0 \frac{1}{\sin z} = -\text{ord}_0 \sin z = -1.$$

Für Funktionen mit wesentlichen Singularitäten sind diese Formeln jedoch in der Regel falsch: So haben z. B. $e^{\frac{1}{z}}$ und $e^{-\frac{1}{z}}$ beide im Nullpunkt die Ordnung $-\infty$, ihr Produkt hingegen ist konstant 1 und hat damit die Ordnung 0.

(b) Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f . Dann ist die Ordnung $\text{ord}_{z_0} f$ nach Definition genau dann größer oder gleich 0, wenn f eine Potenzreihe lokal um z_0 ist, was nach Folgerung 8.1 wiederum genau dann der Fall ist, wenn f holomorph in $D \cup \{z_0\}$ ist. Wir sehen also, dass z_0 genau dann eine hebbare Singularität ist, wenn $\text{ord}_{z_0} f \geq 0$ gilt.

Aufgabe 10.8. Liegt für die folgenden Funktionen f im Nullpunkt eine hebbare Singularität / Nullstelle (welcher Ordnung) / Polstelle (welcher Ordnung) / wesentliche Singularität vor?

- (a) $f(z) = \frac{\sin(z^3)}{e^{\cos z} - 1}$;
- (b) $f(z) = z \cdot \log z$;
- (c) $f(z) = z^n \cdot e^{z+\frac{1}{z}}$ (für $n \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 10.9. Es sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Man zeige:

- (a) Ist z_0 eine Null- oder Polstelle von f , so hat die Funktion $\frac{f'}{f}$ eine Polstelle der Ordnung 1 in z_0 .
- (b) Die Funktion $g(z) = e^{f(z)}$ kann keine Polstelle in z_0 haben.

Aufgabe 10.10.

- (a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$?
- (b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(n) = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$?

Aus unseren Untersuchungen folgt nun ein sehr einfaches (und überraschendes) Kriterium dafür, wann eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f hebbar ist, die Funktion f also holomorph nach z_0 fortgesetzt werden kann: Es reicht dafür schon aus, dass f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist!

Satz 10.11 (Riemannscher Hebbarkeitssatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f .*

Gibt es dann eine Umgebung U von z_0 , so dass $U \setminus \{z_0\}$ ganz in D liegt und f auf dieser Menge beschränkt ist, so ist z_0 eine hebbare Singularität von f .

Beweis. Wir können annehmen, dass U eine Kreisscheibe um z_0 ist. Ferner sei M eine obere Schranke für $|f|$ auf $U \setminus \{z_0\}$, und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass die Kreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$ noch ganz in U liegt. Für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

von f in z_0 gilt dann

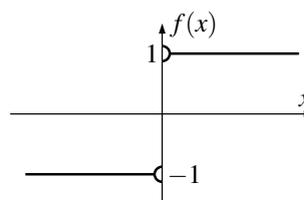
$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=\varepsilon} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right| && \text{(Satz 9.8 (b))} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varepsilon \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} \left| \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \right| && \text{(Lemma 4.4 (b))} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \max_{|w-z_0|=\varepsilon} |f(w)| \\ &\leq \frac{M}{\varepsilon^n}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$, so sehen wir also, dass $a_n = 0$ für $n < 0$ ist. Damit ist f lokal eine Potenzreihe um z_0 und somit holomorph fortsetzbar nach z_0 . \square

Bemerkung 10.12.

- (a) Beachte, dass die zu Satz 10.11 analoge Aussage in der reellen Analysis natürlich falsch ist: Eine differenzierbare Funktion, die z. B. auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und dort beschränkt ist, muss damit noch lange nicht als differenzierbare Funktion nach \mathbb{R} fortsetzbar sein – wie das Beispiel der Vorzeichenfunktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



zeigt, die sich nicht einmal stetig in den Nullpunkt hinein fortsetzen lässt.

- (b) Insbesondere folgt aus Satz 10.11, dass eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität z_0 , die *stetig* nach z_0 fortsetzbar ist, automatisch auch *holomorph* nach z_0 fortsetzbar ist (denn wenn f stetig in z_0 ist, ist f natürlich insbesondere in einer Umgebung von z_0 beschränkt). Auch hier ist die entsprechende Aussage im Reellen natürlich falsch.
- (c) Mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz lässt sich die Aussage des Satzes 8.2 von Liouville noch etwas verallgemeinern: eine beschränkte holomorphe Funktion, die auf ganz \mathbb{C} mit Ausnahme einiger (nicht notwendig endlich vieler) isolierter Singularitäten holomorph ist, ist nun nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zunächst in die isolierten Singularitäten holomorph fortsetzbar, und dann als ganze Funktion nach dem Satz von Liouville wieder konstant.

Aufgabe 10.13. Es seien $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass dann ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit $f = \lambda g$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch das Verhalten holomorpher Funktionen in der Umgebung von isolierten Singularitäten untersuchen.

Bemerkung 10.14 (Meromorphe Funktionen). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f . Ist z_0 keine wesentliche Singularität von f , so ist das Verhalten von f für $z \rightarrow z_0$ klar:

- (a) Ist $\text{ord}_{z_0} f \geq 0$, also z_0 hebbbar und f damit insbesondere nach z_0 stetig fortsetzbar, so konvergiert f für $z \rightarrow z_0$ natürlich gegen den Funktionswert $f(z_0)$.
- (b) Ist $\text{ord}_{z_0} f < 0$ und $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$, hat f also eine Polstelle in z_0 , so können wir f nach Lemma 10.4 als $\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ mit $m = -\text{ord}_{z_0} f$ schreiben, wobei g holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ mit $g(z_0) \neq 0$ ist. Es gilt dann also

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Man schreibt dies der Einfachheit halber auch oft als $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ und sagt wie im Reellen, dass f für $z \rightarrow z_0$ (im uneigentlichen Sinne) gegen ∞ konvergiert. Wir könnten in diesem Fall also sinnvoll „ $f(z_0) := \infty$ “ setzen. In der Tat ist es möglich, das Konzept stetiger und sogar holomorpher Funktionen mit Zielbereich $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ so zu definieren, dass die so konstruierte Fortsetzung in $D \cup \{z_0\}$ dann holomorph wird.

In der Literatur werden solche Funktionen, die auf einer offenen Menge mit Ausnahme von nicht-wesentlichen isolierten Singularitäten holomorph sind, als *meromorphe Funktionen* bezeichnet.

Das Verhalten in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist dagegen deutlich komplizierter. In diesem Fall nähern sich die Funktionswerte von f für $z \rightarrow z_0$ weder einer komplexen Zahl noch streben sie gegen ∞ :

Satz 10.15 (Satz von Casorati-Weierstraß). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und z_0 ein Punkt von D oder eine isolierte Singularität von f . Wir nehmen wieder an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion ist. Dann sind äquivalent:

- (a) $\text{ord}_{z_0} f = -\infty$, d. h. f hat eine wesentliche Singularität in z_0 .
- (b) Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \setminus \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in \mathbb{C} im Sinne von Aufgabe 8.5, d. h. für jede nicht-leere offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ ist $f(U \setminus \{z_0\}) \cap V \neq \emptyset$. (Anschaulich bedeutet dies also, dass f „in jeder Umgebung von z_0 jeder komplexen Zahl beliebig nahe kommt“.)

Beweis. Für die Richtung „(a) \Rightarrow (b)“ nehmen wir an, dass die Aussage (b) falsch ist, d. h. dass es eine offene Umgebung U von z_0 und eine nicht-leere offene Menge V gibt mit $f(U \setminus \{z_0\}) \cap V = \emptyset$. Dabei können wir V durch eventuelles Verkleinern als Kreisscheibe $V = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \varepsilon\}$ für gewisse $w_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ wählen. Dies bedeutet dann aber gerade, dass

$$|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Die holomorphe Funktion

$$g: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z) - w_0}$$

ist daher wohldefiniert und beschränkt (durch $\frac{1}{\varepsilon}$). Nach dem Riemannschen Hebbbarkeitssatz 10.11 lässt sich g also zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzen. Damit hat

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)}$$

aber im Punkt z_0 entweder eine hebbare Singularität (falls $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (der Ordnung $\text{ord}_{z_0} g$, falls $g(z_0) = 0$). Auch die Aussage (a) ist damit also falsch, was den Beweis der Richtung „(a) \Rightarrow (b)“ beendet.

Die umgekehrte Richtung „(b) \Rightarrow (a)“ ist dagegen klar nach Bemerkung 10.14, denn für eine isolierte Singularität z_0 mit $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ konvergiert $f(z)$ für $z \rightarrow z_0$ stets gegen eine komplexe Zahl oder gegen

∞ , so dass das Bild $f(U \setminus \{z_0\})$ für eine genügend kleine Umgebung U von z_0 nicht dicht in \mathbb{C} liegen kann. \square

Aufgabe 10.16. Es sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Beweise, dass f von der Form $z \mapsto az + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ sein muss.

(Hinweis: Zeige zunächst mit dem Satz 10.15 von Casorati-Weierstraß, dass die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine wesentliche Singularität im Nullpunkt haben kann.)

11. Die Umlaufzahl und der Residuensatz

Wir wollen uns nun noch einmal mit der Berechnung geschlossener Wegintegrale beschäftigen. Sind $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein geschlossener Weg in D , so haben wir für die Berechnung von $\int_{\gamma} f(z) dz$ bisher die folgenden Hilfsmittel kennengelernt:

- Besitzt f eine Stammfunktion auf D , so ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ (siehe Lemma 3.10).
- Ist γ in D zusammenziehbar (z. B. weil D einfach zusammenhängend ist), so ist $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ (siehe Folgerung 5.3 (b)).
- Ist z_0 eine isolierte Singularität von f , ist γ eine hinreichend kleine geschlossene Kreislinie um z_0 und f von der Form $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und einer auf $D \cup \{z_0\}$ holomorphen Funktion g , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot g^{(n)}(z_0)$$

nach der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel aus Satz 7.10 (b).

Wir wollen in diesem Kapitel nun einen Satz herleiten, der diese bisherigen Hilfsmittel wesentlich verallgemeinert und in „nahezu allen“ Fällen eine einfache Berechnung des Integrals $\int_{\gamma} f(z) dz$ ermöglicht (also ohne Stammfunktionen zu kennen oder die Wegintegrale nach Definition auszurechnen). Dieser sogenannte *Residuensatz* ist wahrscheinlich der wichtigste Satz dieser Vorlesung. Er hat seinerseits natürlich wieder viele Anwendungen, von denen wir einige im Anschluss an dieses Kapitel noch sehen werden.

10

Bemerkung 11.1. Als ersten Schritt auf dem Weg zum Residuensatz wollen wir zuerst zwar beliebige geschlossene Integrationswege γ zulassen, für den Integranden jedoch noch annehmen, dass er die spezielle Form $(z - z_0)^n$ hat für ein $n \in \mathbb{Z}$ und ein z_0 , das nicht auf dem Integrationsweg liegt. Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, ist dies der entscheidende Schritt, denn eine beliebige holomorphe Funktion können wir ja dann später durch Reihenentwicklung einfach als Summe solcher speziellen Integranden schreiben.

Der Fall $n \neq -1$ ist natürlich sehr einfach zu behandeln: Da in diesem Fall $(z - z_0)^n$ die Stammfunktion $\frac{(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ besitzt, ist jedes geschlossene Wegintegral über diese Funktion 0 nach Lemma 3.10. Interessant ist also nur der Fall $n = -1$, d. h. wir wollen das Integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ für einen beliebigen Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ berechnen. Um die Notation etwas zu vereinfachen, machen wir zunächst die Substitution

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_{\gamma'} \frac{dz}{z},$$

wobei $\gamma': t \mapsto \gamma(t) - z_0$ der um $-z_0$ verschobene Weg γ ist. Von diesem Integral wissen wir aber bereits nach Aufgabe 3.13, dass das Ergebnis immer $2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist. Wir haben in dieser Aufgabe sowie in Beispiel 5.4 auch bereits gesehen, dass diese Zahl k interpretiert werden kann als die Anzahl, „wie oft der Weg γ' um 0 (bzw. γ um z_0) herum läuft“.

Diese Beobachtungen müssen wir jetzt in exakte mathematische Aussagen umwandeln. Wie oft in der Mathematik zäumen wir dafür das Pferd von hinten auf und *definieren* zunächst einmal die Zahl k oben als die Umlaufzahl von γ um z_0 :

Definition 11.2 (Umlaufzahl). Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Die (nach Bemerkung 11.1 ganze) Zahl

$$\text{ind}_{z_0} \gamma := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$$

heißt **Index** oder **Umlaufzahl** von γ um z_0 .

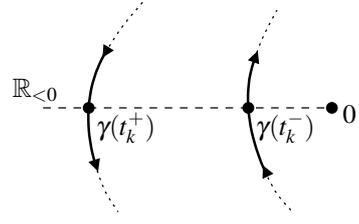
Der folgende Satz sieht zwar etwas kompliziert aus, ist aber sehr einfach anzuwenden und sagt uns letztlich, dass unsere Definition der Umlaufzahl auch wirklich das tut, was wir erwarten. Wie in Bemerkung 11.1 erläutert können wir nach einer Substitution o. B. d. A. $z_0 = 0$ annehmen.

Satz 11.3 (Geometrische Deutung der Umlaufzahl). *Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein geschlossener Weg, der die negative reelle Achse n -mal von oben nach unten und m -mal von unten nach oben durchkreuzt. Mit anderen Worten setzen wir voraus, dass es verschiedene Punkte $t_1^+, \dots, t_n^+, t_1^-, \dots, t_m^- \in (a, b)$ gibt, so dass gilt:*

- (a) *es ist $\arg \gamma(t) = \pi$ genau dann, wenn $t = t_k^+$ oder $t = t_k^-$ für ein k , d. h. der Weg trifft die negative reelle Achse $\mathbb{R}_{<0}$ genau für die Parameterwerte t_k^+ und t_k^- ;*
- (b) *bei t_1^+, \dots, t_n^+ springt $\arg \gamma(t)$ von π nach $-\pi$, d. h. für alle $k = 1, \dots, n$ ist*

$$\lim_{t \uparrow t_k^+} \arg \gamma(t) = \pi \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow t_k^+} \arg \gamma(t) = -\pi;$$
- (c) *bei t_1^-, \dots, t_m^- springt $\arg \gamma(t)$ von $-\pi$ nach π , d. h. für alle $k = 1, \dots, m$ ist*

$$\lim_{t \uparrow t_k^-} \arg \gamma(t) = -\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow t_k^-} \arg \gamma(t) = \pi.$$



Hierbei bezeichnet $\arg \gamma(t) \in (-\pi, \pi]$ den Winkel der komplexen Zahl $\gamma(t)$ wie in Bemerkung 1.10.

Dann gilt $\text{ind}_0 \gamma = n - m$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

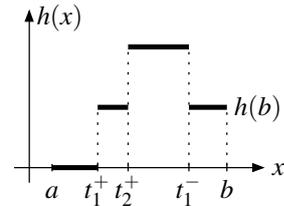
$$h: [a, b] \setminus \{t_1^+, \dots, t_n^+, t_1^-, \dots, t_m^-\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt + \log \gamma(a) - \log \gamma(x),$$

wobei $\log z := \log |z| + i \arg z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ der komplexe Logarithmus aus Aufgabe 3.13 ist. Es gilt offensichtlich:

- $h(a) = 0$ und $h(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{ind}_0 \gamma$;
- für alle x im Definitionsbereich von h ist

$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} - \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} = 0.$$

Die Funktion h ist also lokal konstant und springt damit wie im Bild rechts dargestellt höchstens an den Stellen $t_1^+, \dots, t_n^+, t_1^-, \dots, t_m^-$.

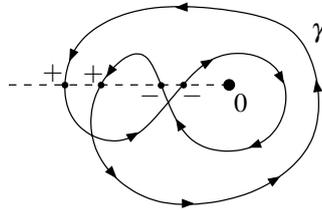


Damit ist $h(b) - h(a) = 2\pi i \text{ind}_0 \gamma$ gleich der Summe der Sprünge, die die Funktion macht. Da in der Definition von h lediglich der letzte Term $-\log \gamma(x)$ Sprungstellen hat, ist der Sprung von h an einer Stelle t_k^+ aber gerade

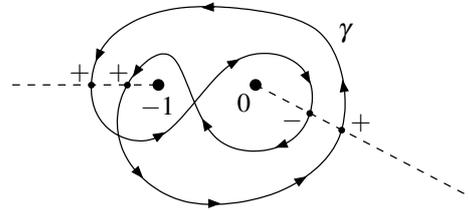
$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (h(t_k^+ + \varepsilon) - h(t_k^+ - \varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-\log \gamma(t_k^+ + \varepsilon) + \log \gamma(t_k^+ - \varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (-\log |\gamma(t_k^+ + \varepsilon)| - i \arg \gamma(t_k^+ + \varepsilon) + \log |\gamma(t_k^+ - \varepsilon)| + i \arg \gamma(t_k^+ - \varepsilon)) \\ &= -\log |\gamma(t_k^+)| + \pi i + \log |\gamma(t_k^+)| + \pi i \\ &= 2\pi i, \end{aligned}$$

und analog an einer Stelle t_k^- gleich $-2\pi i$. Summieren wir alle Sprünge auf, erhalten wir also $2\pi i \text{ind}_0 \gamma = 2\pi i(n - m)$, was zu zeigen war. \square

Beispiel 11.4. Der im Bild unten links dargestellte Weg hat Umlaufzahl $\text{ind}_0 \gamma = 0$ um 0, denn es gibt je zwei Überkreuzungen der negativen reellen Achse von oben nach unten bzw. von unten nach oben (mit „+“ bzw. „-“ gekennzeichnet).



zu Beispiel 11.4



zu Bemerkung 11.5

Bemerkung 11.5.

- Für Umlaufzahlen um andere Punkte als den Nullpunkt ergibt sich natürlich dasselbe Verfahren, nur dass wir dann einen Strahl vom betrachteten Punkt aus nach links ziehen und die Überkreuzungen mit diesem Strahl zählen müssen – so ist z. B. die Umlaufzahl des im Bild oben rechts eingezeichneten Weges um den Punkt -1 gleich $\text{ind}_{-1} \gamma = 2$.
- Aufgrund der Homotopieinvarianz des Wegintegrals aus Folgerung 5.3 (a) ist klar, dass zwei geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ die gleiche Umlaufzahl um z_0 haben, wenn sie homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sind, also durch eine Deformation in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ auseinander hervorgehen (in der Tat kann man zeigen, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt: Wenn die beiden Wege die gleiche Umlaufzahl um z_0 haben, so sind sie homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$). Es ist natürlich auch anschaulich einleuchtend, dass solche homotopen Wege „gleich oft“ um z_0 herum laufen müssen.
- Eine spezielle Homotopie in (b) besteht darin, dass man den gesamten Weg um den Punkt z_0 um einen bestimmten Winkel dreht. Berechnet man von diesem gedrehten Weg die Umlaufzahl um z_0 nach Satz 11.3, so erhält man offensichtlich dasselbe Resultat, als wenn man die Schnittpunkte des ursprünglichen Weges mit der um den entgegengesetzten Winkel gedrehten negativen reellen Achse betrachtet. Wir sehen also, dass wir in Satz 11.3 statt des dort betrachteten, nach links laufenden Strahls von z_0 auch einen beliebigen anderen verwenden können – die positiven bzw. negativen Überkreuzungen verlaufen dann natürlich lediglich nicht mehr „von oben nach unten“ bzw. „von unten nach oben“, sondern sind solche im mathematisch positiven bzw. negativen Drehsinn um z_0 . Im Bild oben rechts ist z. B. eingezeichnet, wie man für den dort betrachteten Weg die Umlaufzahl $\text{ind}_0 \gamma = 0$ auch mit Hilfe eines anderen Strahls bestimmen könnte.
- Insbesondere folgt aus (b) und (c), dass wir Satz 11.3 in jedem Fall zur Berechnung der Umlaufzahl eines Weges um einen Punkt verwenden können, auch wenn die Voraussetzung der endlich vielen Schnittpunkte a priori nicht erfüllt ist: Gibt es z. B. unendlich viele Schnittpunkte mit dem dort betrachteten Strahl nach links, weil der Weg ein Stück weit auf dem Strahl entlang läuft, so können wir einfach einen anderen Strahl betrachten oder den Weg so deformieren, dass es nur noch endlich viele Schnittpunkte gibt.

Nachdem wir nun Wegintegrale der Form $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$ (und insbesondere $\int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz$) ausführlich studiert haben, kommen wir jetzt zum Fall von allgemeinen Integranden. Wie wir am Anfang dieses Kapitels schon erwähnt haben, wollen wir diesen allgemeinen Fall auf die Integrale $\int_{\gamma} (z - z_0)^n dz$ zurückführen, indem wir den Integranden auf geeignete Art in eine Laurent-Reihe entwickeln. Da von diesen Integralen nur der Fall $n = -1$ einen Beitrag liefert, wird der Koeffizient vor $(z - z_0)^{-1}$ in dieser Laurent-Entwicklung eine besondere Rolle spielen. Wir geben ihm daher einen speziellen Namen.

Definition 11.6 (Residuum). Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in D$ oder eine isolierte Singularität von f . Wie in Definition 10.3 können wir f dann in z_0 in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickeln. Mit diesen Notationen heißt der Koeffizient

$$\operatorname{res}_{z_0} f := a_{-1}$$

von $(z - z_0)^{-1}$ in dieser Reihe das **Residuum** von f in z_0 .

Beispiel 11.7.

- (a) Ist f holomorph (fortsetzbar) in z_0 , so ist f natürlich eine Potenzreihe um z_0 und damit $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.
 (b) Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} &= \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots \right) \\ &= \operatorname{res}_0 \left(1 \cdot z^{-3} - \frac{1}{6} \cdot z^{-1} + \frac{1}{120} \cdot z \mp \dots \right) \\ &= -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

wie man sofort durch Reihenentwicklung und Ablesen des Koeffizienten von z^{-1} ermittelt.

Die Berechnung der Laurent-Entwicklung einer gegebenen Funktion ist in der Praxis oft recht aufwendig. Wollen wir nur das Residuum bestimmen, so führt das folgende Lemma im Fall von Polstellen oft schneller zum Ziel:

Lemma 11.8 (Berechnung des Residuums). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f . Hat dann f in z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}_{>0}$ (d. h. ist $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$), so gilt für das Residuum von f in z_0 die Formel*

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)}$$

(wobei das $(m-1)$ rechts oben für die $(m-1)$ -te Ableitung der Funktion in den großen Klammern steht).

Beweis. Ist $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$, so hat die Laurent-Entwicklung von f in z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \dots \end{aligned}$$

Beim $(m-1)$ -fachen Differenzieren dieser Potenzreihe fallen natürlich die Terme mit einer Potenz von $z - z_0$ kleiner als $m-1$ weg, und wir erhalten

$$\left((z - z_0)^m f(z) \right)^{(m-1)} = a_{-1} \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 1 + a_0 \cdot m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (z - z_0) + \dots \quad (*)$$

Bilden wir hier nun den Grenzwert für $z \rightarrow z_0$, so erhalten wir offensichtlich genau $a_{-1} \cdot (m-1)!$, was mit der Definition des Residuums die Behauptung des Lemmas zeigt. \square

Beispiel 11.9.

- (a) Wir wollen mit Hilfe von Lemma 11.8 noch einmal das Residuum $\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4}$ aus Beispiel 11.7 (b) bestimmen. Die betrachtete Funktion hat im Nullpunkt eine dreifache Polstelle (da der Zähler eine einfache und der Nenner eine vierfache Nullstelle hat). Wir könnten Lemma 11.8 also mit $m = 3$ verwenden. Einfacher ist es jedoch, $m = 4$ zu wählen (was im Lemma ja zugelassen ist), da sich in der Formel dann genau der Nenner z^4 weghebt:

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 0} \left(z^4 \cdot \frac{\sin z}{z^4} \right)''' = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \sin'''(z) = -\frac{1}{6} \cos(0) = -\frac{1}{6}.$$

- (b) Besonders einfach wird die Formel aus Lemma 11.8 für $m = 1$, also wenn in z_0 (höchstens) eine einfache Polstelle vorliegt. Dann ergibt sich durch Einsetzen

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Bemerkung 11.10. Gilt die Voraussetzung $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$ in Lemma 11.8 nicht, so enthält die Laurent-Entwicklung von f in z_0 noch Terme mit Potenzen kleiner als $-m$. Dementsprechend wird der Ausdruck (*) im Beweis des Lemmas dann noch negative Potenzen von $z - z_0$ enthalten, also eine nicht hebbare Singularität in z_0 haben. In diesem Fall existiert der im Lemma zu berechnende Grenzwert also nicht in \mathbb{C} .

Man kann Lemma 11.8 also sogar zur Berechnung des Residuums verwenden, ohne vorher die Voraussetzung $\operatorname{ord}_{z_0} f \geq -m$ zu überprüfen: Hat man ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ gewählt, so dass der im Lemma angegebene Grenzwertausdruck für das Residuum in \mathbb{C} existiert, so zeigt diese Tatsache automatisch auch, dass die Voraussetzung in der Tat erfüllt war und die Rechnung korrekt ist.

Aufgabe 11.11. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{ord}_{z_0} f = 0$ und $\operatorname{ord}_{z_0} g = 1$ in einem Punkt $z_0 \in D$. Zeige, dass

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Bemerkung 11.12 (Partialbruchzerlegung mit Residuen). Mit Hilfe von Residuen lässt sich die aus den Grundlagen der Mathematik bekannte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen [G2, Aufgabe 12.44] aus einem ganz anderen Blickwinkel verstehen. Wir betrachten dazu eine meromorphe Funktion der Form

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)}$$

für verschiedene $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und ein komplexes Polynom p von einem Grad kleiner als n . Offensichtlich hat f in jedem Punkt z_k für $k = 1, \dots, n$ höchstens eine einfache Polstelle. Die Laurent-Entwicklung von f in z_k beginnt also mit $\frac{c_k}{z - z_k}$, wobei

$$c_k = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{p(z_k)}{(z_k - z_1) \cdots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_n)} \quad (*)$$

nach Definition 11.6 und Beispiel 11.9 (b) das Residuum von f in z_k ist. Ziehen wir diese singulären Terme von f ab und betrachten

$$g(z) := \frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} - \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - z_k},$$

so enthält die Laurent-Entwicklung dieses Ausdrucks um z_k also keine negativen Potenzen von $z - z_k$ mehr. Damit werden alle Singularitäten hebbar, und g ist eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion. Da der Grad von p aber kleiner als n ist, konvergiert g außerdem für $|z| \rightarrow \infty$ gegen 0. Dies bedeutet zum einen, dass g beschränkt und somit nach dem Satz 8.2 von Liouville konstant ist, und zum anderen, dass diese Konstante auch gleich 0 sein muss. Damit erhalten wir also die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - z_k}$$

mit den durch (*) bestimmten Konstanten c_k .

Beispiel 11.13. Wollen wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2z-1}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-2} + \frac{c_3}{z-3}$$

finden, so erhalten wir mit Bemerkung 11.12 unmittelbar

$$c_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{(2-1)(2-3)} = -3, \quad c_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{(3-1)(3-2)} = \frac{5}{2}.$$

11

Wir haben nun alle Vorarbeiten für den bereits angekündigten Residuensatz geleistet. Wie in Bemerkung 11.12 ist auch hierbei die Idee, von einer Funktion mit isolierten Singularitäten die singulären Hauptteile abzuziehen, um eine holomorphe Funktion zu erhalten.

Satz 11.14 (Residuensatz). *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, z_1, \dots, z_m verschiedene Punkte in D , und $f: D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{ind}_{z_k} \gamma \cdot \text{res}_{z_k} f.$$

Beweis. Wir entwickeln den Integranden gemäß Definition 10.3 in jedem Punkt z_k in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z-z_k)^n}_{=: f_k^-} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} (z-z_k)^n}_{=: f_k^+}.$$

Beachte dabei, dass diese Darstellung zwar nur lokal um z_k gilt, die Hauptteile f_k^- aber trotzdem auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ definiert sind (denn ihre Konvergenzgebiete sind ja von der Form $\{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_k|\}$, und da wir hier wie in Definition 10.3 die Laurent-Entwicklung in den Punkten z_k betrachten, ist $r = 0$). Die Funktion

$$g: D \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g(z) = f(z) - f_1^-(z) - \dots - f_m^-(z)$$

ist also wohldefiniert und holomorph – wir können uns g so vorstellen, dass wir „von f die singulären Teile subtrahiert haben“. In der Tat ist dieses g nun auch holomorph in die Punkte z_k fortsetzbar, denn lokal um z_k gilt

$$g(z) = \underbrace{(f(z) - f_k^-(z)) - f_1^-(z) - \dots - f_{k-1}^-(z) - f_{k+1}^-(z) - \dots - f_m^-(z)}_{=: f_k^+(z)},$$

und in diesem Ausdruck sind alle Summanden holomorph bei z_k . Also ist g holomorph auf ganz D . Weil D einfach zusammenhängend und γ damit in D zusammenziehbar ist, folgt also $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ und damit durch Einsetzen der Definition von g

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma} f_k^-(z) dz = \sum_{k=1}^m \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_{\gamma} (z-z_k)^n dz.$$

Dabei ergibt sich für die zweite Gleichheit die Vertauschbarkeit des Integrals mit der Summe über n wieder aus der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden gemäß Folgerung 9.4 (b), da das kompakte Bild des Integrationsweges in einem abgeschlossenen Kreisring in $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ liegen muss.

Da die Integrale $\int_{\gamma} (z-z_k)^n dz$ nun nach Bemerkung 11.1 und Definition 11.2 gleich 0 sind für $n \neq -1$ und gleich $2\pi i \cdot \text{ind}_{z_k} \gamma$ für $n = -1$, ergibt sich also

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^m a_{-1}^{(k)} \cdot 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_k} \gamma,$$

woraus wegen $\text{res}_{z_k} f = a_{-1}^{(k)}$ die Behauptung des Satzes folgt. \square

Beispiel 11.15.

- (a) Der einfachste Fall des Residuensatzes ist natürlich, wenn D einfach zusammenhängend und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf ganz D ist, wenn es also keine isolierten Singularitäten gibt. In diesem Fall ist einfach $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in D , wie ja auch aus der Homotopieinvarianz des Wegintegrals folgt (siehe Folgerung 5.3 (b)).
- (b) Es seien D einfach zusammenhängend, $z_0 \in D$, und $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ und eine auf ganz D holomorphe Funktion g . Dann folgt aus dem Residuensatz 11.14 für jeden geschlossenen Weg γ in $D \setminus \{z_0\}$ zunächst natürlich

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \text{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Mit Lemma 11.8 für $m = n + 1$ können wir das hier auftretende Residuum einfach berechnen und erhalten

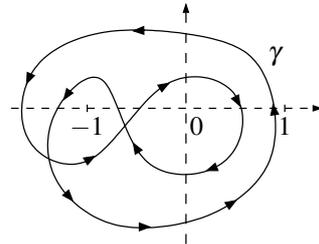
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz &= 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \frac{1}{n!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z - z_0)^{n+1} \cdot \frac{g(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right)^{(n)} \\ &= 2\pi i \cdot \text{ind}_{z_0} \gamma \cdot \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

Ist γ eine Kreislinie um z_0 , so ist nun $\text{ind}_{z_0} \gamma = 1$, und wir erhalten genau die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel aus Satz 7.10 (b). Die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel ist in diesem Sinne also ein einfacher Spezialfall des Residuensatzes.

- (c) Als Beispiel dafür, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene Wegintegrale sehr einfach berechnen kann, wollen wir nun das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z + 1) \sin z} dz$$

entlang des Weges aus Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmen, den wir hier rechts noch einmal dargestellt haben.



Der Integrand hat offensichtlich isolierte Singularitäten bei -1 sowie in den Punkten $k \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wählen wir für D z. B. die Kreisscheibe um 0 mit Radius 3 , so liegt γ ganz in D , und f hat in diesem Gebiet nur die isolierten Singularitäten 0 und -1 . Nach dem Residuensatz ist also

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z + 1) \sin z} dz = 2\pi i \left(\text{ind}_{-1} \gamma \cdot \text{res}_{-1} \frac{1}{(z + 1) \sin z} + \text{ind}_0 \gamma \cdot \text{res}_0 \frac{1}{(z + 1) \sin z} \right).$$

Die hier vorkommenden Umlaufzahlen haben wir bereits in Beispiel 11.4 bzw. Bemerkung 11.5 bestimmt: Es ist $\text{ind}_{-1} \gamma = 2$ und $\text{ind}_0 \gamma = 0$. Also benötigen wir nur das Residuum des Integranden im Punkt -1 , und das ergibt sich aufgrund der dort vorliegenden einfachen Polstelle nach Beispiel 11.9 (b) sofort zu

$$\text{res}_{-1} \frac{1}{(z + 1) \sin z} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z + 1} \cdot \frac{1}{\sin z} = -\frac{1}{\sin 1}.$$

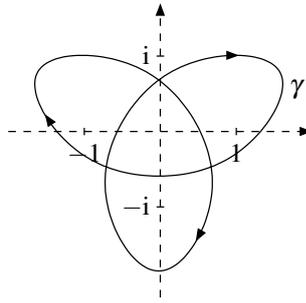
Also erhalten wir für das gesuchte Integral ohne komplizierte Rechnung das Ergebnis

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z + 1) \sin z} dz = -\frac{4\pi i}{\sin 1}.$$

Aufgabe 11.16. Berechne das Wegintegral

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3(z^2 + 1)} dz$$

für den im folgenden Bild eingezeichneten Weg γ :



Aufgabe 11.17. Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend, $z_0 \in D$ und $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

Zeige, dass das Residuum $\text{res}_{z_0} f$ die eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist, für die die auf $D \setminus \{z_0\}$ holomorphe Funktion $f(z) - \frac{c}{z-z_0}$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 11.18. Es sei f eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} . Wir nehmen an, dass $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ gilt.

Zeige, dass f dann eine rationale Funktion ist, also von der Form $\frac{p}{q}$ für zwei komplexe Polynome p und q .

Bemerkung 11.19 (Vereinfachte Schreibweisen des Residuensatzes). In vielen Fällen lässt sich der Residuensatz 11.14 etwas einfacher hinschreiben:

- (a) Ist D offen und einfach zusammenhängend und f auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten holomorph, so schreibt man für einen geschlossenen Weg γ in D , der die Singularitäten von f nicht trifft, die Formel des Residuensatzes oft einfach als

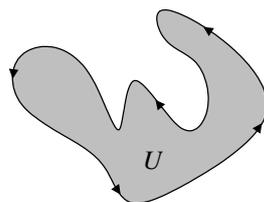
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in D} \text{ind}_z \gamma \cdot \text{res}_z f.$$

Natürlich steht hier nun auf der rechten Seite eigentlich eine Summe über alle (überabzählbar vielen) Punkte von D – aber da das Residuum von f nach Beispiel 11.7 (a) in allen Punkten gleich 0 ist, in denen keine isolierte Singularität vorliegt, ist die Konvention hier natürlich einfach, dass diese Summe als endliche Summe über die isolierten Singularitäten zu verstehen ist.

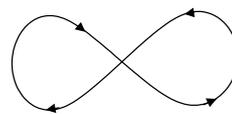
- (b) Ein geschlossener Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine **Randkurve**, wenn die Umlaufzahl $\text{ind}_z \gamma$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ gleich 0 oder 1 ist. In diesem Fall nennen wir

$$U = \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) : \text{ind}_z \gamma = 1\} \quad \text{das Innere und} \\ \{z \in D \setminus \gamma([a, b]) : \text{ind}_z \gamma = 0\} \quad \text{das Äußere von } \gamma$$

und sagen auch, dass γ eine Randkurve von U ist. Anschaulich bedeutet dies einfach, dass der Weg wie im folgenden Bild links einmal um U herum läuft. Das rechte Bild dagegen zeigt keine Randkurve, weil die Umlaufzahl des Weges um die Punkte im linken Gebiet der „Acht“ gleich -1 ist.



Randkurve von U



keine Randkurve

Im Fall einer Randkurve γ mit Innerem U vereinfacht sich die Aussage des Residuensatzes offensichtlich zu

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \operatorname{res}_z f,$$

wobei γ wieder in einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge D liegt und f auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten in $D \setminus \gamma([a, b])$ holomorph ist.

12. Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz

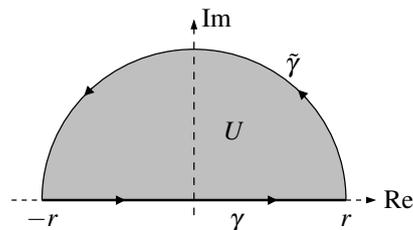
Wir haben gerade gesehen, dass man mit Hilfe des Residuensatzes nahezu beliebige geschlossene komplexe Kurvenintegrale berechnen kann. In diesem Kapitel wollen wir nun zeigen, dass sich manchmal auch *reelle* Integrale sehr einfach mit dem Residuensatz berechnen lassen – unter anderem auch einige, an die man mit den „normalen“ Methoden der reellen Analysis nicht heran kommt, weil man keine Stammfunktion des Integranden angeben kann. Es handelt sich hierbei immer um bestimmte Integrale (also Integrale mit festen Integrationsgrenzen), und dabei oftmals um uneigentliche Integrale z. B. der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

wobei f eine reelle Funktion ist, die im Unendlichen schnell genug abfällt, so dass das Integral (im Riemannsches Sinne) konvergiert.

Die Idee, wie man solche Integrale unter Umständen mit Hilfe der Funktionentheorie berechnen kann, ist schnell erklärt: Im eben genannten Fall mit Integrationsgrenzen von $-\infty$ bis ∞ betrachten wir das reelle Integral zunächst einmal von $-r$ bis r für große $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und interpretieren es als komplexes Wegintegral

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\gamma} f(z) dz$$



über den rechts eingezeichneten Weg γ , der auf der reellen Achse von $-r$ nach r verläuft.

Wir versuchen nun, die ursprünglich gegebene Funktion f in einer *reellen* Variablen zu einer holomorphen Funktion in einer *komplexen* Variablen zu erweitern – bei den Standardfunktionen wie z. B. Polynomen, Exponential- oder Winkelfunktionen bzw. Kombinationen davon ist dies natürlich einfach möglich. Damit können wir dann den Integrationsweg γ mit einem weiteren Wegstück $\tilde{\gamma}$ in der komplexen Ebene so ergänzen, dass sich insgesamt eine *geschlossene* Kurve ergibt – z. B. durch einen Halbkreisbogen wie im Bild oben rechts. Mit dem Residuensatz aus Bemerkung 11.19 können wir das Integral über f entlang dieses geschlossenen Weges dann einfach berechnen und erhalten

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \in U} \operatorname{res}_z f. \quad (*)$$

In dieser Situation betrachten wir nun den Grenzwert für $r \rightarrow \infty$, also einen immer größer werdenden Halbkreis. Wenn der Integrand „im Unendlichen schnell genug abfällt“, können wir hoffen, dass das Integral über den immer weiter nach außen laufenden Halbkreisbogen $\tilde{\gamma}$ gegen Null konvergiert. Gelingt es uns, dies zu zeigen, bleibt in (*) im Grenzfall also nur noch das Integral über γ und damit das gesuchte uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ übrig, das wir dann durch (einfach berechenbare) Residuen von f ausgedrückt haben.

Wir werden dieses Verfahren in diesem Kapitel für reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x dx$$

durchführen, wobei p und q jeweils beliebige Polynomfunktionen sind (und q keine reellen Nullstellen hat, so dass der Integrand auf der gesamten reellen Achse definiert ist). In jedem dieser Fälle erhalten wir so ein sehr einfaches Resultat für diese Integrale. Analoge Techniken können auch für viele andere Typen von Integranden bzw. andere Integrationsgrenzen eingesetzt werden, allerdings muss natürlich in jeder Klasse von Beispielen erneut überprüft werden, dass das „Schließen des Integrationsweges im Komplexen“ das Resultat nicht ändert, also z. B. im Fall oben dass das Integral

über $\tilde{\gamma}$ im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ wirklich gegen 0 konvergiert. Da diese Abschätzungen in der Regel nur wenig spannend sind, werden wir weitere Beispiele hier nur als Übungsaufgaben erwähnen.

Definition 12.1 (Rationale Funktionen und ihr Grad). Es seien $p, q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reelle Polynome, die nicht identisch 0 sind und Grad k bzw. l haben. Dann heißt die Abbildung

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $U = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ eine (reelle) **rationale Funktion** vom **Grad** $\deg f := k - l$.

Bemerkung 12.2.

- (a) Natürlich können wir jede reelle rationale Funktion f auch als komplexe meromorphe Funktion auffassen, indem wir komplexe Zahlen in die Polynome einsetzen. Wir werden diese „komplexifizierte Funktion“ im Folgenden der Einfachheit halber ebenfalls mit f bezeichnen.
- (b) Haben p und q in Definition 12.1 Leitkoeffizient 1, so wissen wir nach Lemma 6.19, dass es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|p(z)| \leq \frac{3}{2}|z|^k$ und $|q(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^l$, also mit

$$|f(z)| = \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \frac{\frac{3}{2}|z|^k}{\frac{1}{2}|z|^l} = 3|z|^{k-l}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Für eine allgemeine rationale Funktion vom Grad $k - l$, also einen Quotienten von Polynomen vom Grad k bzw. l mit beliebigen Leitkoeffizienten, erhalten wir also die Abschätzung $|f(z)| \leq c|z|^{k-l}$ für geeignete Konstanten $c, R \in \mathbb{R}_{>0}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$.

Als Erstes müssen wir eine Aussage der eindimensionalen reellen Analysis zeigen, die mit Funktionentheorie eigentlich nichts zu tun hat: nämlich dass das uns interessierende Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ konvergiert und als Grenzwert der Integrale $\int_{-r}^r f(x) dx$ mit symmetrischen Integrationsgrenzen für $r \rightarrow \infty$ berechnet werden kann. Beachte, dass dies nicht offensichtlich ist, da uneigentliche Riemann-Integrale mit beidseitig unendlichen Integrationsgrenzen zunächst einmal als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^c f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_c^r f(x) dx$$

(mit einer beliebigen Zwischenstelle c) über zwei separate Grenzwerte definiert sind, die beide existieren müssen [G2, Definition 12.27 (b)].

Lemma 12.3. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die es Konstanten $c, R \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $|f(x)| \leq cx^{-2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq R$ (nach Bemerkung 12.2 (b) also z. B. eine reelle rationale Funktion vom Grad höchstens -2 ohne reelle Polstellen).

Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die beiden Grenzwerte in der Summe

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{-R} f(x) dx + \int_{-R}^R f(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx$$

in \mathbb{R} existieren, denn nach der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals [G2, Definition 12.27 (b)] und der Additivität des Integrals [G2, Satz 12.14] ist diese Summe dann gleich dem gesuchten uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, und nach den Grenzwertsätzen dann auch gleich $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$. Wir zeigen die Existenz für den zweiten Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx$; für den ersten ist die Argumentation natürlich analog.

Es seien $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := \min(f, 0)$ der positive bzw. negative Anteil von f , so dass also $f_+ \geq 0$, $f_- \leq 0$, und $f = f_+ + f_-$ gilt. Dann genügt es wiederum, die Existenz des Grenzwerts

$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_+(x) dx$ (und analog $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_-(x) dx$) zu beweisen, denn nach den Grenzwertsätzen existiert dann auch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r (f_+(x) + f_-(x)) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_+(x) dx + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_R^r f_-(x) dx.$$

Dies folgt nun aber sofort, da die Funktion $r \mapsto \int_R^r f_+(x) dx$ wegen $f_+ \geq 0$ monoton wachsend, und wegen

$$\int_R^r f_+(x) dx \leq \int_R^r c x^{-2} dx = [-c x^{-1}]_R^r = cR^{-1} - cr^{-1} \leq cR^{-1}$$

nach oben beschränkt ist. \square

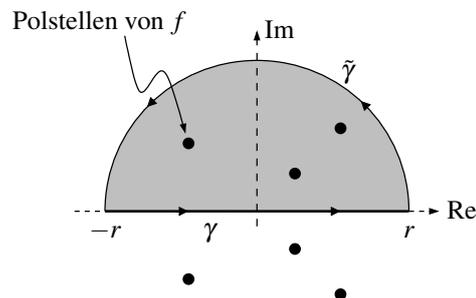
Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um die in der Einleitung dieses Kapitels motivierte Residuenformel für Integrale über rationale Funktionen zu beweisen.

Satz 12.4. *Es sei f eine reelle rationale Funktion mit $\deg f \leq -2$, die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f,$$

d. h. man erhält (bis auf einen Vorfaktor $2\pi i$) genau die Summe der Residuen von f in den Polstellen der oberen Halbebene.

Beweis. Es seien c und R wie in Bemerkung 12.2 (b). Für genügend große $r \geq R$ liegen alle Polstellen von f der oberen Halbebene wie im folgenden Bild bereits im Halbkreis über der Strecke $[-r, r] \subset \mathbb{C}$.



Nach dem Residuensatz wie in Bemerkung 11.19 gilt dann

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f \quad (*)$$

mit den Wegen γ und $\tilde{\gamma}$ wie im Bild. Das zweite Integral können wir dabei mit Lemma 4.4 (b) durch

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz \right| \leq L(\tilde{\gamma}) \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \pi r \cdot c r^{-2} = \frac{\pi c}{r}$$

abschätzen. Dieser Ausdruck konvergiert aber für $r \rightarrow \infty$ gegen 0, und so erhalten wir aus (*) für $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z f.$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma 12.3. \square

Bemerkung 12.5. Vielleicht überrascht euch das Auftreten des Faktors i in der Formel aus Satz 12.4 etwas, da das zu berechnende Integral natürlich reell sein muss. In der Tat wird aber auch die Summe der zu berechnenden Residuen immer rein imaginär sein, so dass sich insgesamt wie erwartet ein reelles Endresultat ergibt.

Beispiel 12.6. Wir wollen für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

berechnen. Dazu müssen wir nach Satz 12.4 (beachte, dass der Integrand Grad $-2n$ und keine reellen Polstellen hat) lediglich die komplexen Polstellen des Integranden suchen und an den Polstellen mit positivem Imaginärteil die Residuen aufaddieren. Das ist hier sehr einfach: Wegen

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^n} = \frac{1}{(z + i)^n (z - i)^n}$$

gibt es nur die beiden Polstellen $\pm i$, von denen nur $+i$ in der oberen Halbebene liegt. Also ist das gesuchte Integral gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = 2\pi i \operatorname{res}_i \frac{1}{(z^2 + 1)^n}.$$

Das Residuum können wir nun noch einfach mit Lemma 11.8 berechnen: Da bei $+i$ eine Polstelle der Ordnung n vorliegt, ist

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i \frac{1}{(1 + z^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} \left((z-i)^n \cdot \frac{1}{(z^2 + 1)^n} \right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} ((z+i)^{-n})^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} (-n)(-n-1) \cdots (-2n+2)(z+i)^{-2n+1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \cdot (2i)^{-2n+1} \\ &= -\frac{i}{2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \frac{\pi}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1}.$$

In diesem Beispiel hätten wir das Integral genauso gut mit Hilfe reeller Stammfunktionen berechnen können, auch wenn die entsprechende Rechnung weit aufwendiger gewesen wäre. Wir wollen daher nun noch andere Funktionen behandeln, bei denen sich mit den üblichen Mitteln der reellen Analysis keine Stammfunktionen ermitteln lassen und die Funktionentheorie die einzige Möglichkeit darstellt, diese Integrale zu berechnen. Wie schon angekündigt handelt es sich dabei um Funktionen, bei denen im Integranden zusätzlich zu einer rationalen Funktion wie oben noch ein Faktor $\cos x$ oder $\sin x$ steht.

Der Einfachheit halber fassen wir diese beiden Fälle zusammen und berechnen für beliebige rationale Funktionen f das komplexwertige Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx,$$

aus dem man die beiden Einzelintegrale durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil natürlich sofort wieder zurückgewinnen kann. Der folgende Satz ist dann sowohl in der Aussage als auch im Beweis völlig analog zu Satz 12.4:

Satz 12.7. *Es sei f eine reelle rationale Funktion mit $\deg f \leq -2$, die auf der reellen Achse keine Polstellen hat. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}).$$

Beweis. Die Beweisidee ist dieselbe wie bei Satz 12.4: Mit denselben Bezeichnungen wie im dortigen Beweis erhalten wir aus dem Residuensatz diesmal die Gleichung

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) e^{iz} dz + \int_{\tilde{\gamma}} f(z) e^{iz} dz = 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}). \quad (*)$$

In diesem Fall können wir das Integral über den Halbkreisbogen mit Lemma 4.4 (b) und Bemerkung 12.2 (b) nun wie folgt abschätzen: Es ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z) e^{iz} dz \right| &\leq L(\tilde{\gamma}) \cdot \max_{\substack{|z|=r \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} |f(z) e^{iz}| \\ &\leq \pi r \cdot \max_{|z|=r} |f(z)| \cdot \max_{\operatorname{Im} z \geq 0} |e^{iz}| \\ &\leq \pi r \cdot c r^{-2} \cdot \max_{\operatorname{Im} z \geq 0} |e^{i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}| \\ &= \pi c r^{-1} \cdot \underbrace{\max_{\operatorname{Im} z \geq 0} e^{-\operatorname{Im} z}}_{=1} \\ &= \frac{\pi c}{r}, \end{aligned}$$

was wiederum für $r \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Damit erhalten wir genau wie im Beweis von Satz 12.4 in diesem Grenzfall aus (*)

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{ix} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \cos x dx + i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \sin x dx. \end{aligned}$$

Nun gilt aber $|f(x) \cos x| \leq |f(x)| \leq c x^{-2}$ (und analog für $f(x) \sin x$) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq R$, und damit können wir diese Gleichung nach Lemma 12.3 wie gewünscht umschreiben zu

$$2\pi i \cdot \sum_{z: \operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z (f(z) e^{iz}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx. \quad \square$$

Beispiel 12.8. Wir berechnen das uneigentliche reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

mit Hilfe von Satz 12.7. Wie in Beispiel 12.6 müssen wir hierzu nur das Residuum im Punkt i berechnen: Es gilt

$$\operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Insgesamt ergibt sich damit also das gesuchte Integral zu

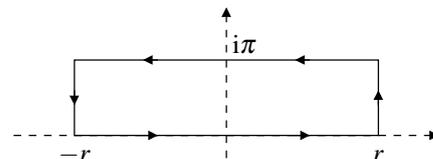
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{res}_i \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) = \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} \right) = \frac{\pi}{e}.$$

Aufgabe 12.9. Zeige mit Hilfe des Residuensatzes, dass $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx = \frac{\pi}{8}$.

Aufgabe 12.10. Berechne das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

mit Hilfe des rechts eingezeichneten Integrationsweges.



Aufgabe 12.11. Berechne das reelle Integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx$.

(Hinweis: Vergleiche das Integral mit dem Wegintegral über $\frac{1}{z^3+1}$ entlang des Strahls $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$.)

13. Abzählen von Null- und Polstellen

Als weitere Anwendung des Residuensatzes wollen wir nun sehen, wie man oft auf einfache Art berechnen kann, wie viele Null- bzw. Polstellen eine gegebene Funktion in einem bestimmten Gebiet hat. Unter anderem wird sich mit dieser Methode ein weiterer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ergeben, der im Gegensatz zu unseren früheren Beweisen (siehe Aufgabe 4.7, Satz 6.20 und Satz 8.7) sehr anschaulich ist und dessen Idee auch ohne jegliche Kenntnisse der Funktionentheorie einfach verständlich ist.

Wir wissen ja bereits aus Bemerkung 11.19, dass ein geschlossenes Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$ über eine Randkurve γ als Ergebnis einfach $2\pi i$ mal die Summe der Residuen von f im Inneren von γ ergibt. Der Schlüssel zur Berechnung der Anzahl der Null- und Polstellen von f im Inneren von γ liegt daher in dem folgenden Lemma, das die Ordnung von f in einem Punkt als ein Residuum ausdrückt:

Lemma 13.1. *Es seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, und $z_0 \in D$ oder $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ eine isolierte Singularität von f . Wir nehmen an, dass f lokal um z_0 nicht gleich der Nullfunktion und $\text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$ ist. Dann gilt*

$$\text{ord}_{z_0} f = \text{res}_{z_0} \frac{f'}{f}.$$

Beweis. Setzen wir $m = \text{ord}_{z_0} f \neq -\infty$, so können wir f auf D nach Lemma 10.4 als

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

schreiben, wobei g eine auf $D \cup \{z_0\}$ holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$ ist. Differenzieren ergibt nun

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und damit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (*)$$

Hierbei ist der Ausdruck $\frac{g'}{g}$ in einer Umgebung von z_0 holomorph und damit dort eine Potenzreihe um z_0 . Entwickelt man $\frac{f'}{f}$ also um z_0 in eine Laurent-Reihe, so liefert der Term $\frac{g'}{g}$ keine Beiträge mit negativen Potenzen von $z - z_0$. Das Residuum von $\frac{f'}{f}$ in z_0 , d. h. nach Definition der Koeffizient von $(z - z_0)^{-1}$ in der Laurent-Entwicklung von $(*)$ um z_0 , ist damit wie behauptet gleich m . \square

Mit dieser Formel ergibt sich nun sofort das folgende Resultat:

Satz 13.2 (Das Null- und Polstellen zählende Integral). *Es sei D offen und einfach zusammenhängend sowie f eine Funktion, die auf D mit Ausnahme endlich vieler isolierter Polstellen holomorph ist. Weiterhin sei γ eine Randkurve in D , die die Null- und Polstellen von f nicht trifft, und U das Innere von γ . Dann gilt*

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

d. h. das Integral auf der rechten Seite ist gleich der Anzahl der Nullstellen minus der Anzahl der Polstellen von f in U (wobei die Null- und Polstellen „mit Vielfachheit gezählt werden müssen“, d. h. eine Null- bzw. Polstelle der Ordnung m trägt m bzw. $-m$ zum Integral auf der rechten Seite bei).

Beweis. Mit dem Residuensatz aus Bemerkung 11.19 ergibt sich sofort nach Lemma 13.1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in U} \text{res}_z \frac{f'}{f} = \sum_{z \in U} \text{ord}_z f. \quad \square$$

Man kann das Ergebnis von Satz 13.2 auch in einer „integralfreien“ Version schreiben:

Folgerung 13.3 (Die Null- und Polstellen zählende Umlaufzahl). *Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 13.2 gilt*

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \text{ind}_0(f \circ \gamma),$$

d. h. die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von f im Inneren von γ ist gleich der Umlaufzahl des Bildweges von γ unter f um 0.

Beweis. Dies ergibt sich sofort aus Satz 13.2, denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{w} dw \quad (\text{mit der Substitution } w = f(z)) \\ &= \text{ind}_0(f \circ \gamma) \quad (\text{Definition 11.2 der Umlaufzahl}). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 13.4. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion $f(z) = z^n$. Weiterhin sei $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius r und Randkurve

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto r e^{it}.$$

Natürlich hat f in U keine Polstellen und (mit Vielfachheiten gezählt) n Nullstellen – nämlich die Nullstelle 0 mit Ordnung n . Dies erhalten wir auch aus Satz 13.2 und Folgerung 13.3:

(a) Das Null- und Polstellen zählende Integral aus Satz 13.2 liefert

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{n z^{n-1}}{z^n} dz = \frac{n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = n$$

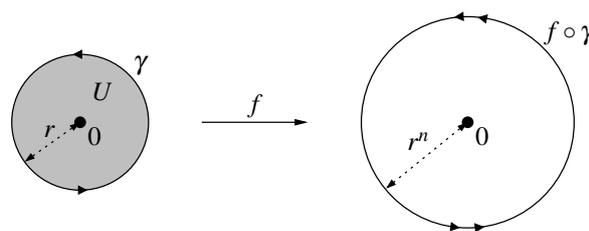
nach Beispiel 3.11 (b).

(b) Bilden wir andererseits den Weg γ mit f ab, so erhalten wir den Bildweg

$$f \circ \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto (r e^{it})^n = r^n e^{int},$$

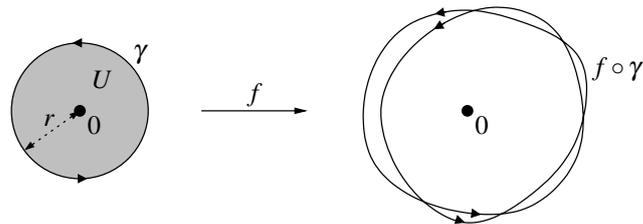
der (mit Radius r^n) wie im Bild unten n -mal um die Null herumläuft. Also liefert auch die Null- und Polstellen zählende Umlaufzahl aus Folgerung 13.3

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \text{ind}_0(f \circ \gamma) = n.$$



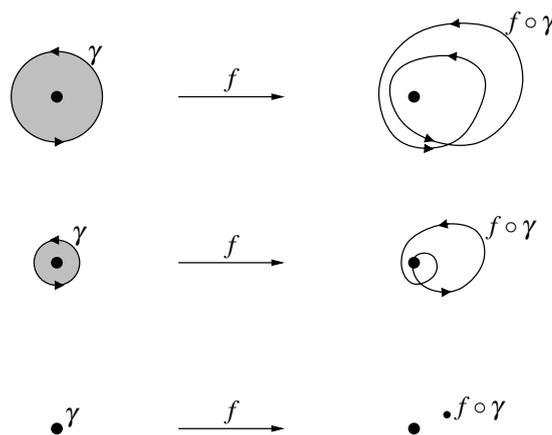
Wenn wir dieses Beispiel etwas erweitern, können wir damit bereits zu einem weiteren und sehr anschaulichen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra kommen. Wir stellen diesen Beweis zunächst informell vor, da man ihn in dieser Form auch mit nur elementaren Kenntnissen über komplexe Zahlen gut nachvollziehen kann. In Satz 13.8 werden wir ihn noch exakt ausführen.

Bemerkung 13.5 (Anschaulicher Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra). Es sei f ein komplexes Polynom vom Grad $n > 0$ mit Leitkoeffizient 1. Wie in Beispiel 13.4 sei γ wieder der Rand des Kreises U mit Mittelpunkt 0 und Radius r . Wählen wir r sehr groß, so ist anschaulich einleuchtend, dass $f(z)$ für Punkte z auf der Kreislinie (also mit $|z| = r$) nahe bei z^n liegen sollte, da die Terme niedrigerer Ordnung für betragsmäßig große z nur eine kleine Rolle spielen. Die Bildkurve $f \circ \gamma$ sollte also nur eine „kleine Deformation“ der Bildkurve in Beispiel 13.4 sein, so wie im folgenden Bild für den Fall $n = 2$ dargestellt:



Insbesondere erwarten wir für $f \circ \gamma$ also immer noch einen Weg, der n -mal um die Null herum läuft (wenn auch nicht mehr auf einer exakten Kreislinie, sondern auf einem etwas deformierten Weg). Mit Folgerung 13.3 würde dies also schon bedeuten, dass f genau n Nullstellen in U hat, und damit insbesondere den Fundamentalsatz der Algebra zeigen. Wir wollen Folgerung 13.3 hier aber nicht voraussetzen, sondern auch dieses Resultat noch anschaulich begründen, so dass wir insgesamt also eine komplett anschauliche Begründung des Fundamentalsatzes erhalten.

Wie also kann man sich anschaulich vorstellen, dass f in U eine Nullstelle besitzen muss, wenn die Umlaufzahl $\text{ind}_0(f \circ \gamma)$ des Bildweges $f \circ \gamma$ um 0 ungleich Null ist? Um dies zu sehen, lassen wir einfach (wie im folgenden Bild von oben nach unten dargestellt) den Radius r des betrachteten Kreises kleiner werden und schließlich gegen 0 gehen, so dass der Weg γ auf einen Punkt (nämlich den Nullpunkt) zusammengezogen wird.



Natürlich ziehen wir damit auch den Bildweg $f \circ \gamma$ auf einen Punkt zusammen. Der ursprüngliche Bildweg hatte aber eine Umlaufzahl ungleich Null um den Nullpunkt und war damit in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht zusammenziehbar. Also muss der Bildweg beim Verkleinern von r irgendwann einmal den Nullpunkt treffen (in der Skizze oben ist dies in der mittleren Zeile der Fall). Genau in diesem Punkt liegt dann aber natürlich eine Nullstelle von f vor, denn es gibt dann ja einen Punkt auf γ , der von f auf 0 abgebildet wird.

Man kann diese Idee auch leicht in der Sprache der Homotopien (siehe Definition 5.1) ausdrücken: Die ursprüngliche Kreislinie γ lässt sich mit der Homotopie

$$\psi: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(t, s) = rs e^{it}$$

auf den Nullpunkt zusammenziehen. Dann ist aber $f \circ \psi$ eine Homotopie zwischen $f \circ \gamma$ und einem konstanten Weg. Da es eine solche Homotopie wegen $\text{ind}_0(f \circ \gamma) \neq 0$ nicht in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ geben kann, muss der Nullpunkt im Bild von $f \circ \psi$ liegen – was dann bedeutet, dass f eine Nullstelle haben muss.

Um dieses anschauliche Argument zu einem exakten Beweis zu machen, müssen wir lediglich noch die obige Aussage, dass „eine leichte Störung an der Funktion f die Umlaufzahl von $f \circ \gamma$ um 0 nicht ändert“, präzise formulieren und beweisen. Wir zeigen dies gleich in einer deutlich allgemeineren Form, die sich auch noch für andere Anwendungen als nützlich erweisen wird.

Satz 13.6 (Satz von Rouché). *Es seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen auf einer offenen und einfach zusammenhängenden Menge $D \subset \mathbb{C}$. Ferner sei γ eine Randkurve in D mit Innerem U . Gilt dann*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

für alle z auf dem Weg γ , so folgt

$$\sum_{z \in U} \text{ord}_z f = \sum_{z \in U} \text{ord}_z g,$$

d. h. f und g haben (mit Vielfachheiten gezählt) gleich viele Nullstellen in U .

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$h_t: D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto g(z) + t(f(z) - g(z)),$$

so dass also $h_0 = g$ und $h_1 = f$ ist. Nach Voraussetzung gilt für alle t und alle z auf dem Weg γ

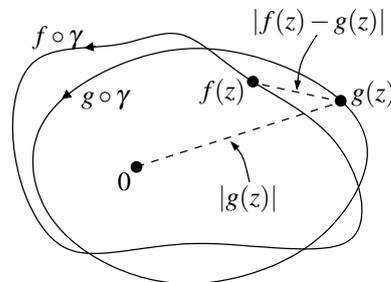
$$|h_t(z)| = |g(z) + t(f(z) - g(z))| \geq |g(z)| - |t| \cdot |f(z) - g(z)| \geq |g(z)| - |f(z) - g(z)| > 0.$$

Also hat h_t keine Nullstellen auf dem Weg γ . Damit ist das Integral

$$N(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h_t'(z)}{h_t(z)} dz$$

wohldefiniert und zählt nach Satz 13.2 die Anzahl der Nullstellen von h_t im Inneren von γ . Beachte, dass der Integrand und damit auch die Funktion $N(t)$ stetig in t ist. Da $N(t)$ aber nur ganzzahlige Werte annehmen kann, muss $N(t)$ also konstant sein. Insbesondere ist daher $N(0) = N(1)$, d. h. $h_0 = g$ und $h_1 = f$ haben gleich viele Nullstellen im Inneren von γ . \square

Bemerkung 13.7. Auch den Satz 13.6 von Rouché kann man anschaulich leicht verstehen. Nach Folgerung 13.3 brauchen wir dazu ja nur zu sehen, dass die beiden Bildwege $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ die gleiche Umlaufzahl um 0 haben. Das folgende Bild illustriert dies in dem Fall, in dem diese Umlaufzahl gleich 1 ist:



Wir sehen an diesem Bild anschaulich, dass die Bedingung $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ auf dem Weg sicherstellt, dass $f \circ \gamma$ genauso oft um die Null herumläuft wie $g \circ \gamma$: Da der Abstand von $f(z)$ zu $g(z)$ stets kleiner ist als der von $g(z)$ zu 0, hat „ $f(z)$ nicht genug Bewegungsfreiheit, um unabhängig von $g(z)$ um die Null herumzulaufen“. Im Sinne von Bemerkung 13.5 können wir g als eine „hinreichend kleine Deformation“ und damit als gute Näherung von f auf γ auffassen. In der Tat war ja auch die Beweisidee von Satz 13.6, die Funktionenschar h_t zu untersuchen, die g für $t \in [0, 1]$ nach f deformiert. Im Sinne von Kapitel 5 bezeichnet man h_t auch hier als eine Homotopie – nur diesmal nicht von Wegen, sondern von holomorphen Funktionen [G3, Kapitel 6].

Anschaulich wird der Satz von Rouché manchmal auch als „der Satz vom Mann, dem Hund und der Laterne“ bezeichnet: Man stelle sich den Nullpunkt als eine Laterne vor, und $g \circ \gamma$ als den Weg eines (wahrscheinlich betrunkenen) Mannes, der um diese Laterne torkelt. Der Mann hat einen Hund an der Leine dabei, den er dabei entlang des Weges $f \circ \gamma$ mit sich mitschleift. Achtet der Mann dabei darauf, dass die Leine zu jedem Zeitpunkt kürzer ist als sein Abstand zur Laterne (d. h. gilt also stets $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$), so muss der Hund am Ende offensichtlich genauso oft um die Laterne gelaufen sein wie der Mann.

Mit dem Satz von Rouché können wir nun die Idee aus Bemerkung 13.5 zu einem exakten Beweis machen:

Satz 13.8 (Fundamentalsatz der Algebra, 4. Beweis). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein nicht-konstantes Polynom mit Leitkoeffizient 1 ist. Mit $g(z) := z^n$ ist dann

$$f(z) - g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

ein Polynom von einem Grad $k \leq n-1$. Nach Lemma 6.19 gibt es also Konstanten $R > 0$ und $c > 0$, so dass

$$|f(z) - g(z)| \leq c|z|^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ gilt. Dann gilt aber auch für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r := \max(R, c+1)$, also für alle z auf einer Kreislinie um 0 mit diesem Radius r

$$|f(z) - g(z)| \leq c \cdot |z|^k = cr^k \leq cr^{n-1} < r \cdot r^{n-1} = |z|^n = |g(z)|.$$

Aus dem Satz 13.6 von Rouché folgt damit, dass f im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ genauso viele Nullstellen hat wie $g(z)$, nämlich n . \square

Bemerkung 13.9. Obwohl wir beim Beweis von Satz 13.8 unsere Ergebnisse der Funktionentheorie benutzt haben, sollte aus der anschaulichen Begründung in Bemerkung 13.5 deutlich geworden sein, dass wir für die dort gegebenen Argumente gar nicht benötigt haben, dass f holomorph ist, sondern dass es eigentlich nur auf die *Stetigkeit* von f ankam (damit der Weg $f \circ \gamma$ kontinuierlich variiert, wenn γ es tut). Wir können diesen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra daher als rein *topologischen Beweis* auffassen – im Gegensatz zu unseren vorherigen Beweisen in Aufgabe 4.7, Satz 6.20 und Satz 8.7, die mit dem Cauchyschen Integralsatz, dem Minimumprinzip bzw. dem Satz von Liouville wirklich charakteristische Eigenschaften *holomorpher* Funktionen benutzen. In der Tat ist es gerade die topologische Natur des neuen Beweises in diesem Kapitel, die es uns ermöglicht, den Beweis anschaulich so leicht nachzuvollziehen.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch an einem Beispiel sehen, wie man mit Hilfe des Satzes von Rouché oft Abschätzungen über die Lage der Nullstellen holomorpher Funktionen gewinnen kann.

Beispiel 13.10. Es sei $f(z) = z^5 + 4z + 2$. Wir wissen natürlich, dass f als Polynom fünften Grades in der komplexen Ebene fünf Nullstellen hat. Es gibt jedoch kein Verfahren, mit dem man diese Nullstellen *exakt* berechnen kann (was übrigens üblicherweise in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“ gezeigt wird). Man ist für die Bestimmung der Nullstellen von f also auf Näherungsverfahren angewiesen.

Mit Hilfe des Satzes von Rouché können wir nun bereits eine erste Abschätzung geben, wo die Nullstellen von f liegen müssen. Dazu müssen wir einfach eine „Vergleichsfunktion“ g und einen Weg γ finden, so dass wir ...

- einerseits zeigen können, dass g auf γ eine hinreichend gute Näherung für f darstellt (also dass dort $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ gilt), und
- andererseits wissen, wie viele Nullstellen g im Inneren von γ hat.

Hierfür haben wir natürlich verschiedene Möglichkeiten. Im konkreten Beispiel unseres hier betrachteten Polynoms können wir z. B. folgende Vergleichsfunktionen wählen:

- (a) Für eine komplexe Zahl z mit $|z| = 2$ „dominiert“ im Polynom f der Term z^5 : Setzen wir hier also $g(z) = z^5$, so folgt für $|z| = 2$

$$|f(z) - g(z)| = |4z + 2| \leq 4|z| + 2 = 10 < 32 = |z^5| = |g(z)|.$$

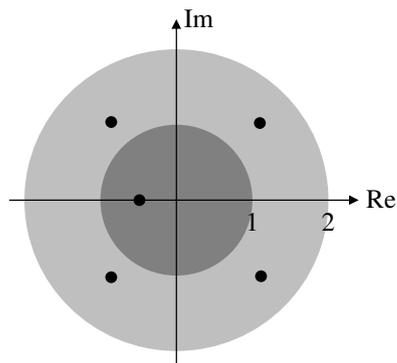
Wählen wir für γ eine Kreislinie mit Radius 2 um 0, so sagt uns der Satz von Rouché also, dass f im Inneren dieses Kreises genau so viele Nullstellen hat wie g , nämlich fünf. Alle Nullstellen von f sind also betragsmäßig kleiner als 2.

- (b) Für $|z| = 1$ hingegen dominiert in f der lineare Term: Setzen wir hier $g(z) = 4z$, so erhalten wir für $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 + 2| \leq |z|^5 + 2 = 3 < 4 = |4z| = |g(z)|.$$

Für diese Wahlen ergibt sich also genauso wie oben, dass f im Kreis um 0 mit Radius 1 genau eine Nullstelle hat (nämlich genau so viele wie g).

Aus diesen beiden – sehr einfachen – Rechnungen folgt also bereits, dass eine der Nullstellen von f Betrag kleiner als 1 hat und der Betrag der anderen vier Nullstellen zwischen 1 und 2 liegt. Natürlich könnten wir auch noch andere Wege oder Vergleichsfunktionen wählen, um diese Abschätzungen noch zu verbessern. Das Bild rechts zeigt übrigens (näherungsweise) die Lage der Nullstellen von f .



Aufgabe 13.11. Zeige mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass

- (a) drei Lösungen der Gleichung $2z^4 + 5z^3 + z - 1 = 0$ betragsmäßig kleiner als 1 sind, und dass der Betrag der vierten Lösung zwischen 2 und 3 liegt;
 (b) die Gleichung $3z^2 + e^z = 0$ im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ genau zwei Lösungen besitzt.

14. Die Riemannsche Zetafunktion

Zum Abschluss dieses Skripts wollen wir noch ein paar sehr interessante Anwendungen unserer erarbeiteten Theorie betrachten, die zum einen enge Beziehungen der Funktionentheorie zur Zahlentheorie und Stochastik aufzeigen und zum anderen auch zu einem der berühmtesten derzeit ungelösten Probleme der Mathematik führen – der sogenannten Riemannschen Vermutung. Das Clay Mathematics Institute, eine große amerikanische Stiftung zur Förderung der mathematischen Forschung, hat diese Vermutung sogar zu einem ihrer „Millennium Problems“ ernannt und für einen korrekten Beweis ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt [C]!

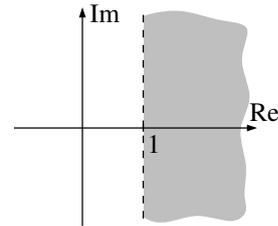
Da es in diesem Kapitel hauptsächlich um die Darstellung von Ideen und Zusammenhängen geht, werden wir hier für die meisten Aussagen nur noch die Beweiseideen angeben und für einen kompletten, korrekten Beweis (insbesondere was Konvergenzabschätzungen betrifft) auf die Literatur verweisen.

Der Schlüssel zu den Anwendungen der Funktionentheorie in der Zahlentheorie ist die sogenannte Riemannsche Zetafunktion, die wir jetzt einführen werden. Wir benötigen dazu die allgemeine komplexe Potenz aus Aufgabe 7.16.

Lemma und Definition 14.1 (Die Riemannsche Zetafunktion). *Die Reihe*

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

*konvergiert (absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$. Die zugehörige Funktion $\zeta: \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ auf dem rechts eingezeichneten Gebiet wird die **Riemannsche Zetafunktion** genannt.*



Beweis. Schreiben wir wie üblich $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, so gilt nach der Definition der komplexen Potenz aus Aufgabe 7.16

$$|n^z| = |e^{z \log n}| = |e^{(x+iy) \log n}| = |e^{x \log n}| \cdot \underbrace{|e^{iy \log n}|}_{=1} = n^x.$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

und diese reelle Reihe ist bekanntlich konvergent für $x > 1$ [G2, Aufgabe 12.42 (b)]. Also konvergiert die Reihe der Zetafunktion absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$. \square

Bemerkung 14.2.

- Man kann leicht zeigen, dass die Zetafunktion in ihrem Definitionsbereich sogar holomorph ist. Dazu genügt es nach Satz 7.5, durch eine einfache Abschätzung nachzuweisen, dass die durch formales Ableiten gebildete Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\log n}{n^z}$ auf jeder Menge $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$ mit $a \in \mathbb{R}_{>1}$ gleichmäßig konvergiert.
- Die Riemannsche Zetafunktion ist ein Spezialfall von sogenannten *Dirichlet-Reihen*, die allgemein die Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

mit komplexen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ haben. In der Tat werden wir in Satz 14.8 noch eine weitere Dirichlet-Reihe sehen, die den Kehrwert $z \mapsto \frac{1}{\zeta(z)}$ der Zetafunktion darstellt.

Dirichlet-Reihen sind in gewissem Sinne analog zu Potenzreihen, nur dass hier die Variable z im Exponenten und der Summationsindex n in der Basis der Potenz steht, während dies bei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ja genau umgekehrt ist. Dementsprechend haben viele Resultate für Potenzreihen auch ein Analogon für Dirichlet-Reihen – z. B. haben auch die Konvergenzgebiete von Dirichlet-Reihen immer eine feste Form; sie sind nämlich stets Halbebenen der Form $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (im Gegensatz zu Kreisscheiben für Potenzreihen). Genauere Informationen zu Dirichlet-Reihen finden sich z. B. in [FB, Kapitel VII.2].

Wir wollen nun die grundlegenden Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion studieren. Als Erstes wird man sich wahrscheinlich fragen, ob man zumindest einige spezielle Werte der Zetafunktion exakt berechnen kann. Der naheliegendste Wert ist dabei wohl

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

den man ja bereits in den „Grundlagen der Mathematik“ als eine der ersten Reihen kennenlernt, von denen man zwar die Konvergenz beweisen, jedoch zumindest mit einfachen Methoden nicht den Wert bestimmen kann [G2, Beispiel 7.19 (a)].

Mit Hilfe der Funktionentheorie können wir diesen Wert nun mit einer einfachen (und sehr überraschenden) Argumentation berechnen. Sie beruht letztlich darauf, wie bei der Partialbruchzerlegung in Bemerkung 11.12 oder beim Residuensatz 11.14 von einer geeigneten Funktion mit isolierten Singularitäten die Hauptteile abzuziehen.

Satz 14.3. *Es gilt*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweisidee. Um die Herleitung dieser Gleichung kurz zu halten und auf die wesentlichen Punkte zu reduzieren, geben wir hier nur die Beweisidee an. Die genauen Rechnungen (die allesamt einfach sind) kann man z. B. in [FB, Satz VII.3.1 und VII.4.1] nachlesen.

Wir betrachten die auf \mathbb{C} meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Sie hat im Nullpunkt offensichtlich einen Pol zweiter Ordnung. In der Tat lassen sich mit unseren Methoden aus den Kapiteln 10 und 11 leicht die ersten Terme der Laurent-Entwicklung von f im Nullpunkt berechnen: Wir erhalten

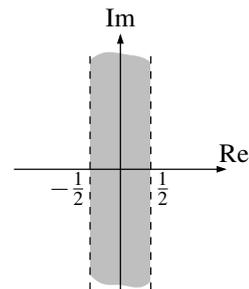
$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + (\text{Terme mit positiven Potenzen von } z) \quad (*)$$

in einer Umgebung von 0. Wir wollen nun den Hauptteil z^{-2} dieser Reihe von f abziehen, um die Singularität dort zu entfernen. Da f offensichtlich periodisch mit Periode 1 ist, tun wir dies gleich an allen ganzen Zahlen und betrachten also die neue Funktion

$$g(z) = f(z) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2},$$

die jetzt um 0 holomorph ist. Da sie damit im rechts eingezeichneten Streifen $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ keine Singularitäten besitzt und ebenfalls Periode 1 hat, ist sie auf ganz \mathbb{C} holomorph.

Gleichzeitig zeigt eine einfache Abschätzung aber auch, dass $g(z)$ in diesem Streifen für $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 konvergiert. Damit ist g insbesondere eine auf ganz \mathbb{C} beschränkte holomorphe Funktion, die damit nach dem Satz 8.2 von Liouville konstant sein muss – und zwar wegen der gerade erwähnten Konvergenzaussage gleich 0.



Entwickeln wir g aber nun in eine Laurent-Reihe um 0, so erhalten wir mit (*)

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{z^2} - \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{(-n)^2}}_{=2\zeta(2)} + (\text{Terme mit positiven Potenzen von } z)$$

in einer Umgebung von 0. Da g die Nullfunktion ist, muss hierbei insbesondere der z^0 -Koeffizient verschwinden. Also ist $\frac{\pi^2}{3} - 2\zeta(2) = 0$, d. h. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. \square

Bemerkung 14.4. Mit ähnlichen Methoden kann man die Werte der Riemannschen Zetafunktion an allen Punkten der Form $2n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ berechnen [FL, Satz VII.4.1]. Über die anderen Funktionswerte ist aber nur sehr wenig bekannt – diese Werte können in der Regel nur numerisch bestimmt werden.

Wir wollen nun einen ersten Zusammenhang der Riemannschen Zetafunktion mit der Zahlentheorie sehen.

Satz 14.5 (Eulersche Produktformel). Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \zeta(z).$$

Beweisidee. Für eine feste Primzahl p können wir den entsprechenden Faktor im obigen Produkt wegen $|p^{-z}| < 1$ in eine (absolut konvergente) geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{a=0}^{\infty} p^{-az}$$

entwickeln. Sind p_1, \dots, p_m die ersten m Primzahlen, so ist also

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \sum_{a_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{a_m=0}^{\infty} (p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m})^{-z}.$$

Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen können wir dies offensichtlich auch als $\sum_n n^{-z}$ schreiben, wobei n über alle natürlichen Zahlen (außer der 0) läuft, deren Primfaktorzerlegung nur die Primzahlen p_1, \dots, p_m enthält.

Gehen wir in dieser Gleichung nun zum Grenzfalle $m \rightarrow \infty$ über, so erhalten wir (nach einer Konvergenzuntersuchung, die man in [FB, Satz VII.2.8] nachlesen kann) auf der linken Seite das Produkt über alle Primzahlen und auf der rechten die Summe über n^{-z} für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, also genau $\zeta(z)$. \square

Aufgrund dieses Beweises können wir die Eulersche Produktformel also auffassen als eine analytische Version der Aussage, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt.

Als Nächstes wollen wir untersuchen, ob und wo die Riemannsche Zetafunktion Nullstellen besitzt. Am einfachsten sieht man dies, wenn man den Kehrwert $\frac{1}{\zeta(z)}$ ebenfalls als Dirichlet-Reihe gemäß Bemerkung 14.2 (a) schreibt und auf Polstellen untersucht. Die darin auftretenden Koeffizienten sind durch die folgende Funktion gegeben, die ihr vielleicht schon aus der Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“ kennt.

Definition 14.6 (Möbius-Funktion). Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ mit der Primfaktorzerlegung $n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ (mit verschiedenen Primzahlen p_1, \dots, p_m und $a_1, \dots, a_m \geq 1$) definieren wir

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^m & \text{falls } a_1 = \cdots = a_m = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. $\mu(n)$ gibt an, ob n gerade oder ungerade viele verschiedene Primfaktoren hat bzw. ob n einen Primfaktor doppelt besitzt. Die so definierte Funktion $\mu: \mathbb{N}_{>0} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ wird **Möbius-Funktion** genannt.

Bemerkung 14.7 (Verteilung der Werte von μ). Wenn man sich die Werte der Möbius-Funktion ansieht, kann man in ihnen zunächst einmal keinerlei Regelmäßigkeiten oder Häufungen einer der drei Werte $-1, 0$ und 1 feststellen – sie sehen praktisch wie eine Folge von Zufallszahlen aus. Hier ist z. B. ein willkürlich herausgegriffenes Stück der Funktionswerte:

n	\dots	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	\dots
$\mu(n)$	\dots	0	1	0	-1	0	1	0	1	1	-1	0	-1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	-1	\dots

Wir können für große n sogar bestimmen, wie oft $\mu(n)$ den Wert 0 annimmt: Für jede Primzahl p enthält genau eine von p^2 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen den Primfaktor p mindestens doppelt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Menge $\{1, \dots, n\}$ zufällig ausgewählte Zahl den Primfaktor p höchstens einmal enthält, ist für große n also näherungsweise $1 - p^{-2}$ (bzw. sogar exakt dieser Wert, falls n durch p^2 teilbar ist). Für verschiedene Primzahlen sind diese Wahrscheinlichkeiten nach dem chinesischen Restsatz [G1, Satz 11.22] unabhängig, und damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine solche Zahl jeden Primfaktor höchstens einmal enthält und die Möbius-Funktion damit ungleich 0 ist, in etwa

$$\prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-2}) \stackrel{14.5}{=} \frac{1}{\zeta(2)} \stackrel{14.3}{=} \frac{6}{\pi^2} \approx 0,608.$$

Die Möbius-Funktion nimmt also im Mittel für etwa 39,2% aller Zahlen den Wert 0 an.

Ob die Werte 1 und -1 der Möbius-Funktion gleichverteilt sind, ist dagegen eine viel schwierigere Frage. In der Tat ist dies in gewissem Sinne bereits der Inhalt der Riemannschen Vermutung, wie wir in Bemerkung 14.14 und Satz 14.15 sehen werden.

Wie bereits angekündigt können wir nun mit Hilfe der Möbius-Funktion den Kehrwert der Zetafunktion als Dirichlet-Reihe schreiben.

Satz 14.8. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ gilt

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere hat die Zetafunktion für $\operatorname{Re} z > 1$ also keine Nullstellen.

Beweis. Die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung konvergiert für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$, denn wegen $|\mu(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Reihe der Zetafunktion eine nach Lemma 14.1 konvergente Majorante. Weiterhin ist nach Definition der Zetafunktion

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{(mn)^z} \tag{1}$$

Setzen wir hier $N = mn$, so tritt in dieser Reihe ein Term $\frac{1}{N^z}$ für jeden Teiler n von N auf – und dieser hat dann einen Koeffizienten von $\mu(n)$. Also können wir (1) umschreiben als

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{n|N} \mu(n) \right) \frac{1}{N^z}. \tag{2}$$

Nun ist aber für alle $N \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\sum_{n|N} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } N = 1, \\ 0 & \text{für } N > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Für $N = 1$ ist dies offensichtlich – und für $N > 1$ mit Primfaktorzerlegung $N = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ sind die in der Summe (3) auftretenden Teiler, die eine nicht-verschwindende Möbius-Funktion besitzen, gerade die 2^k Zahlen $p_1^{b_1} \dots p_k^{b_k}$ mit $b_1, \dots, b_k \in \{0, 1\}$, von denen offensichtlich jeweils genau die Hälfte die Möbius-Funktion 1 bzw. -1 haben. Vielleicht kennt ihr die Aussage (3) auch bereits aus der „Elementaren Zahlentheorie“ als einen Spezialfall des sogenannten Möbiusschen Umkehrsatzes.

Setzt man nun (3) in (2) ein, so erhält man schließlich wie behauptet für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} = 1. \quad \square$$

Bemerkung 14.9. Wir haben mit Bemerkung 14.2 (b) und Satz 14.8 nun schon zwei Beispiele dafür gesehen, wie sich zahlentheoretische Eigenschaften in holomorphen Funktionen widerspiegeln können. Es gibt ein ganzes Teilgebiet der Mathematik, die sogenannte *analytische Zahlentheorie*, das diese Zusammenhänge genauer studiert und mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden Probleme der Zahlentheorie (vor allem zum Thema der Primzahlverteilung) untersucht.

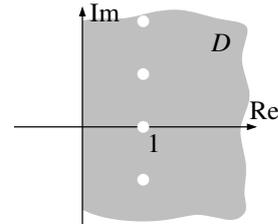
Bisher haben wir die Zetafunktion nur für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$ untersucht, da die Reihe in Definition 14.1 für keine anderen Werte von z konvergiert. Allerdings haben wir ja schon bei Potenzreihen gesehen, dass eine Reihendarstellung durchaus nur auf einer Teilmenge des größtmöglichen Definitionsbereiches einer holomorphen Funktion gültig sein kann. Wir können uns daher fragen, ob die Riemannsche Zetafunktion vielleicht auf ein größeres Gebiet holomorph fortgesetzt werden kann (auf dem dann die Reihendarstellung aus Definition 14.1 nicht mehr gilt).

In der Tat ist dies möglich. Wir geben hier zunächst mit Hilfe einer weiteren Dirichlet-Reihe eine einfache Möglichkeit an, wie man die Zetafunktion zumindest ein Stück weit in ein Gebiet mit kleinerem Realteil holomorph fortsetzen kann.

Satz 14.10 (Holomorphe Fortsetzung der Zetafunktion). *Die Vorschrift*

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{1}{1 - 2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$$

definiert eine auf $D := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus (1 + \frac{2\pi i}{\log 2} \mathbb{Z})$ holomorphe Funktion, die für alle z mit $\operatorname{Re} z > 1$ mit der Zetafunktion übereinstimmt.



Beweisidee. Zunächst gilt nach Definition der Zetafunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 1$

$$\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^z}.$$

Da in dieser Kombination nur die Terme mit geradem n übrig bleiben, können wir dies auch als

$$\zeta(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^z} = 2^{1-z} \zeta(z)$$

umschreiben, woraus durch Auflösen nach $\zeta(z)$ sofort $\zeta(z) = \tilde{\zeta}(z)$ folgt.

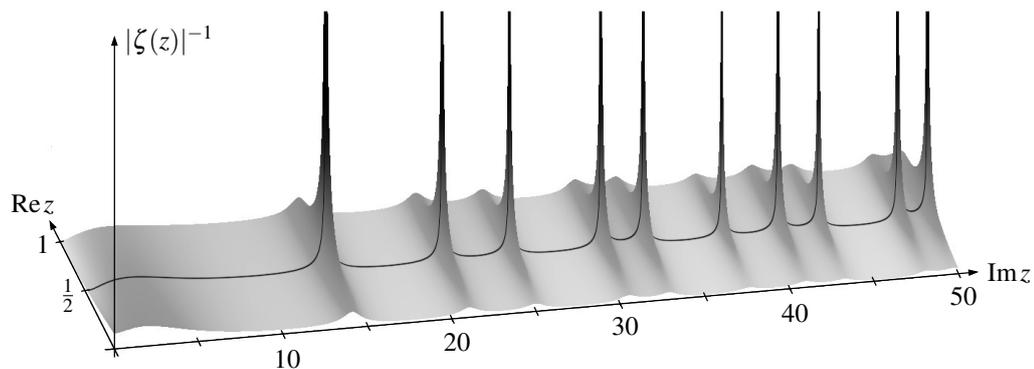
Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > 0$. Ist z reell, so ergibt sich die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ bereits aus dem Leibniz-Kriterium [G2, Satz 7.8]. Für komplexe z folgt die Konvergenz und die Holomorphie von $\tilde{\zeta}$ damit aus der Existenz einer Konvergenzhalbebene wie in Bemerkung 14.2 (b) [FB, Aufgabe VII.2.1], oder alternativ indem man wie beim Beweis des Leibniz-Kriterium jeweils zwei aufeinander folgende Summanden zu einem zusammenfasst. Die Menge $1 + \frac{2\pi i}{\log 2} \mathbb{Z}$ müssen wir dabei aus dem Definitionsbereich von $\tilde{\zeta}$ heraus nehmen, da an diesen Stellen $1 - 2^{1-z} = 0$ ist. \square

Bemerkung 14.11.

- (a) Im Gegensatz zur Reihe aus Definition 14.1 macht die Formel aus Satz 14.10 keinen besonders „natürlichen“ Eindruck mehr. Man könnte daher denken, dass diese Fortsetzung der Zetafunktion recht willkürlich ist. Das ist aber nicht so – denn wir haben ja im Identitätssatz in Folgerung 8.9 gesehen, dass zwei holomorphe Funktionen auf der zusammenhängenden Menge D aus Satz 14.10, die auf dem ursprünglichen Definitionsbereich $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ übereinstimmen, bereits gleich sein müssen! Die dort angegebene Funktion $\tilde{\zeta}$ ist also die *einzig mögliche* holomorphe Fortsetzung der Zetafunktion auf dieses größere Gebiet. Wir bezeichnen sie daher ebenfalls mit ζ und nennen auch sie die Riemannsche Zetafunktion.

- (b) Man kann zeigen, dass sich die Zetafunktion sogar holomorph nach $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen lässt [FB, Theorem VII.3.10]; wie in (a) ist diese Fortsetzung dann natürlich auch wieder eindeutig. Wir werden diese weitere Fortsetzung, deren Konstruktion deutlich komplizierter ist, im Folgenden aber nicht weiter untersuchen.

Nachdem wir die Zetafunktion nun (mit Ausnahme isolierter Singularitäten) in die gesamte rechte Halbebene fortgesetzt haben, können wir die Frage nach den Nullstellen (siehe Satz 14.8) natürlich wieder aufgreifen und uns fragen, ob in dem neu hinzugekommenen Streifen $0 < \operatorname{Re} z < 1$, dem sogenannten *kritischen Streifen*, Nullstellen der Zetafunktion liegen. Um zuerst einmal numerisch einen Überblick über die Situation in diesem Streifen zu bekommen, lassen wir die Funktion zunächst von einem Computer zeichnen. Dabei müssen wir uns mit dem (reellwertigen) Betrag der Zetafunktion begnügen, da wir die komplexwertige Zetafunktion nicht in einem dreidimensionalen Bild darstellen können. Im folgenden Bild haben wir außerdem den *Kehrwert* des Betrags der Zetafunktion zeichnen lassen – auf diese Art werden die Nullstellen deutlicher sichtbar, nämlich als Polstellen des Kehrwerts. Da die Zetafunktion nach Definition die Gleichung $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$ erfüllt und ihre Nullstellen somit symmetrisch zur reellen Achse liegen, haben wir uns zudem auf den Bereich mit positivem Imaginärteil beschränkt.



Aufgrund dieses Bildes sieht es so aus, als ob die Zetafunktion im kritischen Streifen Nullstellen besitzt, die zwar sehr unregelmäßig verteilt sind, aber alle den Realteil $\frac{1}{2}$ haben. Genau dies ist der Inhalt der sogenannten *Riemannschen Vermutung*:

Vermutung 14.12 (Riemannsche Vermutung). *Alle Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ haben den Realteil $\frac{1}{2}$.*

Dieses Problem ist schon sehr lange bekannt – es wurde von Riemann bereits im 19. Jahrhundert formuliert. Obwohl ein Beweis dieser Vermutung für die Zahlentheorie (und auch andere Gebiete der Mathematik) weitreichende Folgen hätte und demzufolge schon sehr viele Mathematiker nach einem solchen Beweis gesucht haben, existiert bis heute nicht einmal ein vielversprechender Ansatz zur Lösung. Das Problem wurde im Jahr 2000 vom Clay Mathematics Institute, einer der größten amerikanischen mathematischen Stiftungen, zu einem der „Millennium Problems“ ernannt und mit einem Preisgeld von 1 Million Dollar für den ersten korrekten Beweis versehen [C].

Bemerkung 14.13 (Numerische Überprüfung der Riemannschen Vermutung). Nach aktuellem Stand der Forschung wurde die Riemannsche Vermutung für die ersten 10 Billionen Nullstellen im kritischen Streifen numerisch bewiesen, so dass wohl nur noch wenige Mathematiker an der Korrektheit der Vermutung zweifeln.

Vielleicht stellt ihr euch die Frage, wie man denn überhaupt von irgendeiner Nullstelle der Zetafunktion zeigen kann, dass ihr Realteil *exakt* gleich $\frac{1}{2}$ ist, wenn man die Funktion aufgrund ihrer Definition als unendliche Reihe doch numerisch immer nur näherungsweise bestimmen kann. Die Lösung dieses Problems besteht darin, dass man weiß, dass die Nullstellen der Zetafunktion symmetrisch zur Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ liegen müssen [FB, Theorem VII.3.10]. Wenn man also zeigen kann, dass

die Zetafunktion in einem bestimmten Rechteck $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, a < \operatorname{Im} z < b\}$ (mit Vielfachheiten gezählt) genau eine Nullstelle besitzt, so kann diese nur Realteil $\frac{1}{2}$ haben, da ansonsten die gespiegelte Nullstelle auch noch in diesem Rechteck liegen müsste. Die Anzahl der Nullstellen von ζ in U ist aber mit Satz 13.2 gleich dem Null- und Polstellen zählenden Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} dz,$$

und dieses Integral kann man numerisch auswerten. Da es in jedem Fall eine ganze Zahl sein muss, genügt es, das Integral (mit korrekter Fehlerabschätzung) mit einem kleineren Fehler als $\frac{1}{2}$ zu berechnen, um seinen exakten Wert zu kennen.

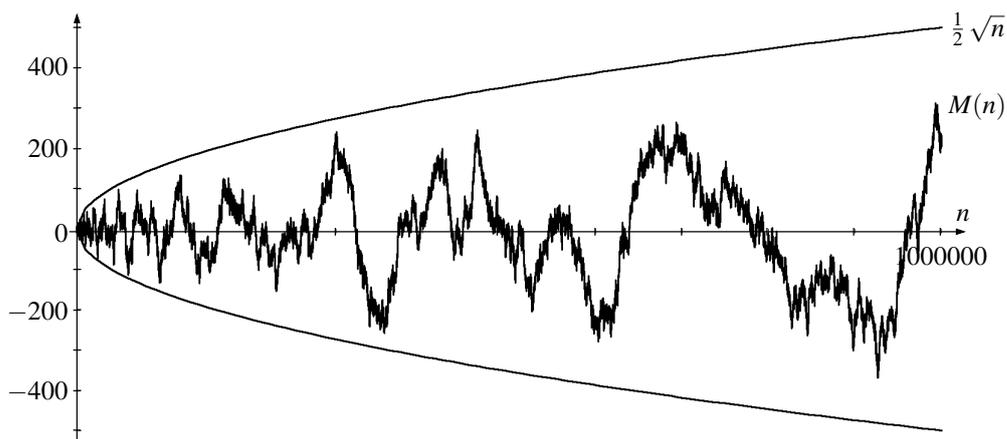
Dieses Verfahren funktioniert natürlich nur, wenn die Nullstellen der Zetafunktion auch wirklich einfach sind, da man zwischen einer doppelten Nullstelle mit Realteil $\frac{1}{2}$ und zwei einfachen Nullstellen, die nahe bei der Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ und symmetrisch zu ihr liegen, nicht unterscheiden könnte. Bisher haben sich aber alle gefundenen Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen als einfach herausgestellt.

Zum Abschluss wollen wir noch sehen, wie die Riemannsche Vermutung zahlentheoretisch interpretiert (und eventuell auch bewiesen) werden kann. Wir kommen dazu noch einmal auf die Möbius-Funktion aus Definition 14.6 zurück.

Bemerkung 14.14 (Die Möbius-Funktion als symmetrische Irrfahrt). Wir hatten in Bemerkung 14.7 ja schon gesehen, dass es so aussieht, als ob die Möbius-Funktion mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte 1 und -1 annimmt. Dies kann man besonders gut an der aufsummierten Möbius-Funktion

$$M(n) := \sum_{k=1}^n \mu(k)$$

sehen, die oft auch als *Mertens-Funktion* bezeichnet wird. Wäre $\mu(n) \in \{-1, 0, 1\}$ zufällig und symmetrisch verteilt (d. h. 1 und -1 treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf), so würde die Mertens-Funktion also die symmetrische Irrfahrt einer Person beschreiben, die gleich wahrscheinlich einen Schritt nach vorne oder hinten macht (wenn sie nicht stehen bleibt). Der folgende Graph der Mertens-Funktion scheint dies zu bestätigen.



Die Amplitude der Schwankungen von $M(n)$ scheint dabei in etwa proportional zu \sqrt{n} zu wachsen. In der Tat hat Mertens ursprünglich vermutet, dass $|M(n)| \leq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, was sich inzwischen jedoch als falsch herausgestellt hat. Allerdings konnte dies bisher nur theoretisch gezeigt werden – vom kleinsten n , das diese Ungleichung verletzt, weiß man bisher nur, dass es größer als 10^{14} sein muss (bis dahin hat man nämlich erfolglos numerisch nach einem Gegenbeispiel gesucht), aber kleiner als $10^{10^{40}}$ (was vermutlich ein Resultat von nur zweifelhaftem praktischen Nutzen ist).

Das sogenannte *Gesetz des iterierten Logarithmus* aus der Stochastik besagt jedoch, dass bei einer tatsächlich zufälligen symmetrischen Irrfahrt für $n \rightarrow \infty$ mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Abschätzung

$$|M(n)| \leq c \sqrt{n \log \log n} \tag{*}$$

für eine geeignete Konstante c gelten würde. Leider kann man dieses Resultat hier natürlich nicht anwenden, da die Mertens-Funktion ja in Wirklichkeit gar keine Zufallsbewegung ist, sondern eine völlig deterministische zahlentheoretische Funktion. Dennoch würde man natürlich erwarten, dass diese Abschätzung gilt – und in diesem Fall würde dies, wie wir jetzt sehen wollen, in der Tat die Riemannsche Vermutung beweisen. Wir benötigen dazu nur die etwas abgeschwächte Form

$$|M(n)| \leq cn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$, die offensichtlich aus (*) folgt, da $\sqrt{\log \log n}$ für $n \rightarrow \infty$ langsamer wächst als die Potenzfunktion n^ε .

Satz 14.15. *Gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante c mit $|M(n)| \leq cn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Riemannsche Vermutung wahr.*

Beweisidee. Wie schon in Bemerkung 14.13 erwähnt, liegen die Nullstellen der Zetafunktion im kritischen Streifen symmetrisch zur Achse $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Es genügt also zu zeigen, dass $\zeta(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ gilt. Dafür wiederum reicht es nach Satz 14.8 zu beweisen, dass die Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(z)}{n^z}$ konvergiert (und damit gleich $\frac{1}{\zeta(z)}$ ist).

Es sei also $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x = \frac{1}{2} + 2\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Wir setzen die Definition der Mertens-Funktion von \mathbb{N} nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ fort, indem wir $M(t) := M(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [n, n+1)$ setzen, und rechnen

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(n) - M(n-1)}{n^z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(n) (n^{-z} - (n+1)^{-z}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M(n) \int_n^{n+1} zt^{-z-1} dt \\ &= z \int_1^{\infty} M(t) t^{-z-1} dt. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$|t^{-z-1}| = |e^{(-x-iy-1) \log t}| = |e^{(-x-1) \log t}| = t^{-x-1} = t^{-\frac{3}{2}-2\varepsilon},$$

und damit ist dieses Integral wegen

$$\int_1^{\infty} |M(t) t^{-z-1}| dt \leq \int_1^{\infty} ct^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\frac{3}{2}-2\varepsilon} dt = c \int_1^{\infty} t^{-1-\varepsilon} dt = -\frac{c}{\varepsilon} [t^{-\varepsilon}]_1^{\infty} = \frac{c}{\varepsilon}$$

absolut konvergent. □

In der Tat kann man sogar zeigen, dass die Abschätzung aus Satz 14.15 äquivalent zur Riemannschen Vermutung ist. Wir haben damit also eine Möglichkeit gefunden, wie man die Riemannsche Vermutung vollständig in die Zahlentheorie übersetzen kann: Sie ist letztlich eine Aussage darüber, ob die Werte 1 und -1 in der Möbius-Funktion wirklich gleichverteilt sind, bzw. ob sich damit die Mertens-Funktion wie eine symmetrische Zufallsbewegung verhält. Auch viele andere zahlentheoretische Fragen zur Verteilung von Primzahlen lassen sich auf die Riemannsche Vermutung zurückführen.

Literatur

- [C] Clay Mathematics Institute, *The Millennium Problems*,
<http://www.claymath.org/millennium-problems>
- [FB] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie*, Springer (1991)
- [FL] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg (1980)
- [G1] A. Gathmann, *Algebraische Strukturen*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2023),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/ags>
- [G2] A. Gathmann, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern (2022/23),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/gdm>
- [G3] A. Gathmann, *Einführung in die Topologie*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2023),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/topo>
- [J] K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer (1993)
- [R] R. Remmert, *Funktionentheorie I*, Springer (1984)

Index

- Ableitung 10
 - formale 40
- absolute Konvergenz 5
- Äußeres
 - einer Randkurve 70
- analytische Funktion 42
- Argument 7
- Betrag einer komplexen Zahl 4
- Casorati-Weierstraß 61
- Cauchy-Hadamard 39
- Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen 12
- Cauchysche Integralformel 34
 - verallgemeinerte 43
- Cauchyscher Integralsatz 22
- $\deg f$ 73
- dichte Teilmenge 47
- Differentialgleichungen
 - von Cauchy-Riemann 12
- Differenzierbarkeit 10
- Dirichlet-Reihe 84
- Dreiecksungleichung
 - für Integrale 24
- einfach zusammenhängend 31
- Einheitswurzeln 8
- Entwicklungspunkt
 - einer Potenzreihe 39
- Eulersche Produktformel 86
- Exponentialfunktion 6
 - Funktionalgleichung 6
- Folgenkriterium für Stetigkeit 9
- formale Ableitung
 - einer Potenzreihe 40
- freie Homotopie 28
- Fundamentalsatz der Algebra 27, 38, 47, 79, 82
- Funktion
 - analytische 42
 - ganze 47
 - holomorphe 10
 - komplex differenzierbare 10
 - meromorphe 61
 - offene 50
 - rationale 73
 - stetig fortsetzbare 9
 - stetige 9
- ganze Funktion 47
- Gebiet 31
- Gebietstreue 50
- geschlossener Weg 17
- Grad
 - einer rationalen Funktion 73
- Grenzwert
 - einer Folge 5
 - einer Funktion 9
 - einer Reihe 5
- Hauptteil 52
- hebbare Singularität 57
- Hebbarkeitssatz von Riemann 60
- holomorphe Funktion 10
- Homotopie 28
 - freie 28
 - relative 28
- Homotopieinvarianz
 - des Wegintegrals 29
- de l'Hôpital 51
- Identitätssatz 48
- Imaginärteil 4
- Index 63
- Inneres
 - einer Randkurve 70
- Integralformel von Cauchy 34
- Integralsatz von Cauchy 22
- isolierte Singularität 57
- komplexe Differenzierbarkeit 10
- komplexe Exponentialfunktion 6
- komplexe Konjugation 4
- komplexe Potenz 44
- komplexe Zahlen 4
- komplexe Zahlenebene 4
- komplexer Logarithmus 21
- konjugiert komplexe Zahl 4
- Konvergenz
 - absolute 5
 - einer Folge 5
 - einer Funktion 9
 - einer Reihe 5
- Konvergenzkreis 39
- Konvergenzradius 39
- Konvergenzring 53
- konvexe Menge 32
- Kosinus 7
- kritischer Streifen 89
- Kurvenintegral 18
- $L(\gamma)$ 18
- Länge eines Weges 18
- Laurent-Entwicklung 54, 57
- Laurent-Reihe 52
- Liouville 46
- Logarithmus 21
- $\mu(n)$ 86
- Maximumprinzip 37
- Menge
 - einfach zusammenhängende 31
 - konvexe 32
 - sternförmige 31
 - wegzusammenhängende 31

- zusammenhängende 31
- meromorphe Funktion 61
- Mertens-Funktion 90
- Minimumprinzip 37
- Mittelwertprinzip 36
- Möbius-Funktion 86
- Nebenteil 52
- Nullstellen 58
 - Abzählen von 78
- offene Funktion 50
- $\text{ord}_z f$ 58
- Ordnung 58
- Partialbruchzerlegung 67
- Polarkoordinaten 7
- Polstellen 58
 - Abzählen von 78
- Potenz 44
- Potenzreihe 39
- Produktformel
 - von Euler 86
- Quotientenkriterium 5
- Randkurve 70
 - Äußeres 70
 - Inneres 70
- rationale Funktion 73
- Realteil 4
- relative Homotopie 28
- $\text{res}_z f$ 66
- Residuensatz 68
- Residuum 66
- Riemannsche Vermutung 89
- Riemannsche Zetafunktion 84
- Riemannscher Hebbarkeitssatz 60
- Rouché 81
- Satz
 - von Casorati-Weierstraß 61
 - von Liouville 46
 - von Rouché 81
- Singularität
 - hebbare 57
 - isolierte 57
 - wesentliche 58
- Sinus 7
- Spiegelungsprinzip 49
- Stammfunktion 20, 33
 - lokale 34
- Standardabschätzung
 - für Wegintegrale 24
- sternförmig 31
- stetige Fortsetzbarkeit 9
- Stetigkeit 9
 - Folgenkriterium 9
- Streifen
 - kritischer 89
- stückweise stetig differenzierbar 17
- Taylor-Entwicklung 42
- Taylor-Formel
 - für holomorphe Funktionen 42
 - für Potenzreihen 41
- Umlaufzahl 63
- Umparametrisierung 19
- Weg 17
 - geschlossener 17
 - stetig differenzierbarer 20
 - stückweise stetig differenzierbarer 17
 - zusammenziehbarer 29
- Wegintegral 18
- wegzusammenhängend 31
- wesentliche Singularität 58
- winkelerhaltende Abbildung 15
- Wirtinger-Ableitungen 14
- Wirtinger-Kalkül 13
- Wurzelkriterium 5
- $\zeta(z)$ 84
- Zetafunktion 84
 - zusammenhängend 31
 - einfach 31
 - zusammenziehbar 29