

## Einführung in die Funktionentheorie – Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 3. Februar bis 15:00

- (1) (a) Skizziere einen geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$ , so dass  $\int_{\gamma} \frac{z^3 + z - 1}{z^3 + z^2} dz = 10\pi i$  ist.  
 (b) Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $\text{ord}_{z_0} g = 1$  in einem Punkt  $z_0 \in D$ . Zeige, dass

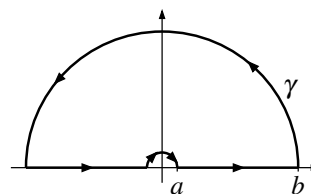
$$\text{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

- (2) Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend,  $z_0 \in D$  und  $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeige, dass das Residuum  $\text{res}_{z_0} f$  die eindeutig bestimmte Zahl  $c \in \mathbb{C}$  ist, so dass die auf  $D \setminus \{z_0\}$  holomorphe Funktion  $f(z) - \frac{c}{z-z_0}$  eine Stammfunktion besitzt.

- (3) (a) Zeige mit Hilfe des Residuensatzes, dass  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 4} dx = \frac{\pi}{8}$ .  
 (b) Es sei  $f$  ein komplexes Polynom, das nicht das Nullpolynom ist. Zeige, dass die Summe  $\sum_{z \in \mathbb{C}} \text{res}_z \frac{1}{f}$  aller Residuen von  $\frac{1}{f}$  genau dann gleich 0 ist, wenn  $\deg f \neq 1$ .

- (4) Zeige, dass  $\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi^3}{8}$ .

(Hinweis: Zu diesem Integranden kann man mit den üblichen bekannten Funktionen keine Stammfunktion finden. Beachte, dass es sich hierbei um ein an beiden Integrationsgrenzen uneigentliches Integral handelt. Man kann den komplexen Logarithmus statt auf  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  auch auf  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_{\leq 0}$  definieren, indem man  $\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi$  für  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  setzt. Betrachte das Integral dann auf dem rechts skizzierten geschlossenen Weg  $\gamma$ .)



~~Geht wählen!~~

Am 01.02. und am 02.02. finden die Wahlen zum Studierendenparlament, sowie zur studentischen Vertretung im Senat und Fachbereichsrat statt. Das Wahllokal befindet sich in 12-168.

Je mehr von euch wählen gehen, desto stärker wird die Durchsetzungskraft eurer Vertreter:innen sein.